Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Мамаева, Н. Н. Трунов, О волновых уравнениях в римановых пространствах, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 1, 82–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:00:01

© 2003 г.

К. С. Мамаева*, Н. Н. Трунов†

О ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Классическое волновое уравнение, включающее скалярную кривизну с произвольным коэффициентом ξ , рассматривается в связи с его квантово-теоретическими применениями. Общие свойства этого уравнения и его решений изучаются на основе современных результатов группового анализа с целью фиксации физически обоснованного значения ξ . Эти свойства существенно зависят не только от значения ξ и массового параметра, но также от типа пространства и размерности. В общем случае необходимо различать форминвариантность и конформную инвариантность. Только при конформном значении ξ имеется класс лоренцевых пространств, в котором безмассовое уравнение удовлетворяет принципу Гюйгенса, а его функция Грина не имеет логарифмической сингулярности. К тому же значению ξ приводят выявленная связь с известным преобразованием метода ВКБ и другие аргументы.

Ключевые слова: волновое уравнение, искривленное пространство-время, конформная инвариантность, конформные преобразования, принцип Гюйгенса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, обобщение скалярного волнового уравнения на римановы пространства допускает известный произвол. Именно, наряду с введением даламбертиана $\nabla_\alpha \nabla^\alpha$ с ковариантными производными ∇_α это уравнение может априори содержать слагаемое, пропорциональное скалярной кривизне ξR с произвольным множителем ξ ; величина R – единственный инвариант, по размерности и тензорной валентности совпадающий с $\nabla_\alpha \nabla^\alpha$ (см., например, [1]). Целью данной статьи мы полагаем получение, анализ и систематизацию основанных на общих свойствах волнового уравнения аргументов в пользу конформного значения ξ .

Введем подробное обозначение этого волнового оператора в пространстве с метрикой $g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{g}$ и определителем метрики $g \neq 0$:

$$\Delta[\xi, \mathbf{g}] = \nabla_\alpha \nabla^\alpha + \xi R[\mathbf{g}], \quad (1)$$

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}, \quad \Gamma^\nu = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g^{\mu\nu} |g|^{1/2}). \quad (2)$$

*Санкт-Петербургский университет экономики и финансов, С.-Петербург, Россия

†Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии, С.-Петербург, Россия.

E-mail: trunov@vniim.ru

Поскольку в плоском пространстве-времени $R = 0$, для него все значения в уравнении (1) неразличимы¹⁾. В общем случае пространств V_n размерности n (и произвольной сигнатуры) выделенными являются значения $\xi = 0$, когда нет члена с R , и $\xi = \xi_c(n)$, где

$$\xi_c(n) = \frac{n-1}{4(n-2)}, \quad (3)$$

при котором оператор $\Delta[\xi, \mathbf{g}]$ имеет повышенную симметрию.

Известно, что для двух пространств, метрики которых связаны конформным преобразованием

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = H^2(x)g_{\mu\nu} \quad (4)$$

с достаточно гладкой функцией $H > 0$, оператор (1) при $\xi = \xi_c$ из (3) и только при этом значении ξ обладает следующей симметрией [4], проверяемой прямым вычислением:

$$\Delta[\xi_c, \mathbf{g}]u(x) = H^{(n+2)/2} \Delta[\xi_c, H^2 \mathbf{g}](uH^{-(n-2)/2}). \quad (5)$$

Если ввести специальное обозначение для преобразованной функции

$$\varphi(x|H) = u(x)H^{-(n-2)/2}, \quad (6)$$

так что $\varphi(x|1) = u(x)$, из (5) и (6) следует инвариантный относительно замены H вид волнового уравнения

$$\Delta[\xi_c, H^2 \mathbf{g}]\varphi(x|H) = 0. \quad (7)$$

Свойство (5) или (7) назовем форминвариантностью, резервируя обычно употребляемый в физической литературе термин конформная инвариантность для определений, которые будут сделаны в разделе 3.

Приведем аналогичное соотношение для случая, когда в уравнении имеется дополнительно линейный член вида $Q(x)u$:

$$\Delta[\xi_c, H^2 \mathbf{g}]\varphi(x|H) + Q(x)H^{-2}\varphi(x|H) = 0. \quad (8)$$

Видно, что он нарушает форминвариантность; восстановить ее при $Q \neq 0$ иным выбором φ невозможно, что обусловлено разными степенями H слева и справа от Δ в выражении (5).

Хотя обсуждение классического волнового уравнения с оператором (1) ведется с 1920-х г., а применения его для квантования скалярного поля в искривленном пространстве обсуждаются с 1960-х (см. работы [1], [4] и ссылки в них), дискуссии о выборе значения ξ продолжаются до настоящего времени (см. [5]–[7] и ссылки в них). Фактически перенормированный ТЭИ и другие величины вычисляются в каждой задаче параллельно для $\xi = 0$, ξ_c или как функция ξ [8], [9], что приводит к неоднозначности физических следствий.

¹⁾Но не в тензоре энергии-импульса (ТЭИ), если определять его вариацией действия по метрике [1]. Такой перенормированный вакуумный ТЭИ имеет обычно наиболее регулярную зависимость от координат при $\xi = \xi_c$ из (3), см. примеры в [2], [3].

Известны качественные аргументы, основанные на частных результатах конкретных задач, в пользу значения $\xi = \xi_c$. При этом остается неясным, какие свойства присущи оператору $\Delta[\xi, \mathbf{g}]$, какие – пространству V_n и какие – самим задачам (например, наличие или отсутствие логарифмической сингулярности в функции Грина; особенности ТЭИ).

В предлагаемой статье проводится общий математический анализ свойств оператора $\Delta[\xi, \mathbf{g}]$ как функции ξ и функционала $\mathbf{g}$ в разных классах V_n , а также физических следствий конкретного выбора значения ξ .

В разделе 2 приведены известные результаты по классификации пространств и уравнений, а также получены их простые следствия, необходимые в дальнейшем. В разделе 3 для безмассового скалярного поля изучается существенно зависящий от значения ξ комплекс свойств волнового уравнения и его решений. В разделе 4 изучены отличительные особенности волнового уравнения с ненулевой массой в зависимости от ξ и типа пространства. Раздел 5 суммирует результаты, свидетельствующие о выделенном значении $\xi = \xi_c$ и обусловленные разными причинами в задачах с безмассовым или массивным полем и пространствах с разными конформными свойствами.

В приложении рассмотрены различные способы ограничения дифференциального оператора на подпространство и выбор оптимальных переменных для основного приближения ВКБ, что используется в разделе 5.

Оставляя обозначение V_n за пространствами произвольной сигнатуры, для лоренцевых пространств сигнатуры $(1, n-1)$, т.е. с метрикой, локально приводимой к виду $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$, применим L_n , для плоских пространств любой сигнатуры $-\mathbb{R}^n$. Сокращением “ k -” будем заменять слово “конформно (ный)”.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ И УРАВНЕНИЙ

Все изучаемые здесь уравнения имеют вид, приводимый к ковариантному посредством (2):

$$\begin{aligned} F[u] &= g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + b^\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + cu = \\ &= \nabla_\alpha \nabla^\alpha u + a^\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + c(x)u = 0, \\ a^\alpha &= b^\alpha + \Gamma^\alpha, \end{aligned} \tag{9}$$

с Γ^α из (2) и полностью определяются метрикой $\mathbf{g}$ ассоциированного с F пространства, задаваемого коэффициентами при вторых производных и наборами функций (b^α, c) или (a^α, c) . Соответственно именно L_n ассоциированы с волновыми уравнениями, а V_n -сигнатуры $(0, n)$ – с эллиптическими. Физически ясно, что индивидуальные особенности (b^α, c) могут лишь понизить максимальную симметрию решений, допускаемую $\mathbf{g}$. Поэтому анализ $F[u]$ начинают с классификации пространств; приведем необходимые факты из монографии [4], § 8, 10.

Существенно выделение пространств с нетривиальной конформной группой (НКГ). Название связано с тем, что для V_n не существует такого конформного преобразования метрики (4), чтобы для $\tilde{V}_n$ совпадали конформная группа и группа изометрий. Прочие

пространства, где такое совпадение возможно, относят к V_n с тривиальной конформной группой (ТКГ).

Полная классификация выполнена для лоренцевых пространств L_n ($1, n-1$) и пространств $(0, n)$ при любом n . Справедливо [4] следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Конформно-плоские (k -плоские) V_n всегда обладают НКГ при любой сигнатуре. Ими исчерпываются все V_n типа $(0, n)$ с НКГ, в то время как НКГ присуща более широкому классу конформно-пустых (k -пустых) L_n с $n \geq 4$.*

При этом k -плоскими называем пространства V_n , которые конформным преобразованием переводятся в плоские, а k -пустыми – переводимые в $\tilde{V}_n$ с тензором Риччи $\tilde{R}_{\alpha\beta} \equiv 0$. При каждом n в классе k -пустых пространств V_n целиком содержится класс k -плоских.

Метрика k -пустых L_n при $n = 4$ приводится к виду

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - f(x-t) dy^2 - 2\phi(x-t) dy dz - dz^2 \quad (10)$$

при условии $f - \phi^2 > 0$. K -плоскими являются L_4 с постоянными f, ϕ и тремя специальными видами зависимости f и ϕ от $x-t$. Все прочие f, ϕ описывают k -пустые, но не k -плоские L_4 .

Отметим [4], что $N = n(n+1)/2$ функций от $g_{\alpha\beta}$ образуют $N - \delta$ инвариантов $J_{\alpha\beta}$ группы движений в V_n , причем для конформных преобразований $\delta = 1$ и

$$J_{\alpha\beta}(x) = \frac{g_{\alpha\beta}}{\hat{g}(x)}, \quad \hat{g}(x) \neq 0, \quad (11)$$

где $\hat{g}$ – любая фиксированная компонента $g_{\alpha\beta}$; удобно выбирать временную $\hat{g} = g_{00} \neq 0$.

При современном групповом анализе отдельным объектом является не уравнение (9), а класс эквивалентности уравнений, получаемых из (9) композицией допустимых преобразований (см. [10], § 27.1):

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad x^\alpha &\longrightarrow \tilde{x}^\alpha = f^\alpha(x), & \left| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right| &\neq 0, \\ \text{б)} \quad F[u] &\longrightarrow \hat{F}[u] = W^{-1}F[Wu], \\ \text{в)} \quad F[u] &\longrightarrow \tilde{F}[u] = H^{-2}F[u], & \tilde{g} &= H^2g, \end{aligned} \quad (12)$$

с произвольными функциями H и W , не равными нулю и имеющими достаточную гладкость. При этом преобразование (12в) меняет коэффициенты при вторых производных, что означает переход к конформному ассоциированному пространству с метрикой $\tilde{g}$. В остальных преобразованиях (12) метрика сохраняется, в (12а) – в новых переменных.

Композиция (12б) и (12в) при $H^2 = W$ определяет замену функции: $F[u] \rightarrow F[Wu]$; это преобразование может заменить собой (12в), как в § 10 из [4], и фактически применялось в разделе 1.

Класс эквивалентности характеризуется инвариантами (см. [10], § 27.7)

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad C &= -\frac{1}{2}\nabla_\alpha a^\alpha - \frac{1}{4}a^\alpha a_\alpha - \xi_c(n)R + c, \\ \text{б)} \quad K_{\alpha\beta} &= \nabla_\beta a_\alpha - \nabla_\alpha a_\beta = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\xi_c(n)$ и R – те же, что и в (1), (3). Величины C и $K_{\alpha\beta}$ остаются неизменными при всех преобразованиях (12) за одним исключением: при (12в)

$$C \longrightarrow \tilde{C} = H^{-2}(x)C, \quad (14)$$

так что $C = 0$ и все значения $K_{\alpha\beta}$ являются абсолютными инвариантами преобразований (12).

При групповом подходе вводится инфинитезимальный оператор

$$X = \zeta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

группы G , допускаемой уравнением (9). Сужение G_x этой группы ($\eta \equiv 0$) является подгруппой группы конформных движений в V_n , имеющем метрику $\mathbf{g}$ (9). Примем определение (см. [4], с. 92): уравнение называется конформно-инвариантным, если G_x совпадает с максимальной группой конформных движений в V_n .

Анализ позволяет утверждать, что справедливы [4]

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Уравнение (7) k -инвариантно в любом V_n .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Линейные k -инвариантные уравнения в L_n с НКГ удовлетворяют условиям

$$\text{а)} \quad C = 0, \quad \text{б)} \quad K_{\alpha\beta} = 0. \quad (15)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. В L_n , $n \geq 4$, с НКГ уравнение (9) k -инвариантно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно (7).

Как видно из (9), вектор $a^\alpha \neq 0$ характеризует отклонение оператора от ковариантного вида $\nabla^\alpha \nabla_\alpha$. Требуя $a^\alpha = \tilde{a}^\alpha = 0$, получим на основе (13), (14) соответствие между двумя ковариантными представителями класса эквивалентности:

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha + c = \nabla_\alpha \nabla^\alpha + \xi_c(n)R + C \longrightarrow \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}^\alpha + \xi_c(n)\tilde{R} + CH^{-2}. \quad (16)$$

Важнейшим является случай $C = 0$, когда оператор имеет форминвариантный вид (в метрике $\mathbf{g}$ и $\tilde{\mathbf{g}} = H^2\mathbf{g}$ вычисляются соответственно ∇_α , R и $\tilde{\nabla}_\alpha$, $\tilde{R}$). Такой вид, в частности, имеет волновой оператор в плоском пространстве с $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, $R = 0$, а потому и его обобщения по формуле (16) в k -плоских пространствах с $\tilde{R} \neq 0$, но с $C = \tilde{C} = 0$ по (14).

Таким образом, слагаемое $\xi_c R$ появляется в волновых уравнениях (и их аналогах с другой сигнатурой) как следствие требования форминвариантности оператора (1), (7) наряду с условием $C = 0$. Заметим, что на данном этапе нет необходимости параллельно находить преобразованные функции.

Из (16), а также из утверждений 2.2–2.4 следуют

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Уравнение с оператором (1) форминвариантно в любом V_n , если и только если

$$\text{а) } C = 0, \quad \text{б) } a^\alpha = 0, \quad \text{в) } \xi = \xi_c. \quad (17)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. В любом V_n форминвариантное уравнение и k -инвариантно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. В L_n с $n \geq 4$ форминвариантные уравнения составляют подкласс единственного класса эквивалентности k -инвариантных уравнений, определяемый дополнительным условием (176).

Значения $a^\alpha = \tilde{a}^\alpha = 0$ сохраняются, например, в преобразованиях (12а); пример изменения $\tilde{a}^\alpha$ дан в приложении.

Тот факт, что уравнения рассматриваются (и, в частности, считаются единственными) с точностью до преобразований (12), полностью соответствует практике, например, квантово-механических расчетов. Сами же инварианты, как показано в приложении, позволяют получить многомерные аналоги стандартных преобразований обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [11], с. 30). В частности, весь класс эквивалентности уравнений Шредингера имеет тождественные спектры – конечно, при корректном преобразовании граничных условий.

Преобразования (12) не изменяют также факта выполнения или нарушения принципа Гюйгенса, изучаемого в разделе 3.

3. ЗАВИСИМОСТЬ СВОЙСТВ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ОТ ЗНАЧЕНИЯ ξ

Реальное физическое пространство L_4 оказывается выделенным в следующем смысле.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Существует, и притом только одна, размерность $n = 4$ лоренцева пространства и только один класс пространств в L_4 : k -пустые пространства, в которых для каждого из уравнений (9) одновременно выполняются или нарушаются четыре свойства:

- а) форминвариантность;
- б) k -инвариантность;
- в) справедливость принципа Гюйгенса;
- г) отсутствие логарифмической сингулярности в симметрической функции Грина.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Уравнение, удовлетворяющее условиям а)–г) утверждения 4.1, существует, оно единственно в смысле раздела 2, соответствующий оператор совпадает с (1) при $\xi = \xi_c$:

$$\Delta[\xi_c, \mathbf{g}]u = 0. \quad (18)$$

Из сравнения утверждений 2.1 и 2.4 следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. В k -пустых L_n с $n \geq 4$ уравнение (9) k -инвариантно, если и только если оно совпадает с (18), где $\xi = \xi_c$.

Для обоснования утверждений 3.1–3.3 заметим, что в отношении принципа Гюйгенса известны лишь некоторые необходимые условия (см. [4], § 11), среди которых требования

$$C = 0, \quad g^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma K_{\alpha\beta} = 0 \quad (19)$$

при условии (17). Поэтому приходится использовать критерий Адамара (см. [12], с. 255, [4], с. 104), который формулируется для сопряженного к (9) уравнения

$${}^*F[v] = \frac{\partial(g^{\alpha\beta}v)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial(b^\alpha v)}{\partial x^\alpha} + cv = 0. \quad (20)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. Для выполнения принципа Гюйгенса необходимы и достаточны следующие условия:

- а) пространство – лоренцево L_n с четным $n \geq 4$;
- б) в симметричной функции Грина (“элементарном решении”)

$$G(x, x') = \frac{d(x, x')}{\Gamma^{(n-1/2)/2}(x, x')} + w(x, x') \ln \Gamma(x, x') \quad (21)$$

сопряженного уравнения, где $\Gamma(x, x')$ – квадрат геодезического расстояния между x и x' , d и w – аналитические по x функции, должно быть $w(x, x') \equiv 0$.

Это условие эквивалентно некоторому более сложному, налагаемому на свойства $d(x, x')$. Проверка его выполнения (см. [4], § 11) позволяет с учетом утверждения 2.1 получить

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. В k -пустых L_n при четных $n \geq 4$ принципу Гюйгенса удовлетворяет уравнение (18), где $\xi = \xi_c$, причем при $n = 4$ только (18), а при $n > 4$ в любом L_n существуют и другие такие уравнения, не являющиеся k -инвариантными. Таким образом, условие (19) ужесточается до (15).

Далее, используем замечание Адамара (см. [12], с. 191).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Элементарное решение для $F[u]$ (9) содержит $\ln \Gamma$ с коэффициентом, отличающимся от $w(x, x')$ только перестановкой аргументов.

Таким образом, по условию (21) и утверждению 3.6 справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7. Логарифмическая сингулярность отсутствует одновременно в функциях Грина для $F[u]$ и ${}^*F[v]$ при выполнении принципа Гюйгенса для $F[u]$ (9) и появляется в них при нарушении этого принципа.

Утверждения 2.7, 3.3, 3.5 и 3.7 в совокупности доказывают утверждения 3.1 и 3.2. При этом наиболее ограничительными являются утверждение 3.5, выделяющее размерность $n = 4$, и требование форминвариантности.

Отметим, что симметричная по аргументам функция Грина является решением однородного (т.е. без дельта-функционального члена) волнового уравнения и в пространстве Минковского M_4 при $m = 0$ имеет вид

$$G(x, x') = -\frac{1}{2\pi^2[(t - t')^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2]}.$$

Функцию G и ее аналоги во многих классах задач можно получить усреднением антикоммутатора квантованного скалярного поля по (мгновенному) вакуумному состоянию [8], [13] (другие квантово-полевые функции Грина в M_4 с $m = 0$ могут дополнительно обладать дельта-функциональной особенностью на световом конусе).

Как явствует из вышеизложенного, указанное для частной квантово-полевой модели [8] наличие логарифмической особенности G при всех ξ , кроме $\xi = \xi_c$, является общей закономерностью.

4. УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА И ЕГО КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Допустим, что мы имеем волновое уравнение Клейна–Гордона–Фока в пространстве Минковского с метрикой $\eta_{\mu\nu}$ для функции u

$$\square u + m^2 u = 0 \quad (22)$$

и хотим получить уравнение для функции $\varphi = S(x)u$. Из сравнения с (6) видим, что $S(x)u = \varphi(x|H)$ при $H = S^{-2/(n-2)}$. Теперь, пользуясь (8) при $Q = m^2$, получим уравнение для φ , являющееся следствием (22):

$$\Delta[\xi_c, \eta S^{-4/(n-2)}]\varphi + m^2 S^{4/(n-2)}\varphi = 0. \quad (23)$$

Подчеркнем, что переход от (22) к (23) с оператором, соответствующим метрике $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} S^{-4/(n-2)}$ и включающим член $\xi_c \tilde{R}$, есть автоматическое следствие замены функции u на φ .

Принципиально иначе обстоит дело, если волновое уравнение изначально определяется в искривленном пространстве $\mathbf{g}$. Теперь при любом значении m^2 необходимо принять гипотезу о конкретном значении $\xi = \xi_c$ (или другом); кроме того, при $m \neq 0$ дополнительно требуется постулировать значение H в пространстве $\mathbf{g}$. Фактически уравнение Клейна–Гордона–Фока всегда применяется в виде [8], [13]

$$\Delta[\xi, \mathbf{g}] + m^2 u = 0. \quad (24)$$

Это значит, что каждый раз объявляется $H = 1$ именно в том пространстве, в котором решается данная задача. При переходе к L_n с другой метрикой уравнение (24) преобразуется согласно (16). В случае $\xi = \xi_c$ получим уравнение (8) с $Q = m^2$.

Отдельный физический интерес представляют явления, возникающие при выходе из класса k -пустых пространств. Справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. В пространствах L_n с $n \geq 4$, не являющихся k -пустыми, существует k -инвариантное, но не форминвариантное волновое уравнение типа Клейна–Гордона–Фока при любом значении массы. Оно имеет вид (24) в пространстве $\tilde{L}_n$, в котором совпадают конформная группа и группа изометрии и уравнение (8) обычным образом преобразуется при конформных изменениях L_n .

K -инвариантность введена выше в разделе 3, а форминвариантность – в разделе 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. При $n < 4$ то же верно для всех пространств, кроме k -плоских.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. Уравнения (24) при $m \neq 0$ и $m = 0$ не являются эквивалентными (в смысле (12), (13)).

Пусть справедлива также гипотеза [4], сформулированная в следующем виде.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. В условиях выполнения утверждения 4.1 принцип Гюйгенса не выполняется при всех m^2 , включая $m = 0$ (и всех n).

Тогда совокупность утверждений 4.1–4.4 вместе с 3.1 и 3.2 охватывает все варианты линейного волнового уравнения. Обоснование утверждений 4.1–4.3 связано с исчезновением единственности k -инвариантного уравнения в L_n с ТКГ (см. [4], с. 99).

Определяющие уравнения для (9) имеют вид

$$\text{а) } \zeta^\alpha(x) \frac{\partial C}{\partial x^\alpha} + \mu(x)C = 0, \quad \text{б) } \mathcal{L}g_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}, \quad (25)$$

где $\mathcal{L}$ – производная Ли относительно группы G_x . В пространстве L_n с ТКГ всегда можно перейти к $\tilde{L}_n$ такому, что в нем k -группа совпадает с группой изометрий, для которой $\mathcal{L}g_{\alpha\beta} = 0$, так что $\tilde{\mu} = 0$. При $\tilde{\mu} = 0$ уравнение (25а) тривиально удовлетворяется при любом $\tilde{C} = \text{const}$, а для (24) в $\tilde{L}_n$ имеем как раз $\tilde{C} = m^2 = \text{const}$. Возврат к исходному L_n выполняется преобразованиями (16), при которых $\tilde{C} = m^2 = 0$ переходит в $C = 0$, а $\tilde{C} = m^2 \neq 0$ – в $C \neq 0$. Вместе с утверждением 2.1 это доказывает утверждения 4.1–4.3.

При $m \neq 0$ форминвариантных уравнений нет во всех пространствах L_4 (и вообще в V_n). В k -пустых L_4 , обозначаемых L_{emp} , нет k -инвариантного уравнения. В $\bar{L}_{\text{emp}}$ такое уравнение имеется для каждого значения m , причем определяется весьма сложно. А именно, заданное $L_4^{(0)} \in \bar{L}_{\text{emp}}$ входит в класс $\{L_4^{(0)}\}$ конформных ему пространств, имеющих равные инварианты (11) для всех представителей. Среди них есть L_4 с метрикой $\mathbf{g}_{\text{iso}}[\{L_4^{(0)}\}]$, для которого совпадают группы изометрии и конформная группа. Тогда в классе $\{L_4^{(0)}\}$ k -инвариантное (но не форминвариантное) уравнение и инвариант C (13) имеют вид

$$(\Delta[\xi_c, \mathbf{g}] + C)\varphi = 0; \quad C = m^2 H^{-2}, \quad \mathbf{g} = H^2 \mathbf{g}_{\text{iso}}[\{L_4^{(0)}\}].$$

Здесь мы имеем третий вариант появления уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с выделенным $\xi = \xi_c$, отличный как от (23), так и от (24).

Таким образом, при $m^2 \neq 0$ явно расщепляются понятия форм- и k -инвариантности, так что введение понятия форминвариантности действительно целесообразно.

5. ВЫВОДЫ

Проведенное выше рассмотрение позволяет выдвинуть ряд утверждений общего характера, являющихся аргументами, свидетельствующими о необходимости подстановки именно конформного значения ξ в волновое уравнение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *В случае $m = 0$, т.е. собственно волнового уравнения, характерным отличительным свойством волнового уравнения в плоском пространстве является наличие заднего волнового фронта от локализованного в пространстве и времени источника при четных $n > 4$. Требование сохранения этого свойства выделяет форминвариантное и k -инвариантное уравнение с $\xi = \xi_c$ (в k -пустых L_n).*

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Как видно из (13), (15), (17), (19), важнейшей характеристикой уравнения является инвариант C . При выборе $\xi = \xi_c$, и только при нем, волновое уравнение с $m = 0$ в любом L_n имеет абсолютный инвариант $C \equiv 0$ и в этом смысле является реализацией одного уравнения (класса эквивалентности) в разных L_n .*

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. *В работе [14] был развит метод определения эффективной температуры вакуума $T_{\text{эф}}$ посредством сравнения симметричной функции Грина G данного многообразия и термодинамической функции Грина $G_{\text{ТМ}}$ пространства Минковского. Необходимые условия применимости метода – одинаковый характер сингулярностей в G и $G_{\text{ТМ}}$ и, следовательно, отсутствие в G логарифмического члена вида (21), поскольку его нет в $G_{\text{ТМ}}$. Для скалярного поля этот метод привел к тем же значениям $T_{\text{эф}}$, что и полученные другими методами [13] во всех случаях, включая ускоренные системы отсчета, черные дыры и т.п. [3], [14]. При этом использовалось конформное значение $\xi_c = 1/6$. Как теперь ясно из утверждений 3.1 и 3.2, такой выбор единственный, исключаящий $\ln \Gamma$ в (21) и обеспечивающий применимость метода, так что $T_{\text{эф}}$ не определена при $\xi_c \neq 1/6$. В то же время для конформно-инвариантного электромагнитного поля такой проблемы нет. Поэтому при $\xi \neq \xi_c$ окажется, что $T_{\text{эф}}$ существует для одних и не существует для других полей, что обесценило бы само понятие эффективной температуры вакуума.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. *В [15] был развит метод пространственно-временного описания рождения частиц, основанный на изучении корреляционной функции операторов рождения локализованных состояний квазичастиц для разных типов полей, причем для скалярного считалось $\xi = \xi_c$. Качественно разное поведение K хорошо соответствует наличию реальных частиц, виртуальных пар и конденсата [8], [15]. Выбор другого значения ξ изменяет поведение K , как и G , что может нарушать указанное соответствие.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.5. *Для простейшего варианта искривленного пространства $L_n = \mathbb{R}_T^1 \times S^{n-1}$, где $\mathbb{R}_T^1$ – временная прямая, S^{n-1} – сфера единичного радиуса,*

имеем $R = -(n-2)(n-1)$, и уравнение (18) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left[\Delta_{n-1}(\Omega) - \frac{(n-2)^2}{4} \right] \varphi = 0, \quad (26)$$

где $\Delta_{n-1}(\Omega)$ – оператор Лапласа на S^{n-1} . Квадратная скобка в уравнении (26) совпадает с оператором $\Delta_{n-1}(\Omega, \Lambda_c)$ из (П.4), который будет получен ниже как один из вариантов ограничения лапласиана из $\mathbb{R}^n$ на S^{n-1} , при котором $\mathbb{R}^n$ преобразуется к $\mathbb{R}^1 \times S^{n-1}$, т.е. к тому же глобальному виду, что и L_n . Таким образом, появление члена ξR с $\xi = 0$ или $\xi = \xi_c$ в волновом уравнении можно трактовать как следствие способа ограничения на искривленное пространство дифференциального оператора, истотно определенного однозначно в обьемлющем плоском пространстве.

Как будет показано в приложении, именно k -вариант ограничения, соответствующий $\xi = \xi_c$, является оптимальным для нерелятивистского ВКБ-приближения. То же верно и для релятивистского ВКБ-приближения, в котором только при $\xi = \xi_c$ частицы движутся по геодезическим [1], [5].

Как известно, проверка глобального выполнения принципа Гюйгенса является для пространств с нетривиальной топологией отдельной задачей; на S^{n-1} это выполнение имеет место для уравнений (18), (26), т.е. $\xi = \xi_c$ [4]. Таким образом, свойства решений волнового уравнения свидетельствуют в пользу конформного $\xi = \xi_c$ своим поведением в трех аспектах: чисто локальном (особенности функций Грина), “в малом” (принцип Гюйгенса, изучавшийся в разделе 3) и “в большом” (глобальный принцип Гюйгенса).

Связь конформной инвариантности с массой является более сложной, чем обычно считается в физической литературе. Именно, за пределами k -пустых L_4 теряется единственность конформно-инвариантного волнового уравнения при $m = 0$, а также появляется таковое уравнение при всех $m \neq 0$, причем только при $\xi = \xi_c$. Сохраняют также силу соображения, связанные с ограничением оператора, что фиксирует то же значение ξ_c .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим уравнение типа Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta_n \varphi + P^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\Delta_{n-1}(\Omega) \varphi}{r^2} + P^2 \varphi = 0, \quad (\text{П.1})$$

где $\Delta_{n-1}(\Omega)$ – угловая часть оператора Лапласа на S^{n-1} , P – функция координат. Поставим целью перейти от сферических координат (r, Ω) , где Ω – совокупность $n-1$ угловых переменных, к (ρ, Ω) , где новая радиальная переменная обеспечивает отсутствие первой производной по ρ и независимость от ρ угловой части метрики. Это определяет новую метрику $d\tilde{l}^2$. Сравнением ее со старой dl^2 найдем параметры преобразования эквивалентности

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 = H^{-2} d\tilde{l}^2 = H^{-2} (d\rho^2 + d\Omega^2), \quad (\text{П.2})$$

откуда следует $\rho = \ln r$, $H = e^{-\rho}$.

Оператор (П.1) в метрике $d\tilde{l}^2$ получим из (16) при $P^2 = c$, $R = 0$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \Delta_{n-1}(\Omega, \Lambda_c) + P^2 e^{2\rho} \right] \varphi = 0, \quad \Lambda_c = -(n-2)^2/4, \quad (\text{П.3})$$

$$\Delta_{n-1}(\Omega, \Lambda) \equiv \Delta_{n-1}(\Omega) + \Lambda, \quad (\text{П.4})$$

где в $\xi_c(n) \tilde{R}$ подставлено $\tilde{R} = -(n-1)(n-2)$ из метрики $d\tilde{l}^2$. При $n = 3$ переход от (П.1) к (П.3) является обобщением известного лангеровского преобразования. Последнее, будучи существенно одномерным, представляет композицию известных преобразований (см. [11], § 2.1) и может быть выполнено только при $P = P(r)$ для собственных функций оператора $\Delta_{n-1}(\Omega)$, так что при $n = 3$ собственные значения $\Delta_2(\Omega)\psi = -l(l+1)\psi$. Однако в (П.3) входит $\Delta_2(\Omega, -1/4)\psi = -\lambda^2\psi$, что приводит к известной замене

$$L^2 = l(l+1) \longrightarrow \lambda^2 = \left(l + \frac{1}{2} \right)^2.$$

В уравнении Шредингера (П.3) еще содержится k -неинвариантный член $P^2 e^{2\sigma}$, где P – классический импульс. Хотя точные спектры, вычисленные в исходном уравнении с L^2 и преобразованном с λ^2 , разумеется, совпадают, вид его (П.3) с λ^2 приводит к более точному и удобному основному квазиклассическому приближению для $P = P(r)$ и, в частности, в ряде ситуаций обеспечивает асимптотическое поведение фаз и решений, совпадающее с полученным из точных решений (см. [16], § 49). Добавим, что k -преобразованное уравнение позволяет развить конструктивные способы получения приближенного спектра, ввести эффективное квантовое число для любых центрально-симметричных систем, автоматически выявляет сопряженность кулоновского и осцилляторного потенциалов и т.д. [17].

Эти преимущества объясняются максимально возможным сходством координат (ρ, Ω) с декартовыми: в метрике $d\tilde{s}^2$ (П.2) координата ρ – гармоническая (см. [18], с. 197): $\Gamma^\rho = 0$, и имеется поле параллельных векторов (см. [19], § 23), все сечения $\rho = \text{const}$ идентичны, геометрия R_3 заменена на $R_1 \times S^2$, т.е. полуось с особенностью в $r = 0$ заменена осью R_1 . Аналогичная процедура на S^2 приводит к известной для ВКБ-метода координате $\eta = \ln[\text{tg}(\theta/2)]$ [20].

Инвариант C (13), (14) позволяет легко получать и другие преобразования оператора. Например, исключение в (П.1) первой производной по r , согласно (9), означает введение $\tilde{a}^r = \tilde{a}_r = (n-1)/r$ с сохранением метрики, т.е. $H = 1$, $\tilde{R} = R = 0$. В итоге исчезновение члена с $\partial\varphi/\partial r$ в (П.1) сопровождается заменой $\Delta_{n-1}(\Omega) \rightarrow \Delta_{n-1}(\Omega, \Lambda')$ с $\Lambda' = -(n-1)(n-3)/4$. Расчет с помощью C позволяет сосредоточить внимание на операторе; конечно, и сама функция преобразуется, так что обозначение ее одной буквой условно (ср. с разделом 1).

Эквивалентность преобразованных операторов гарантировалась сохранением – с учетом (14) – инварианта C , связанного со всеми переменными. Положение изменяется при ограничении дифференциального оператора из (П.1) на сферу S^{n-1} , для определенности единичного радиуса. Отбрасывая радиальные производные и полагая $r = 1$ или

$\rho = 0$, приходим к семейству операторов $\Delta_{n-1}(\Omega, \Lambda)$. Значение Λ зависит от “предыстории”, т.е. вводимых нарушений ковариантности ($\tilde{a}^\alpha \neq 0$) и изменений метрики ($H \neq 1$, $\tilde{R} \neq 0$). Информация о преобразованиях, вообще говоря, в $\Delta_{n-1}(\Omega, \Lambda)$ утрачена, кроме физически выделенных ситуаций, включающих не более одного из указанных выше изменений. Таковы $\Lambda = 0$ (никаких преобразований), а также $\Lambda = \Lambda'$ или $\Lambda = \Lambda_c$.

Благодарности. Авторы благодарны А. А. Лобашеву за полезные замечания и содействие при подготовке статьи к печати.

Список литературы

- [1] N. A. Chernikov, E. A. Tagirov. Ann. Inst. H. Poincaré. A. 1968. V. 9. P. 109.
- [2] С. Г. Мамаев, Н. Н. Трунов. ТМФ. 1979. Т. 38. С. 345.
- [3] В. М. Мостепаненко, Н. Н. Трунов. Эффект Казимира и его приложения. М.: Энергоатомиздат, 1990.
- [4] Н. Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- [5] A. A. Grib, E. A. Poberii. Helv. Phys. Acta. 1995. V. 68. P. 380.
- [6] I. H. Redmount. Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 104004.
- [7] J. Lindig. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 064011.
- [8] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Атомиздат, 1988.
- [9] Ю. В. Павлов. ТМФ. 2001. Т. 126. № 1. С. 115.
- [10] Л. В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [11] М. Б. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [12] Ж. Адамар. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
- [13] Н. Д. Биррел, П. Девис. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
- [14] С. Г. Мамаев, Н. Н. Трунов. ЯФ. 1981. Т. 34. С. 1142.
- [15] С. Г. Мамаев, Н. Н. Трунов. ЯФ. 1983. Т. 37. С. 1603.
- [16] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. М.: Наука, 1980.
- [17] А. А. Лобашев, Н. Н. Трунов. ТМФ. 1999. Т. 120. № 1. С. 99; 2000. Т. 124. № 3. С. 463.
- [18] В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматиздат, 1961.
- [19] Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. М.: Иностранная литература, 1948.
- [20] Н. Н. Трунов, К. С. Мамаева. Конформные преобразования метрики и оптимизация метода ВКБ. В сб.: X Российская гравитационная конференция. Владимир, 20–27 июня, 1999. Тезисы докладов. М.: Российское гравитационное общество, 1999. С. 209.

Поступила в редакцию 31.I.2002 г.,
после доработки 13.V.2002 г.