Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Балахнев, Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 1, 13–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1759>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 10:52:52

© 2005 г.

М. Ю. Балахнев*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Представлены результаты классификации интегрируемых эволюционных N -компонентных векторных уравнений. В качестве доказательства точной интегрируемости построены преобразования Беклунда для каждого уравнения.

Ключевые слова: векторные эволюционные уравнения, преобразования Беклунда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Первые примеры интегрируемых векторных уравнений как векторно-матричных обобщений известных уравнений и систем были опубликованы в работе [1]. Среди них широко известны два векторных обобщения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (мКдФ):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t &= \mathbf{u}_{xxx} + (\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{u}_x, \\ \mathbf{u}_t &= \mathbf{u}_{xxx} + (\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{u}_x + (\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)\mathbf{u},\end{aligned}\tag{1}$$

где $\mathbf{u}(t, x)$ есть вектор N -мерного векторного пространства V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Известным примером является также векторное обобщение высшей симметрии уравнения Ландау–Лифшица [2]:

$$\mathbf{u}_t = \left(\mathbf{u}_{xx} + \frac{3}{2}(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x)\mathbf{u} \right)_x + \frac{3}{2}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{u}^2 = 1.\tag{2}$$

Здесь и далее по тексту $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – второе скалярное произведение, задаваемое формулой $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{u}, R\mathbf{v})$, где R – постоянная симметричная матрица.

Классификация векторных полиномиальных уравнений была проведена в работе [3]. В статье [4] были разработаны общие принципы симметричного подхода в классификации векторных уравнений и проведена классификация уравнений на n -мерной сфере. В работе [5] получены векторные уравнения, имеющие вид законов сохранения.

*Орловский государственный университет, Орел, Россия. E-mail: maxibal@yandex.ru

Мы приводим результаты классификации уравнений вида

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \mathbf{u}_{xxx} + f_1 \mathbf{u}_x + f_0 \mathbf{u}, \quad f_k = f_k(u_{[i,j]}), \\ u_{[i,j]} &= \left(\frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial x^i}, \frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial x^j} \right), \quad 0 \leq i \leq j \leq 2. \end{aligned} \quad (3)$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ КЛАССИФИКАЦИИ

Согласно рекуррентной формуле для канонических сохраняющихся плотностей ρ_k [4], для системы (3) можно легко установить, что функция f_0 должна иметь вид полной производной $f_0 \in \text{Im } D$. Дальнейший анализ условий интегрируемости мы провели с помощью Maple-программ [6] и проверили шесть условий интегрируемости $D_t \rho_k \in \text{Im } D$, $k = 0, \dots, 5$. Произведенные на компьютере промежуточные вычисления опустим ввиду их громоздкости и приведем только конечный результат.

ТЕОРЕМА 1. *Если уравнение (3) допускает бесконечную последовательность законов сохранения $(\rho_k)_t = (\sigma_k)_x$, $k \rightarrow \infty$, где ρ_k и σ_k — функции переменных $u_{[i,j]}$, то это уравнение принадлежит следующему списку:*

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + u_{[0,0]} \mathbf{u}_x; \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + u_{[0,0]} \mathbf{u}_x + u_{[0,1]} \mathbf{u}; \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{u_{[1,1]}}{a} + \frac{u_{[0,1]}^2}{a(a - u_{[0,0]})} \right) \mathbf{u} \right)_x + \frac{3}{2} b u_{[0,0]} \mathbf{u}_x; \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{u_{[1,1]}}{a} + \frac{u_{[0,1]}^2}{a(a - u_{[0,0]})} \right) \mathbf{u} \right)_x + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[1,1]}}{a} + \frac{u_{[0,1]}^2}{a(a - u_{[0,0]})} \right) \mathbf{u}_x; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \mathbf{u}_{xxx} + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{u_{[1,1]}}{a} + \frac{u_{[0,1]}^2}{a(a - u_{[0,0]})} \right) \mathbf{u} \right)_x + \frac{3u_{[0,2]}}{a - u_{[0,0]}} \mathbf{u}_x + \\ &+ \frac{3}{a - u_{[0,0]}} \left(\frac{u_{[1,1]} u_{[0,0]}}{a} + \frac{u_{[0,1]}^2 (a + 2u_{[0,0]})}{2a(a - u_{[0,0]})} - b u_{[0,0]} \right) \mathbf{u}_x; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \mathbf{u}_{xxx} + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{u_{[1,1]}}{a} + \frac{u_{[0,1]}^2 + b}{a(a - u_{[0,0]})} \right) \mathbf{u} \right)_x + \frac{3u_{[0,2]}}{a - u_{[0,0]}} \mathbf{u}_x - \\ &- \frac{3}{2} \frac{a - 3u_{[0,0]}}{a - u_{[0,0]}} \left(\frac{u_{[1,1]}}{a} + \frac{u_{[0,1]}^2 + b}{a(a - u_{[0,0]})} \right) \mathbf{u}_x; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \mathbf{u}_{xxx} - \frac{3a}{2} \left(u_{[2,2]} - \frac{a(1 + b u_{[0,0]}) u_{[1,2]}^2}{\zeta} - \right. \\ &- \left. \frac{2b u_{[0,1]} u_{[1,2]} (1 - a u_{[0,2]})}{\zeta} - \frac{b(1 - a u_{[0,2]})^2 (\zeta + a b u_{[0,1]}^2)}{a^2 (1 + b u_{[0,0]}) \zeta} \right) \mathbf{u}_x; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} - \frac{3a}{2} \left(u_{[2,2]} - \frac{a u_{[0,0]} u_{[1,2]}^2}{\xi} - \right.$$

$$- \frac{2u_{[0,1]}(1 - au_{[0,2]})u_{[1,2]}}{\xi} - \frac{(1 - au_{[0,2]})^2(\xi + au_{[0,1]}^2)}{a^2u_{[0,0]}\xi} \Big) \mathbf{u}_x; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + \frac{3}{2} \left(u_{[1,1]} - \frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} \right) \mathbf{u}_x - \frac{3}{2} \left(u_{[1,1]} - \frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} \right)_x \mathbf{u} - \\ - \frac{3a}{2} \left(u_{[2,2]} - \frac{au_{[0,0]}u_{[1,2]}^2}{\xi} - \frac{2u_{[0,1]}(1 - au_{[0,2]})u_{[1,2]}}{\xi} - \right. \\ \left. - \frac{(1 - au_{[0,2]})^2(\xi + au_{[0,1]}^2)}{a^2u_{[0,0]}\xi} \right) \mathbf{u}_x; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + 3 \left(\frac{\sqrt{\xi}u_{[0,1]}}{\sqrt{-a}u_{[0,0]}^2} - \frac{\xi - au_{[0,1]}^2}{2au_{[0,0]}^2} \right) \mathbf{u}_x - 3 \left(\frac{\sqrt{\xi}u_{[0,1]}}{\sqrt{-a}u_{[0,0]}^2} - \frac{\xi - au_{[0,1]}^2}{2au_{[0,0]}^2} \right)_x \mathbf{u} - \\ - \frac{3a}{2} \left(u_{[2,2]} - \frac{au_{[0,0]}u_{[1,2]}^2}{\xi} - \frac{2u_{[0,1]}(1 - au_{[0,2]})u_{[1,2]}}{\xi} - \right. \\ \left. - \frac{(1 - au_{[0,2]})^2(\xi + au_{[0,1]}^2)}{a^2u_{[0,0]}\xi} \right) \mathbf{u}_x, \end{aligned} \quad (13)$$

где a и b – произвольные константы, $\zeta = (1 + au_{[1,1]})(1 + bu_{[0,0]}) - abu_{[0,1]}^2$, $\xi = u_{[0,0]}(1 + au_{[1,1]}) - au_{[0,1]}^2$.

Очевидно, что система (3) инвариантна относительно движений пространства V , поэтому, как и в работах [4], [5], назовем такие системы изотропными. Расширим множество динамических переменных $u_{[i,j]}$ путем добавления анизотропных переменных

$$\tilde{u}_{[i,j]} = \left\langle \frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial x^i}, \frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial x^j} \right\rangle, \quad 0 \leq i \leq j \leq n. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 2. Если уравнение (3) удовлетворяет условию теоремы 1 с функциями ρ_i и σ_i , зависящими от $u_{[i,j]}$ и $\tilde{u}_{[i,j]}$, а коэффициенты f_1 и f_0 содержат переменные (14) при $n = 1$, то это уравнение принадлежит следующему списку:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{u_{[1,1]}}{a} + \frac{u_{[0,1]}^2}{a(a - u_{[0,0]})} \right) \mathbf{u} \right)_x + \frac{3}{2} \tilde{u}_{[0,0]} \mathbf{u}_x; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + \frac{3}{2} \left(\tilde{u}_{[1,1]} - \frac{\tilde{u}_{[0,1]}^2}{1 + \tilde{u}_{[0,0]}} \right) \mathbf{u}_x - \frac{3}{2} \left(\tilde{u}_{[1,1]} - \frac{\tilde{u}_{[0,1]}^2}{1 + \tilde{u}_{[0,0]}} \right)_x \mathbf{u} - \\ - \frac{3a}{2} \left(u_{[2,2]} - \frac{au_{[0,0]}u_{[1,2]}^2}{\xi} - \frac{2u_{[0,1]}(1 - au_{[0,2]})u_{[1,2]}}{\xi} - \right. \\ \left. - \frac{(1 - au_{[0,2]})^2(\xi + au_{[0,1]}^2)}{a^2u_{[0,0]}\xi} \right) \mathbf{u}_x; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + 3h\mathbf{u}_x - 3h_x\mathbf{u} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3a}{2} \left(u_{[2,2]} - \frac{au_{[0,0]}u_{[1,2]}^2}{\xi} - \frac{2u_{[0,1]}(1-au_{[0,2]})u_{[1,2]}}{\xi} - \right. \\
& \left. - \frac{(1-au_{[0,2]})^2(\xi+au_{[0,1]}^2)}{a^2u_{[0,0]}\xi} \right) \mathbf{u}_x,
\end{aligned} \tag{17}$$

где $a = \pm 1$, $\xi = u_{[0,0]}(1 + au_{[1,1]}) - au_{[0,1]}^2$,

$$\begin{aligned}
h = & \tilde{u}_{[1,1]} - 2 \frac{u_{[0,1]}\tilde{u}_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} + \sqrt{\xi} \frac{u_{[0,1]} - 2(\tilde{u}_{[0,1]}u_{[0,0]} - u_{[0,1]}\tilde{u}_{[0,0]})}{\sqrt{-a}u_{[0,0]}^2} - \\
& - \frac{(1 + 2\tilde{u}_{[0,0]})(\xi - au_{[0,1]}^2)}{2au_{[0,0]}^2}.
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В уравнениях (6)–(13) константа a не равна нулю и приводится к $a = \pm 1$ подходящим масштабным преобразованием $\mathbf{u}$. Постоянная b в уравнениях (6), (8) и (9) либо равна нулю, либо приводится к $b = 1$ растяжением по осям t и x . Уравнения (6) и (10) в случае $b = 0$ уже были получены в работе [5]. Уравнение (11) есть предельный случай уравнения (10) при фиксированном a и $b \rightarrow \infty$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

Мы установили, что системы (4), (5) связаны дифференциальными подстановками с системами (8), (9), соответственно. Уравнения (4) и (8) связаны подстановкой

$$\mathbf{u} = \sqrt{-\frac{3}{2a}} \left(\mathbf{v}_x + \frac{v_{[0,1]} - \sqrt{2ab(a - v_{[0,0]})}}{a - v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right),$$

где $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению (4), а $\mathbf{v}$ – уравнению (8). Подстановка

$$\mathbf{u} = \sqrt{-\frac{3}{a}} \left(\mathbf{v}_x + \frac{v_{[0,1]} + \sqrt{b}}{a - v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right)$$

связывает решение $\mathbf{u}$ уравнения (5) с решением $\mathbf{v}$ уравнения (9).

Алгоритм построения преобразований Беклунда описан в работах [4], [5]. Напомним только, что преобразования Беклунда для векторных уравнений зависят еще и от переменных

$$w_i = \left(\mathbf{u}, \frac{\partial^i \mathbf{v}}{\partial x^i} \right), \quad \tilde{w}_i = \left\langle \mathbf{u}, \frac{\partial^i \mathbf{v}}{\partial x^i} \right\rangle, \quad 0 \leq i \leq 1.$$

Здесь и далее $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ – два решения одного уравнения, μ – параметр.

Первое векторное уравнение мКдФ (4) имеет преобразование Беклунда вида

$$\sqrt{6}(\mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x) = (\mathbf{u} - \mathbf{v})\sqrt{\mu - (u_{[0,0]} + v_{[0,0]} + 2w_0)}, \tag{18}$$

а второе уравнение мКдФ (5) – преобразование

$$\sqrt{3}(\mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x) = \mu(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (u_{[0,0]} + v_{[0,0]} + 2w_0)}}{u_{[0,0]} + v_{[0,0]} + 2w_0}(\mathbf{u}(u_{[0,0]} + w_0) - \mathbf{v}(v_{[0,0]} + w_0)). \quad (19)$$

Преобразования (18) и (19) в скалярном пределе переходят в известное преобразование Беклунда для мКдФ

$$\frac{u_x + v_x}{u - v} = k\sqrt{\mu - (u + v)^2}.$$

Для уравнения (7) преобразование Беклунда записывается следующим образом:

$$\mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x = \frac{qw_1 + pv_{[0,1]}}{q(a + pq + w_0)}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mu(a\mathbf{v} - (pq + w_0)\mathbf{u}), \quad p^2 = u_{[0,0]} - a, q^2 = v_{[0,0]} - a. \quad (20)$$

Преобразование Беклунда для уравнения (10) имеет вид

$$\mathbf{u}_x - \mathbf{v}_x = \left(\frac{f\eta}{1 + bv_{[0,0]}} - \frac{b(1 + \mu w_0) - \mu}{1 + bv_{[0,0]}}v_{[0,1]} + \mu w_1 \right)(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \quad (21)$$

где $f^2 = b\mu^2(u_{[0,0]}v_{[0,0]} - w_0^2) - b(1 + 2\mu w_0) + 2\mu + \mu^2(u_{[0,0]} + v_{[0,0]} + 2w_0)$, $a\eta^2 = (1 + av_{[1,1]})(1 + bv_{[0,0]}) - abv_{[0,1]}^2$.

Предельный переход в уравнении (21) при $b \rightarrow \infty$ позволяет, согласно замечанию, получить преобразование Беклунда для уравнения (11):

$$\mathbf{u}_x - \mathbf{v}_x = \left(\frac{f\eta}{v_{[0,0]}} - \frac{1 + \mu w_0}{v_{[0,0]}}v_{[0,1]} + \mu w_1 \right)(\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

где $f^2 = \mu^2(v_{[0,0]}u_{[0,0]} - w_0^2) - (1 + 2\mu w_0)$, $a\eta^2 = v_{[0,0]}(1 + av_{[1,1]}) - av_{[0,1]}^2$.

Можно заметить, что при равенстве скалярных произведений $\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, \cdot)$ уравнения (6) и (15), (12) и (16), (13) и (17) совпадают. Следовательно, преобразования Беклунда для уравнений (6), (12) и (13) можно получить из преобразований Беклунда для (15), (16) и (17), соответственно, положив $\tilde{u}_{[i,j]} = u_{[i,j]}$ и $\tilde{w}_i = w_i$. В связи с этим мы приводим преобразования Беклунда только для анизотропных систем (15)–(17).

Для анизотропного уравнения (15) преобразование Беклунда записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x = & \frac{qw_1 + pv_{[0,1]}}{q(a + pq + w_0)}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \\ & + \frac{\sqrt{\mu(a + pq + w_0) - \tilde{u}_{[0,0]} - \tilde{v}_{[0,0]} - 2\tilde{w}_0}}{a + pq + w_0}(a\mathbf{v} - (pq + w_0)\mathbf{u}), \end{aligned}$$

где p и q те же, что и в (20).

Преобразование Беклунда для уравнения (16) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x - \mathbf{v}_x = & \left(\tilde{w}_1 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} \tilde{v}_{[0,1]} \right) \mathbf{u} + \\ & + \left(\frac{f\eta}{v_{[0,0]}} + \frac{\mu w_1}{1 + \tilde{p}\tilde{q} + \tilde{w}_0} - \left(1 + \frac{\mu w_0}{1 + \tilde{p}\tilde{q} + \tilde{w}_0} \right) \frac{v_{[0,1]}}{v_{[0,0]}} \right) (\mathbf{v} + (\tilde{p}\tilde{q} + \tilde{w}_0) \mathbf{u}), \end{aligned}$$

где

$$f^2 = \frac{\mu^2 (v_{[0,0]} u_{[0,0]} - w_0^2)}{(1 + \tilde{p}\tilde{q} + \tilde{w}_0)^2} + \frac{1 - \tilde{p}\tilde{q} - \tilde{w}_0}{1 + \tilde{p}\tilde{q} + \tilde{w}_0} - \frac{2(1 + \mu w_0)}{1 + \tilde{p}\tilde{q} + \tilde{w}_0},$$

$a\eta^2 = v_{[0,0]}(1 + av_{[1,1]}) - av_{[0,1]}^2$, $\tilde{p}^2 = \tilde{u}_{[0,0]} + 1$, $\tilde{q}^2 = \tilde{v}_{[0,0]} + 1$. Наконец, для анизотропного уравнения (17) мы построили следующее преобразование Беклунда:

$$\mathbf{u}_x - \mathbf{v}_x = 2 \left[\tilde{w}_1 - \frac{h + gw_0 + 1}{gv_{[0,0]}} \tilde{v}_{[0,1]} - f \right] \mathbf{u} + e \mathbf{v},$$

где

$$\begin{aligned} f = & \frac{\eta + v_{[0,1]}}{4v_{[0,0]}} \left(\frac{gv_{[0,0]}}{h + gw_0 + 1} (1 + 2\tilde{u}_{[0,0]}) - \frac{h + gw_0 + 1}{gv_{[0,0]}} (1 + 2\tilde{v}_{[0,0]}) \right) + \\ & + \frac{e}{4} \left(\frac{gv_{[0,0]}}{h + gw_0 + 1} (1 + 2\tilde{u}_{[0,0]}) + \frac{h + gw_0 + 1}{gv_{[0,0]}} (1 + 2\tilde{v}_{[0,0]}) - 4\tilde{w}_0 \right), \\ e = & gw_1 - v_{[0,1]} \frac{1 + gw_0}{v_{[0,0]}} + \frac{h\eta}{v_{[0,0]}}, \\ h^2 = & (gw_0 + 1)^2 - u_{[0,0]} v_{[0,0]} g^2, \\ -a\eta^2 = & v_{[0,0]} (1 + av_{[1,1]}) - av_{[0,1]}^2, \end{aligned}$$

а функция g есть корень уравнения

$$\begin{aligned} (gw_0 + 1)^2 - g^2 u_{[0,0]} v_{[0,0]} = & \\ = & \left(\frac{u_{[0,0]} + v_{[0,0]} + 2(\mu u_{[0,0]} v_{[0,0]} + \tilde{v}_{[0,0]} u_{[0,0]} + \tilde{u}_{[0,0]} v_{[0,0]})}{u_{[0,0]} - v_{[0,0]} + 2(\tilde{v}_{[0,0]} u_{[0,0]} - \tilde{u}_{[0,0]} v_{[0,0]})} - \right. \\ & \left. - \frac{2u_{[0,0]} v_{[0,0]} (1 + 2\tilde{w}_0) - v_{[0,0]} w_0 (1 + 2\tilde{u}_{[0,0]}) - u_{[0,0]} w_0 (1 + 2\tilde{v}_{[0,0]})}{u_{[0,0]} - v_{[0,0]} + 2(\tilde{v}_{[0,0]} u_{[0,0]} - \tilde{u}_{[0,0]} v_{[0,0]})} g \right)^2. \end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как отмечалось, уравнения (4) и (5) уже встречались в литературе, и их интегрируемость не вызывает сомнений. Существование связей между ними и системами (8), (9) явно свидетельствует об интегрируемости последних.

С помощью уравнения (20) можно легко построить односолитонное решение (7). Так как $\mathbf{u} = 0$ — тривиальное решение уравнения (7), положим $\mathbf{v} = 0$ в уравнении (20); тогда получим уравнение

$$\mathbf{u}_x = -\mu \sqrt{a} \sqrt{a - u_{[0,0]}} \mathbf{u} \quad (22)$$

и его следствия

$$u_{[0,1]} = -\mu\sqrt{a}\sqrt{a-u_{[0,0]}}u_{[0,0]}, \quad u_{[1,1]} = \mu^2a(a-u_{[0,0]})u_{[0,0]}. \quad (23)$$

Подставив выражение (23) в уравнение (7) и используя (22), мы получаем

$$\mathbf{u}_t = -\mu^3a^2\sqrt{a}\sqrt{a-u_{[0,0]}}\mathbf{u};$$

это означает, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x + \mu^2a^2t)$. Из первого из уравнений (23) находим

$$u_{[0,0]} = \frac{a}{\operatorname{ch}^2(\mu a(x + \mu^2a^2t))}$$

и окончательно имеем

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{a}\mathbf{C}}{\operatorname{ch}(\mu a(x + \mu^2a^2t))}, \quad (\mathbf{C}, \mathbf{C}) = 1,$$

где $\mathbf{C}$ – постоянный вектор.

Уравнение (15) есть аналог уравнения (2), интегрируемого на n -мерной сфере. Перейдем в уравнении (15) к координатам

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{u_{[0,0]}}, \quad r = \sqrt{u_{[0,0]}}; \quad (24)$$

тогда оно равносильно системе из одного векторного и одного скалярного уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \mathbf{v}_{xxx} + 3\frac{r_x}{r}\mathbf{v}_{xx} + 3\frac{r_{xx}}{r}\mathbf{v}_x + \\ &+ \frac{3}{2}\left(\frac{r^2v_{[1,1]}}{a} + \frac{r_x^2}{a-r^2} + r^2\tilde{v}_{[0,0]}\right)\mathbf{v}_x + 3\left(v_{[1,2]} + \frac{r_xv_{[1,1]}}{r}\right)\mathbf{v}, \\ r_t &= r_{xxx} + \frac{3rr_x}{a-r^2}r_{xx} + \\ &+ \frac{3}{2}\left(\frac{(a+r^2)r_x^2}{(a-r^2)^2} - \frac{(2a-3r^2)v_{[1,1]}}{a} + r^2\tilde{v}_{[0,0]}\right)r_x - \frac{3(a-r^2)v_{[1,2]}}{a}r. \end{aligned}$$

Осуществим в последней системе предельный переход при $r(x, t) \rightarrow \sqrt{a}$. Для этого положим сначала $r(x, t) = r \equiv \operatorname{const}$ (например, в работе [4] $r = 1$); тогда все производные скалярной функции $r(x, t)$ будут равны нулю. Затем устремим r к $\sqrt{a}$ и в итоге получим одно векторное уравнение

$$\mathbf{v}_t = \left(\mathbf{v}_{xx} + \frac{3}{2}v_{[1,1]}\mathbf{v}\right)_x + \frac{3}{2}\tilde{v}_{[0,0]}\mathbf{v}_x, \quad \mathbf{v}^2 = 1, \quad (25)$$

которое совпадает с уравнением (2). Константа a включена в анизотропную метрику. Согласно перечисленным условиям преобразование Беклунда для уравнения (15) перейдет в преобразование Беклунда для уравнения (25):

$$\mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x = \frac{w_1}{1 + w_0}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \frac{f}{1 + w_0}(\mathbf{v} - w_0 \mathbf{u}), \quad f^2 = \mu(1 + w_0) - (\tilde{u}_{[0,0]} + \tilde{v}_{[0,0]} + 2\tilde{w}_0).$$

В уравнении (16) также можно осуществить редукцию (24), что дает

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \mathbf{v}_{xxx} + 3\frac{r_x}{r}\mathbf{v}_{xx} + 3\left(\frac{r_{xx}}{r} + \frac{r^2}{a}v_{[1,1]} + \frac{r_x^2}{a - r^2}\right)\mathbf{v}_x + 3\left(v_{[1,2]} + \frac{r_x}{r}v_{[1,1]}\right)\mathbf{v}, \\ r_t &= r_{xxx} + \frac{3rr_x}{a - r^2}r_{xx} - 3\left(\frac{(a - r^2)r}{a}v_{[1,2]} + \frac{(a - 2r^2)r_x}{a}v_{[1,1]} - \frac{ar_x^3}{(a - r^2)^2}\right). \end{aligned}$$

Как и в предыдущей системе, перейдя к пределу $r(x, t) \rightarrow \sqrt{a}$, приходим к одному векторному уравнению

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{xxx} + 3v_{[1,1]}\mathbf{v}_x + 3v_{[1,2]}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^2 = 1. \quad (26)$$

Уравнение (26) встречалось в работе [4], преобразование (20) переходит в преобразование Беклунда для (26) (ср. с [4])

$$\mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x = \frac{w_1}{1 + w_0}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mu(\mathbf{v} - w_0 \mathbf{u}).$$

Отметим также, что в анизотропных уравнениях (15)–(17) и соответственно в преобразованиях Беклунда для них скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ можно брать как равным произведению $(\cdot, \cdot)$, так и равным нулю, причем для функции h из уравнения (17) эти две возможности равносильны.

Благодарности. Автор благодарит проф. А. Г. Мешкова за постановку задачи и полезные обсуждения, а также признателен рецензенту за критические замечания. Все вычисления проведены на базе центра компьютерной алгебры MuPad – университет Падерборн (Германия). Финансирование осуществлялось фондом Ханнса Зайделя. Работа частично поддержана также грантом РФФИ № 02-01-00431.

Список литературы

- [1] *С. И. Свинолупов, В. В. Соколов.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 214–218.
- [2] *И. З. Голубчик, В. В. Соколов.* ТМФ. 2000. Т. 124. № 1. С. 62–71.
- [3] *V. V. Sokolov, T. Wolf.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 11139–11148.
- [4] *A. G. Meshkov, V. V. Sokolov.* Commun. Math. Phys. 2002. V. 232. № 2. P. 1–18.
- [5] *А. Г. Мешков, В. В. Соколов.* ТМФ. 2004. Т. 139. № 2. С. 192–208.
- [6] *А. Г. Мешков.* Software and help files for Maple. <http://www.orel.ru/meshkov>.

Поступила в редакцию 6.IV.2004 г.,
после доработки 5.V.2004 г.