Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Горбатенко, Получение методом Эйнштейна–Инфельда–Гоффмана уравнений движения заряженных частиц в $(v/c)^3$ -приближении, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 1, 160–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:34:25

ПОЛУЧЕНИЕ МЕТОДОМ
ЭЙНШТЕЙНА–ИНФЕЛЬДА–ГОФФМАНА
УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ
ЧАСТИЦ В $(v/c)^3$ -ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассматриваются некоторые принципиальные вопросы методического характера, возникающие при использовании метода Эйнштейна–Инфельда–Гоффмана для нахождения приближенных решений уравнений общей теории относительности и получения информации относительно движения частиц, силы взаимодействия между которыми намного превосходят силу гравитационного притяжения. К числу таких вопросов относятся нормировка приближенных выражений по разложениям точных решений, записанных с использованием тех же координатных условий, которые используются и в методе Эйнштейна–Инфельда–Гоффмана; расстановка порядков малости в зависимости от соотношения между используемыми параметрами малости; проверка сокращения появляющихся в поверхностных интегралах расходящихся членов. Решение перечисленных вопросов в соответствии с внутренней логикой метода Эйнштейна–Инфельда–Гоффмана ведет к новым приемам и способам применения метода. Эти приемы и способы демонстрируются на примере задачи о движении двух электрически заряженных точечных частиц в $(v/c)^3$ -приближении.

Ключевые слова: метод Эйнштейна–Инфельда–Гоффмана, уравнения движения в постпост-кулоновском приближении, сила радиационного трения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод Эйнштейна–Инфельда–Гоффмана (ЭИГ) [1], [2] обладает уникальными возможностями. С помощью этого метода можно, решая уравнения общей теории относительности (ОТО), получать информацию относительно движения частиц¹⁾, силы взаимодействия между которыми имеют негравитационную природу и намного превосхо-

---

¹⁾ Под “частицами” (точечными телами, частицами-сингулярностями) будем понимать точечные материальные объекты, при рассмотрении взаимодействий между которыми внутренняя структура описывается конечным набором физических параметров (масса, угловой момент, электрический заряд и т.д.).

---

*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Нижегородская обл., Россия. E-mail: gorbatenko@vniief.ru

дят силу гравитационного притяжения. Например, сила кулоновского притяжения в электрически связанной системе может превосходить ньютоновскую силу на 40 порядков. Тем не менее, такое соотношение между силами не является препятствием для получения методом ЭИГ уравнений Дарвина – уравнений самосогласованного движения заряженных частиц в $(v/c)^2$ -приближении (c – скорость света, v – характерная относительная скорость частиц).

Метод ЭИГ – это не простой метод теории возмущений. Из-за специфической структуры линейных членов со вторыми производными в левой (гравитационной) части уравнений ОТО метод ЭИГ позволяет последовательно во все более высоких порядках малости находить явный вид искомых функций и одновременно устанавливать ограничения, обусловленные нелинейностью системы уравнений ОТО, и возникающие отсюда условия согласования. Указанные ограничения имеют смысл уравнений движения частиц, а условия согласования – перенормировочных поправок к физическим параметрам, характеризующим частицы, и динамических уравнений для этих физических параметров. По существу, метод ЭИГ позволяет исследовать новый, еще не в полной мере исследованный механизм влияния гравитации на частицы, не сводящийся к простому силовому воздействию и носящий скорее кинематический характер. При этом совершенно несущественным оказывается тип полей (гравитационные, электромагнитные, поля Янга–Миллса, биспинорные, скалярные и т.д.), из которых сконструирован тензор энергии–импульса $T_{\alpha\beta}$. Существенно лишь, чтобы рассматриваемые частицы были точечными сингулярностями полей, и чтобы были малы используемые в методе параметры малости (в частности, чтобы выполнялось условие $(v/c) \ll 1$).

В первоначальной формулировке в работах [1], [2] метод ЭИГ применялся к уравнениям ОТО с нулевым тензором энергии–импульса $T_{\alpha\beta}$; параметрами, характеризующими внутреннюю структуру частиц, были только массы. В последующем метод ЭИГ был применен к частицам с ненулевыми собственными угловыми моментами, а также к ситуациям, описываемым $T_{\alpha\beta} \neq 0$. Расширение области применения метода ЭИГ потребовало его дальнейшего развития. Так, в работе [3] для использования метода потребовалось обобщить его на ситуацию с двумя параметрами малости. В работе [4] было обращено внимание на то, что для гарантии самосогласованности выполняемых по методу ЭИГ процедур необходимо при получении поверхностных интегралов вычислять не только конечные части интегралов, но и расходящиеся выражения, и убеждаться в автоматическом исчезновении последних. В работе [5] показана необходимость использования одних и тех же координатных условий при нормировке получаемых методом ЭИГ выражений по разложениям точных решений уравнений ОТО. Были получены и другие результаты, так или иначе связанные с усовершенствованием метода ЭИГ.

Метод ЭИГ позволяет получать сравнительно просто результаты в низших порядках малости. Однако в более высоких порядках малости не только возрастает объем работы, но и приходится сталкиваться с необходимостью решения принципиальных вопросов методического характера. К числу последних относятся следующие вопросы.

1. Нужно ли при нормировке получаемых методом ЭИГ выражений по разложениям точных решений согласовывать координатные условия в обоих типах разложений?

2. Могут ли при вычислении поверхностных интегралов при нахождении условий согласования появляться расходящиеся члены и, если могут, нужно ли убеждаться в их результирующем обращении в нуль?

3. Следует ли в разложениях пользоваться только четными (нечетными) порядками малости, или нужно рассматривать все? Если следует, то с какого порядка малости нужно это делать?

4. Меняется ли характер расстановки порядков малости полевых величин при изменении соотношения между параметрами малости в ситуациях, описываемых несколькими параметрами малости?

Перечисленные вопросы носят общий характер, однако во многих работах они либо не рассматриваются, либо решаются неправильно. В подтверждение приведем цитату из монографии [6] (с. 261), касающуюся ситуации с получением динамических уравнений для спинов частиц: “Полученные в этих работах²⁾ уравнения вращательного³⁾ движения не согласуются полностью ни между собой, ни с уравнениями, данными выше”. От себя добавим, что основную роль в создании такой ситуации сыграл разноречивый именно в тех методических вопросах, которые являются главными в данной работе.

Цель данной работы – демонстрация в действии новых приемов и способов решения принципиальных вопросов методического характера, возникающих при использовании метода ЭИГ для решения нетрадиционных задач. В качестве тестовой выбрана задача о получении уравнений движения двух заряженных частиц в посткулоновском (ПК) и постпосткулоновском (ППК) приближениях. С одной стороны, такая задача относится к категории нетрадиционных, поскольку в ней $T_{\alpha\beta} \neq 0$. Это позволяет отметить ряд особенностей применения метода, которые могут быть существенными при применении метода для решения других нетрадиционных задач. С другой стороны, в литературе, по нашему мнению, отсутствует изложение решения нашей тестовой задачи не средствами электродинамики, а методом ЭИГ. Имеется в виду такое изложение, в котором были бы правильно решены все возникающие вопросы методического характера. Поэтому результаты представляют и самостоятельную ценность.

2. ПАРАМЕТРЫ МАЛОСТИ. РАЗЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим систему из двух частиц. Координаты частиц обозначим через ξ_k, η_k . Пусть x_k – координата точки наблюдения; введем обозначения $X_k = x_k - \xi_k$, $R_k = \eta_k - \xi_k$, $r_1 = \sqrt{X_l X_l}$, $r_2 = \sqrt{(x_l - \eta_l)(x_l - \eta_l)}$, $R = \sqrt{R_l R_l}$; $\tilde{M}, \tilde{m}, \tilde{Q}, \tilde{q}$ – массы и электрические заряды первой и второй частиц, соответственно. Напомним, что геометрические величины M, m, Q, q имеют размерность длины и связаны с соответствующими физическими величинами $\tilde{M}, \tilde{m}, \tilde{Q}, \tilde{q}$ соотношениями

$$M = \frac{G\tilde{M}}{c^2}, \quad m = \frac{G\tilde{m}}{c^2}, \quad Q = \frac{\sqrt{G}\tilde{Q}}{c^2}, \quad q = \frac{\sqrt{G}\tilde{q}}{c^2}. \quad (1)$$

Здесь $[\tilde{M}] = \text{г}$, $[\tilde{Q}] = \text{г}^{1/2} \text{ см}^{3/2} / \text{с}$, $[G] = \text{см}^3 / \text{г} \text{ с}^2$, $[c] = \text{см} / \text{с}$.

²⁾ Имеются в виду работы, указанные в списке литературы монографии [6].

³⁾ Имеются в виду уравнения, приведенные ранее в монографии [6].

2.1. Параметры малости. Модификация метода ЭИГ, которая применяется в данной работе, предполагает использование двух параметров малости. Один из них – $\lambda \sim v/c$ – совпадает с параметром, использовавшимся в работах [1], [2]. Этот параметр по определению имеет первый порядок малости и характеризует отношение скорости изменения величин со временем к скорости изменения в пространстве. Поэтому при дифференцировании величин по времени порядок малости повышается на единицу.

Для введения второго параметра малости предположим, что выполняется неравенство

$$M \ll Q. \quad (2)$$

Тогда второй параметр малости определяется как

$$\frac{M}{Q} \sim \lambda^N. \quad (3)$$

Здесь N – целое неотрицательное число. Вместо параметра (3) удобно использовать величину N . Параметр (3) является малым лишь при $N \geq 1$.

Численные значения λ и N зависят от конкретной физической ситуации. Для нахождения λ необходимо задать не только величины M и Q , но и характерный размер системы r . Зная λ , а также M и Q , по формуле (3) находим N . Динамические уравнения для системы заряженных тел (аналог уравнений Дарвина) в той форме, в какой они будут получены (т.е. без электрогравитационных эффектов), будут справедливы до тех пор, пока $N > 2$.

По порядку малости величины M/r , m/r , Q/r , q/r можно оценить как

$$\frac{M}{r} \sim \lambda^{2N+2}, \quad \frac{m}{r} \sim \lambda^{2N+2}, \quad \frac{Q}{r} \sim \lambda^{N+2}, \quad \frac{q}{r} \sim \lambda^{N+2}. \quad (4)$$

2.2. Расстановка порядков малости. В методе ЭИГ обычно вместо компонент метрики $g_{\alpha\beta}$ используются функции $\gamma_{\alpha\beta}$, определяемые соотношениями

$$\gamma_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}[\eta^{\mu\nu}(g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})]. \quad (5)$$

Здесь $\eta_{\alpha\beta}$ – метрика фонового плоского пространства. Будем предполагать, что в фоновом пространстве используется декартова система координат, так что

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (6)$$

От расстановки порядков малости M/r , m/r , Q/r , q/r необходимо перейти к расстановке порядков малости величин γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} , а также A_0 , A_k . В данной работе

предполагается следующая расстановка порядков малости (4) в терминах величин $\gamma_{\alpha\beta}$ и A_α :

$$\begin{aligned}\gamma_{00} &= \gamma_{2N+2}^{00} + \gamma_{2N+4}^{00} + \gamma_{2N+5}^{00} + \dots, \\ \gamma_{0k} &= \gamma_{2N+3}^{0k} + \gamma_{2N+5}^{0k} + \gamma_{2N+6}^{0k} + \dots,\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{mn} &= \gamma_{2N+4}^{mn} + \gamma_{2N+5}^{mn} + \gamma_{2N+6}^{mn} + \dots; \\ A_0 &= A_{N+2}^0 + A_{N+4}^0 + A_{N+5}^0 + \dots, \\ A_k &= A_{N+3}^k + A_{N+5}^k + A_{N+6}^k + \dots.\end{aligned}\quad (8)$$

При выполнении (8) разложения компонент тензора Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned}F_{0k} &= F_{N+2}^{0k} + F_{N+4}^{0k} + F_{N+5}^{0k} + \dots, \\ F_{mn} &= F_{N+3}^{mn} + F_{N+5}^{mn} + \dots.\end{aligned}\quad (9)$$

В (7), (8) указаны порядки малости только первых членов разложения функций $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α . В низших порядках малости разложения функций γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} начинаются с порядков малости $2N+2$, $2N+3$, $2N+4$, а функций A_0 , A_k — с порядков $N+2$, $N+3$. При этом в разложениях γ_{00} , γ_{0k} пропущены члены порядков $2N+3$, $2N+4$, а в разложениях A_0 , A_k — члены порядков $N+3$, $N+4$.

Может показаться, что расстановка порядков малости (7), (8) содержит произвол, однако это не так. Дело в том, что при конструировании функций $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α в различных порядках малости мы можем использовать в качестве “строительного материала” параметры (4), компоненты радиус-вектора R_k , а также производные по времени различного порядка координат частиц ξ_k , η_k . Конструкция членов, включаемых в функции $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α , должна удовлетворять ряду требований: иметь нужный порядок малости; быть безразмерной; иметь необходимые тензорные свойства; в совокупности с другими членами удовлетворять динамическим уравнениям, калибровочным и координатным условиям; согласовываться с разложением точного решения; не сводиться к вариациям Ли; убывать при удалении частиц друг от друга. Например, величину γ_{2N+3}^{00} , если бы она была записана в разложении γ_{00} , в принципе невозможно было бы сконструировать с соблюдением перечисленных требований.

Заметим, что правильность разложений (7), (8) может быть обоснована апостериори, т.е. путем фактического построения величин γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} , A_0 , A_k в каждом порядке малости. Если процедура построения оказывается возможной, значит, в каждом порядке малости корректно ставится задача Коши, и все операции являются взаимно согласованными. Излагаемая далее процедура построения величин γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} , A_0 , A_k фактически является доказательством правильности принятых в рассмотрении разложений (7), (8).

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, КООРДИНАТНЫЕ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

3.1. Динамические уравнения. Уравнения ОТО запишем в виде

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(\eta^{\mu\nu}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\right). \quad (10)$$

Если ввести обозначения

$$[\text{LS}; \alpha\beta] \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}), \quad (11)$$

$$[\text{RS}; \alpha\beta] \equiv \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(\eta^{\mu\nu}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\right), \quad (12)$$

то уравнения (10) примут вид

$$[\text{LS}; \alpha\beta] = [\text{RS}; \alpha\beta]. \quad (13)$$

Здесь не будут выводиться выражения для $[\text{LS}; \alpha\beta]$ и $[\text{RS}; \alpha\beta]$ в каждом порядке малости. Приведем явный вид динамических уравнений:

$$[00; \lambda^{2N+2}] : -\frac{1}{2}(\Delta_{2N+2} \gamma_{00}) = 0, \quad (14)$$

$$[00; \lambda^{2N+4}] : -\frac{1}{2}\Delta_{2N+4} \gamma_{00} + \frac{1}{2}\gamma_{2N+4}^{pq,pq} = 2\frac{1}{2}F_{N+2}^{0p}F_{N+2}^{0p}, \quad (15)$$

$$[00; \lambda^{2N+5}] : -\frac{1}{2}\Delta_{2N+5} \gamma_{00} + \frac{1}{2}\gamma_{2N+5}^{pq,pq} = 0, \quad (16)$$

$$[0k; \lambda^{2N+3}] : -\frac{1}{2}(\Delta_{2N+3} \gamma_{0k}) + \frac{1}{2}(-\gamma_{2N+2}^{00,0}_1 + \gamma_{2N+3}^{0s,s})_{,k} = 0, \quad (17)$$

$$[0k; \lambda^{2N+5}] : \frac{1}{2}\left\{-\Delta_{2N+5} \gamma_{0k} + (-\gamma_{2N+4}^{00,0}_1 + \gamma_{2N+5}^{0s,sk}) + \gamma_{2N+4}^{ks,0}_1\right\} = \\ = 2\left(F_{N+2}^{0p}F_{N+3}^{kp}\right), \quad (18)$$

$$[0k; \lambda^{2N+6}] : \frac{1}{2}\left\{-\Delta_{2N+6} \gamma_{0k} + (-\gamma_{2N+5}^{00,0}_1 + \gamma_{2N+6}^{0s,sk}) + \gamma_{2N+5}^{ks,0}_1\right\} = 0, \quad (19)$$

$$[mn; \lambda^{2N+4}] : \frac{1}{2}\left\{(-\gamma_{2N+3}^{0m,0}_1 + \gamma_{2N+4}^{ms,sn}) + (-\gamma_{2N+3}^{0n,0}_1 + \gamma_{2N+4}^{ns,sm}) - \right. \\ \left. - \Delta_{2N+4} \gamma_{mn} - \delta_{mn}(\gamma_{2N+2}^{00,00} - 2\gamma_{2N+3}^{0s,0}_1 + \gamma_{2N+4}^{pq,pq})\right\} = \\ = 2\left\{-F_{N+2}^{0m}F_{N+2}^{0n} + \frac{1}{2}\delta_{mn}(F_{N+2}^{0p}F_{N+2}^{0p})\right\}, \quad (20)$$

$$[mn; \lambda^{2N+5}] : \frac{1}{2}\left\{\gamma_{2N+5}^{ms,sn} + \gamma_{2N+5}^{ns,sm} - \Delta_{2N+5} \gamma_{mn} - \delta_{mn}\gamma_{2N+5}^{pq,pq}\right\} = 0, \quad (21)$$

$$[mn; \lambda^{2N+6}] : \frac{1}{2}\left\{(-\gamma_{2N+5}^{0m,0}_1 + \gamma_{2N+6}^{ms,sn}) + (-\gamma_{2N+5}^{0n,0}_1 + \gamma_{2N+6}^{ns,sm}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma}{2N+4} mn, {}^{00}_{11} - \Delta \frac{\gamma}{2N+6} mn - \\
& - \delta mn \left(\frac{\gamma}{2N+4} {}^{00,00}_{11} - 2 \frac{\gamma}{2N+5} {}^{0s,0s}_1 + \frac{\gamma}{2N+6} pq, pq \right) \Big\} = \\
& = 2 \left\{ - \frac{F}{N+2} {}^{0m}_{N+4} \frac{F}{N+4} {}^{0n}_{N+4} - \frac{F}{N+2} {}^{0n}_{N+4} \frac{F}{N+4} {}^{0m}_{N+4} + \frac{F}{N+3} {}^{mp}_{N+3} \frac{F}{N+3} {}^{np}_{N+3} + \right. \\
& \left. + \delta mn \left[\frac{F}{N+2} {}^{0p}_{N+4} \frac{F}{N+4} {}^{0p}_{N+4} - \frac{1}{4} \frac{F}{N+3} {}^{pq}_{N+3} \frac{F}{N+3} {}^{pq}_{N+3} \right] \right\}, \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[mn; \lambda^{2N+7}] : & \frac{1}{2} \left\{ \left(- \frac{\gamma}{2N+6} {}^{0m,0n}_1 + \frac{\gamma}{2N+7} {}^{ms,sn} \right) + \left(- \frac{\gamma}{2N+6} {}^{0n,0m}_1 + \frac{\gamma}{2N+7} {}^{ns,sm} \right) + \right. \\
& + \frac{\gamma}{2N+5} mn, {}^{00}_{11} - \Delta \frac{\gamma}{2N+7} mn - \\
& - \delta mn \left(\frac{\gamma}{2N+5} {}^{00,00}_{11} - 2 \frac{\gamma}{2N+6} {}^{0s,0s}_1 + \frac{\gamma}{2N+7} pq, pq \right) \Big\} = \\
& = 2 \left\{ - \frac{F}{N+2} {}^{0m}_{N+5} \frac{F}{N+5} {}^{0n}_{N+5} - \frac{F}{N+2} {}^{0n}_{N+5} \frac{F}{N+5} {}^{0m}_{N+5} + \delta mn \left(\frac{F}{N+2} {}^{0p}_{N+5} \frac{F}{N+5} {}^{0p}_{N+5} \right) \right\}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в выражениях для $[\text{LS}; \alpha\beta; \lambda_k]$ не содержатся ни квадратичные, ни кубические члены. Это является результатом принятой расстановки порядков малости (7). Ясно, что выражения $[\text{LS}; \alpha\beta; \lambda_k]$ не зависят от того, какой вид имеют выражения для $[\text{RS}; \alpha\beta; \lambda_k]$, а также от используемых координатных и калибровочных условий.

3.2. Уравнения для A_α . Уравнения Максвелла

$$g^{\mu\nu} F_{\lambda\mu;\nu} = 0, \quad (24)$$

хотя и являются следствием исходных уравнений ОТО, однако имеют удобный для нахождения вектора A_α вид. Поэтому запишем эти уравнения в явном виде:

$$[0; \lambda^{N+2}] : -\Delta \frac{A}{N+2} {}^0_0 = 0, \quad (25)$$

$$[k; \lambda^{N+3}] : -\Delta \frac{A}{N+3} {}^k_k + \left(\frac{A}{N+3} {}^{p,pk} - \frac{A}{N+2} {}^{0,k0} \right) = 0, \quad (26)$$

$$[0; \lambda^{N+4}] : -\Delta \frac{A}{N+4} {}^0_0 + \frac{A}{N+3} {}^{p,p0} = 0, \quad (27)$$

$$[k; \lambda^{N+5}] : -\Delta \frac{A}{N+5} {}^k_k + \left(\frac{A}{N+5} {}^{p,pk} - \frac{A}{N+4} {}^{0,k0} \right) + \frac{A}{N+3} {}^{k,00} = 0. \quad (28)$$

3.3. Гармонические координатные условия. При нахождении решений различного порядка используются условия де Дондера

$$\frac{\partial(\sqrt{-g(x)} g^{\lambda\sigma}(x))}{\partial x^\sigma} = 0, \quad (29)$$

которые записываются следующим образом:

$$[c.c.; \lambda^{2N+3}] : \quad \gamma_{2N+3}{}^{0l,l} = \gamma_{2N+2}{}^{00,0}_1, \quad (30)$$

$$[c.c.; \lambda^{2N+4}] : \quad \gamma_{2N+4}{}^{kl,l} = \gamma_{2N+3}{}^{0k,0}_1, \quad (31)$$

$$[c.c.; 0k; \lambda^{2N+5}] : \quad \gamma_{2N+5}{}^{0l,l} = \gamma_{2N+4}{}^{00,0}_1, \quad (32)$$

$$[c.c.; 0k; \lambda^{2N+6}] : \quad \gamma_{2N+6}{}^{0l,l} = \gamma_{2N+5}{}^{00,0}_1, \quad (33)$$

$$[c.c.; mn; \lambda^{2N+6}] : \quad \gamma_{2N+6}{}^{kl,l} = \gamma_{2N+5}{}^{0k,0}_1, \quad (34)$$

$$[c.c.; mn; \lambda^{2N+5}] : \quad \gamma_{2N+5}{}^{kl,l} = 0. \quad (35)$$

Координатные условия (30)–(35) в рассматриваемых порядках не содержат ни квадратичных, ни кубических членов.

3.4. Калибровочные условия. Используется калибровочное условие Лоренца

$$A^\nu{}_{;\nu} = 0, \quad (36)$$

имеющее ненулевые члены в порядках малости $N+3$, $N+5$, $N+6$:

$$[g.c.; \lambda^{N+3}] : \quad -A_{N+2}{}^{0,0} + A_{N+2}{}^{l,l} = 0, \quad (37)$$

$$[g.c.; \lambda^{N+5}] : \quad -A_{N+4}{}^{0,0} + A_{N+5}{}^{l,l} = 0, \quad (38)$$

$$[g.c.; \lambda^{N+6}] : \quad -A_{N+5}{}^{0,0} + A_{N+6}{}^{l,l} = 0. \quad (39)$$

4. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ НОРДСТРЕМА–РАЙССНЕРА

Метрика Нордстрема–Райсснера в гармонических координатах получена в книге [7], она имеет вид

$$ds^2 = - \left[\frac{r-m}{r+m} + \frac{Q^2}{(r+m)^2} \right] dt^2 + \left[\frac{r-m}{r+m} + \frac{Q^2}{(r+m)^2} \right]^{-1} dr^2 + (r+m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (40)$$

Считаем параметрами малости безразмерные величины (4). Разложения для величин, используемых в данной работе, имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{2N+2}{}^{00} &= 4 \frac{M}{r}, & \gamma_{2N+4}{}^{00} &= 4 \frac{M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}, \\ \gamma_{2N+3}{}^{0k} &= 0, & \gamma_{2N+5}{}^{0k} &= 0, \\ \gamma_{2N+4}{}^{mn} &= -\frac{Q^2}{r^2} \cdot \frac{x_m x_n}{r^2}, & \gamma_{2N+6}{}^{mn} &= -2 \frac{Q}{r^2} \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{x_m x_n}{r^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

5. СВОДКА ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Запишем выражения для $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{00} = \left(4\frac{M}{r_1} + 4\frac{m}{r_2}\right) + \left(4\frac{M(\dot{\xi}_l\dot{\xi}_l)}{r_1} - \frac{Q^2}{r_1^2} - 2\frac{M(X_l\dot{\xi}_l)^2}{r_1^3}\right) + \dots, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{0k} = & \left(-4\frac{M\dot{\xi}_k}{r_1} - 4\frac{m\dot{\eta}_k}{r_2}\right) + \\ & + \left(-4M\frac{(\dot{\xi}_l\dot{\xi}_l)\dot{\xi}_k}{r_1} + 2M\frac{(X_l\dot{\xi}_l)^2\dot{\xi}_k}{r_1^3} + \frac{Q^2(X_l\dot{\xi}_l)X_k}{r_1^4} + \frac{Q^2\dot{\xi}_k}{r_1^2} - 4\frac{qQ(x_l\dot{\xi}_l)}{R^3r_1}R_k - \right. \\ & \left. - 2\frac{qQ(X_l\dot{\eta}_l)}{R^3r_1}R_k + 2\frac{qQ(X_lR_l)}{R^3r_1}\dot{\eta}_k - 2\frac{qQ(R_l\dot{\xi}_l)}{R^3r_1}X_k + \dots\right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{mn} = & 4M\frac{\dot{\xi}_m\dot{\xi}_n}{r_1} - \frac{Q^2X_mX_n}{r_1^4} + 2\frac{qQ}{R^3} \cdot \frac{X_mR_n + X_nR_m - \delta_{mn}(X_lR_l)}{r_1} + \\ & + \frac{4}{3}\frac{m(\dot{\eta}_l\dot{\eta}_l)}{R}\delta_{mn} + \frac{2}{3}\frac{qQ}{R^2}\delta_{mn} + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Компоненты метрики $g_{\alpha\beta}$ находятся по компонентам $\gamma_{\alpha\beta}$ с помощью формулы, которая следует из (5), а именно

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}).$$

Выражения для A_α имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 = & -\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{Q(\dot{\xi}_l\dot{\xi}_l)}{r_1} - \frac{Q(X_l\dot{\xi}_l)^2}{2r_1^3} + \frac{qQ^2(X_lR_l)}{2MR^3r_1}\right) - \\ & - \frac{2}{3}(Q(X_l\ddot{\xi}_l) + q((x_l - \eta_l)\ddot{\eta}_l)) + \dots, \end{aligned} \quad (45)$$

$$A_k = \left(\frac{Q\dot{\xi}_k}{r_1} + \frac{q\dot{\eta}_k}{r_2}\right) + \dots \quad (46)$$

Выражения для $F_{\alpha\beta}$ можно записать как

$$\begin{aligned} F_{0k} = & -\left(\frac{QX_k}{r_1^3} + \frac{q(x_k - \eta_k)}{r_2^3}\right) - \\ & - \left(\frac{1}{2}\frac{Q(\dot{\xi}_l\dot{\xi}_l)X_k}{r_1^3} + \frac{qQ^2R_k}{2MR^3r_1} + \frac{qQ^2(X_lR_l)X_k}{2MR^3r_1^3} - \frac{3}{2}\frac{Q(X_l\dot{\xi}_l)^2X_k}{r_1^5}\right) + \\ & + \frac{2}{3}(Q\ddot{\xi}_k + q\ddot{\eta}_k), \end{aligned} \quad (47)$$

$$F_{mn} = -\left(\frac{Q(X_m\dot{\xi}_n - X_n\dot{\xi}_m)}{r_1^3} + \frac{q((x_m - \eta_m)\dot{\eta}_n - (x_n - \eta_n)\dot{\eta}_m)}{r_2^3}\right) + \dots \quad (48)$$

Выражения для массы и заряда имеют вид

$$M = M + \left(\frac{M(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{2} + \frac{qQ}{2R} \right) + \dots, \quad (49)$$

$$Q = Q + \frac{1}{2}Q(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + \dots. \quad (50)$$

Выражения (42)–(50) переходят в соответствующие выражения (41) при обращении в нуль параметров второй частицы m, q и скоростей $\dot{\xi}_k, \dot{\eta}_k$.

6. ОСОБЕННОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

6.1. Получение выражений до λ^{2N+6} -приближения. Члены низшего порядка малости приведенных выше окончательных выражений для функций $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α , $F_{\alpha\beta}$, а также для масс и зарядов частиц находятся без особых проблем вплоть до порядков, не выходящих за пределы λ^{2N+6} -приближения. В табл. 1 приведены результаты промежуточных вычислений.

6.2. Условие разрешимости уравнения $[mn]$ в λ^{2N+6} -приближении. Проинтегрируем уравнение $[mn]$ в λ^{2N+6} -приближении по сфере малого радиуса, окружающей первую частицу. Отбросим роторные комбинации, как это делалось при нахождении условия разрешимости уравнения $[mn]$ в λ^{2N+4} -приближении. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \oint_{\text{particle 1}} \left\{ -\gamma_{2N+3}^{0m,0n} \right\} ds_n + \frac{1}{2} \oint_{\text{particle 1}} \left\{ -\gamma_{2N+5}^{0m,0n} + \gamma_{2N+4}^{mn,00} \right\} ds_n = \\ & = 2 \oint_{\text{particle 1}} \left\{ -F_{N+2}^{0m} F_{N+2}^{0n} + \frac{1}{2} \delta_{mn} \left(F_{N+2}^{0p} F_{N+2}^{0p} \right) \right\} ds_n + \\ & + 2 \oint_{\text{particle 1}} \left\{ -F_{N+2}^{0m} F_{N+4}^{0n} - F_{N+2}^{0n} F_{N+4}^{0m} + F_{N+3}^{mp} F_{N+3}^{np} \right\} ds_n + \\ & + 2 \oint_{\text{particle 1}} \left\{ \delta_{mn} \left[F_{N+2}^{0p} F_{N+4}^{0p} - \frac{1}{4} F_{N+3}^{pq} F_{N+3}^{pq} \right] \right\} ds_n. \end{aligned} \quad (51)$$

В уравнение (51) входят не только члены порядка малости λ^{2N+6} , но и члены порядка малости λ^{2N+4} . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_1 & \equiv \frac{1}{2} \oint_{\text{particle 1}} \left\{ \gamma_{2N+5}^{0m,0n} \right\} ds_n, \\ \alpha_2 & \equiv \frac{1}{2} \oint_{\text{particle 1}} \left\{ \gamma_{2N+4}^{mn,00} \right\} ds_n, \end{aligned}$$

$$\beta_1 \equiv 2 \oint_{\text{particle 1}} \left\{ - \frac{F}{N+2} {}^0m {}^F_{N+4} {}^0n - \frac{F}{N+2} {}^0n {}^F_{N+4} {}^0m + \frac{F}{N+3} {}^mp {}^F_{N+3} {}^np \right\} ds_n,$$

$$\beta_2 \equiv 2 \oint_{\text{particle 1}} \left\{ \delta_{mn} \left[\frac{F}{N+2} {}^0p {}^F_{N+4} {}^0p - \frac{1}{4} \frac{F}{N+3} {}^{pq} {}^F_{N+3} {}^{pq} \right] \right\} ds_n.$$

ТАБЛИЦА 1. Результаты вычислений до λ^{2N+6} -приближения

Уравнение, условие разрешимости	Определяемая величина или получаемые соотношения	Примечание
Уравнение [00; λ^{2N+2}]	$\gamma_{2N+2}{}^{00}$	Численные коэффициенты определяются по разложению решения Нордстрема–Райсснера
Условие разрешимости [0k; λ^{2N+3}]	$\dot{M} = 0$ $\dot{m} = 0$	
Уравнение [0k; λ^{2N+3}]	$\gamma_{2N+3}{}^{0k}$	При нахождении используется координатное условие [c.c.; λ^{2N+3}]
Уравнение [00; λ^{N+2}]	$A_{N+2}{}^0$	Численные коэффициенты определяются по разложению решения Нордстрема–Райсснера
Условие разрешимости [mn; λ^{2N+4}]	$M\ddot{\xi}_k = -\frac{qQ}{R^3}R_k$ $m\ddot{\eta}_k = \frac{qQ}{R^3}R_k$	
Уравнение [mn; λ^{2N+4}]	$\gamma_{2N+4}{}^{mn}$	При нахождении используется координатное условие [c.c.; λ^{2N+4}]
Условие разрешимости [k; λ^{N+3}]	$\dot{Q} = 0$ $\dot{q} = 0$	
Уравнение [k; λ^{N+3}]	$A_{N+3}{}^k$	При нахождении используется калибровочное условие [g.c.; λ^{N+3}]
Уравнение [00; λ^{2N+4}]	$\gamma_{2N+4}{}^{00}$	
Условие разрешимости [0k; λ^{2N+5}]	$\frac{M}{2N+4} = \frac{1}{2}M(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + \frac{qQ}{2R}$ $\frac{m}{2N+4} = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l) + \frac{qQ}{2R}$	

ТАБЛИЦА 1 (продолжение)

Уравнение [00; λ^{2N+4}]	$\gamma_{2N+5}{}^{0k}$	При нахождении используется координатное условие [с.с.; λ^{2N+5}]
Уравнение [0; λ^{N+4}]	$A_{N+4}{}^0$	
Условие разрешимости [k; λ^{N+5}]	$Q_{N+4} = \frac{1}{2}Q(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)$ $q_{N+4} = \frac{1}{2}q(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)$	
Условие разрешимости [mn; λ^{2N+6}]	Уравнения движения частиц в $(v/c)^2$ - приближении	См. п. 6.2

ТАБЛИЦА 2. Типы поверхностных интегралов

I_1	$\frac{Q^2}{r_1} \ddot{\xi}_k$	I_6	$\frac{qQ}{R} \ddot{\eta}_k$
I_2	$\frac{qQ(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{R^3} R_k$	I_7	$\frac{qQ(\dot{\eta}_s \dot{\eta}_s)}{R^3} R_k$
I_3	$\frac{qQ(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\xi}_k$	I_8	$\frac{qQ(R_s \dot{\eta}_s)^2}{R^5} R_k$
I_4	$\frac{qQ(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l)}{R^3} R_k$	I_9	$\frac{qQ(R_s \ddot{\eta}_s)}{R^3} R_k$
I_5	$\frac{qQ(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\eta}_k$		

Типы поверхностных интегралов перечислены в табл. 2. Результаты вычисления поверхностных интегралов от отдельных слагаемых представлены в табл. 3. Подстановка этих интегралов в соотношение (51) приводит к результирующим уравнениям движения частиц. Выпишем уравнение только для первой из частиц:

$$M \ddot{\xi}_k = -\frac{qQ}{R^3} R_k + qQ \left\{ \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l)}{R^3} R_k - \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\eta}_k + \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\xi}_k + \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{2R^3} R_k - \frac{\ddot{\eta}_k}{2R} - \frac{(R_l \ddot{\eta}_l)}{2R^3} R_k + \frac{3}{2} \frac{(R_l \dot{\eta}_l)^2}{R^5} R_k - \frac{(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{2R^3} R_k \right\}. \quad (52)$$

Это уравнение совпадает с уравнением Дарвина, получаемым из лагранжиана L , связанного с приведенным в работе [3] лагранжианом $\tilde{L}$ соотношением $L \equiv G\tilde{L}/c^4$:

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l) + \frac{1}{8} M (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)^2 + \frac{1}{8} m (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)^2 - \frac{qQ}{R} + \frac{qQ}{2R} \left[(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l) + \frac{(R_l \dot{\xi}_l)(R_l \dot{\eta}_l)}{R^2} \right]. \quad (53)$$

ТАБЛИЦА 3. Значения поверхностных интегралов

	α_1	α_2	β_1	β_2	$\alpha_1 + \alpha_2 +$ $+ \beta_1 + \beta_2$
I_1	$2/3$		$-2/3$		0
I_2	$3/2$	-1			$1/2$
I_3	2	-1			1
I_4	$1/3$			$2/3$	1
I_5	$-1/3$			$-2/3$	-1
I_6	$-1/3$		$-1/2$		$-1/2$
I_7			$-1/2$		$-1/2$
I_8			$3/2$		$3/2$
I_9			$-1/2$		$-1/2$

Обращает на себя внимание тот факт, что при вычислении поверхностных интегралов возникают в том числе и расходящиеся интегралы. К числу последних относятся выражения, содержащие $I_1 = Q^2 \ddot{\xi}_k / r_1$. Сокращение этих интегралов, как следует из табл. 3, носит комплексный характер в том смысле, что результирующий нулевой коэффициент получается за счет вклада как от левой, так и от правой частей уравнений ОТО. Этот результат подтверждает самосогласованность конструируемой в данной работе аппроксимационной схемы.

6.3. Нахождение γ_{2N+5}^{00} , γ_{2N+6}^{0k} , γ_{2N+5}^{mn} . Решением уравнения $[00; \lambda^{2N+5}]$ с учетом координатного условия $[с.с.; \lambda^{2N+5}]$ является

$$\gamma_{2N+5}^{00} = C_0 \frac{Q^2(X_l \dot{\xi}_l)}{r_1^3}. \quad (54)$$

Решением уравнения $[mn; \lambda^{2N+5}]$ с учетом координатного условия $[с.с.; \lambda^{2N+5}]$ является

$$\gamma_{2N+5}^{mn} = C_1 \left(\frac{Q^2(X_m \dot{\xi}_n + X_n \dot{\xi}_m)}{r_1^3} - \frac{Q^2(X_l \dot{\xi}_l)}{r_1^3} \delta_{mn} \right). \quad (55)$$

Решением уравнения $[0k; \lambda^{2N+6}]$ с учетом координатного условия $[с.с.; 0k; \lambda^{2N+6}]$ является

$$\gamma_{2N+6}^{0k} = C_0 \left(-\frac{Q^2(X_l \dot{\xi}_l) \dot{\xi}_k}{r_1^3} - \frac{Q^2(\ddot{\xi}_k)}{r_1} \right). \quad (56)$$

Приведенные выражения могут быть изменены, если сделать преобразование деформации пространства, определяемое малым вектором a_{2N+5}^k вида

$$a_{2N+5}^k = -C_1 \frac{Q^2 \dot{\xi}_k}{r_1}. \quad (57)$$

При таком преобразовании величины γ_{2N+5}^{00} , γ_{2N+6}^{0k} , γ_{2N+5}^{mn} принимают вид

$$\begin{aligned}\gamma_{2N+5}^{00} &\rightarrow \gamma_{2N+5}^{00} + a_{2N+5}^{l,l}, \\ \gamma_{2N+6}^{0k} &\rightarrow \gamma_{2N+6}^{0k} + a_{2N+5}^{k,0}, \\ \gamma_{2N+5}^{mn} &\rightarrow \gamma_{2N+5}^{mn} + a_{2N+5}^{m,n} + a_{2N+5}^{n,m} - \delta_{mn} (a_{2N+5}^{l,l}).\end{aligned}$$

Подставив вектор (57) в эти соотношения, приходим к выводу о том, что величину γ_{2N+5}^{mn} без ограничения общности можно обратить в нуль. В последующем будем полагать, что

$$\gamma_{2N+5}^{mn} = 0 \quad (58)$$

и коэффициент C_0 в формулах (54), (56) произволен.

6.4. Нахождение A_{2N+5}^0 . Решением уравнения $[0; \lambda^{N+5}]$ с учетом требований, предъявляемых к конструкции этой величины (см. конец п. 2.3), является

$$A_{2N+5}^0 = C_2 (Q(X_l \ddot{\xi}_l) + q((x_l - \eta_l) \ddot{\eta}_l)). \quad (59)$$

Отсюда

$$F_{N+5}^{0k} = -C_2 (Q \ddot{\xi}_k + q \ddot{\eta}_k). \quad (60)$$

6.5. Условие разрешимости уравнения $[mn]$ в λ^{2N+7} -приближении. Проинтегрируем уравнение $[mn; \lambda^{2N+7}]$ по сферам малого радиуса, окружающим частицы-сингулярности. Отбрасывая роторные комбинации, для оставшихся поверхностных интегралов получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \oint_{\text{particle 1}} \{ - \gamma_{2N+6}^{0m,0n} \} ds_n &\Rightarrow -\frac{C_0}{2} Q^2 \ddot{\xi}_k, \\ \frac{1}{2} \oint_{\text{particle 1}} \{ \gamma_{2N+5}^{mn,00} \} ds_n &\Rightarrow 0, \\ 2 \oint_{\text{particle 1}} \{ - F_{N+2}^{0m} F_{N+5}^{0n} - F_{N+2}^{0n} F_{N+5}^{0m} + \delta_{mn} (F_{N+2}^{0p} F_{N+5}^{0p}) \} ds_n &\Rightarrow \\ &\Rightarrow 2C_2 (Q \ddot{\xi}_k + q \ddot{\eta}_k) Q.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение движения первой частицы принимает вид

$$\begin{aligned}M \ddot{\xi}_k &= -\frac{qQ}{R^3} R_k + qQ \left\{ \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l)}{R^3} R_k - \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\eta}_k + \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\xi}_k + \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{R^3} R_k - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\ddot{\eta}_k}{2R} - \frac{(R_l \ddot{\eta}_l)}{2R^3} R_k + \frac{3}{2} \frac{(R_l \dot{\eta}_l)^2}{R^5} R_k - \frac{(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{2R^3} R_k \right\} + \\ &\quad + \frac{C_0}{4} Q^2 \ddot{\xi}_k + C_2 (Q \ddot{\xi}_k + q \ddot{\eta}_k) Q.\end{aligned} \quad (61)$$

Для нахождения коэффициентов C_0, C_2 найдем мощности излучения энергии первой и второй частицей. Из уравнения (61) и аналогичного уравнения для второй частицы следует, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} M (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l) + \frac{qQ}{R} + \frac{E}{2N+6} + \frac{E}{2N+7} \right)_{,0} = \\ & = -\frac{C_0}{4} (Q^2 (\ddot{\xi}_l \ddot{\xi}_l) + q^2 (\ddot{\eta}_l \ddot{\eta}_l)) + C_2 (Q (\ddot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + q (\ddot{\eta}_l \dot{\eta}_l)) Q + C_2 (Q (\dot{\eta}_l \ddot{\xi}_l) + q (\dot{\eta}_l \ddot{\eta}_l)) q. \end{aligned}$$

Здесь через $\frac{E}{2N+6}, \frac{E}{2N+7}$ обозначены слагаемые в энергии обеих частиц порядка $2N+6$ и $2N+7$, соответственно. После тождественных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} M (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l) + \frac{qQ}{R} + \frac{E}{2N+6} + \frac{E}{2N+7} \right)_{,0} = \\ & = -\frac{C_0}{4} (Q^2 (\ddot{\xi}_l \ddot{\xi}_l) + q^2 (\ddot{\eta}_l \ddot{\eta}_l)) - C_2 [Q \ddot{\xi}_s + q \ddot{\eta}_s] [Q \ddot{\xi}_s + q \ddot{\eta}_s]. \end{aligned} \quad (62)$$

Самый простой способ определения численного значения коэффициентов C_0, C_2 состоит в том, чтобы воспользоваться принципом соответствия. В данном случае воспользуемся тем, что мощность излучения энергии системой заряженных частиц составляет (см., например, книгу [8], § 67)

$$\left(\frac{1}{2} M (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l) + \frac{qQ}{R} + \frac{E}{2N+6} + \frac{E}{2N+7} \right)_{,0} = \frac{2}{3} Q^2 (\ddot{D}_l \ddot{D}_l), \quad (63)$$

где D_k — дипольный момент системы. Для системы из двух частиц

$$D_k = Q \xi_k + q \eta_k. \quad (64)$$

Сравнивая (62) с (63), приходим к следующим значениям коэффициентов:

$$C_0 = 0, \quad C_2 = \frac{2}{3}. \quad (65)$$

Уравнение движения первой частицы в λ^{2N+7} -приближении принимает вид

$$\begin{aligned} M \ddot{\xi}_k = & -\frac{qQ}{R^3} R_k + qQ \left\{ \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l)}{R^3} R_k - \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\eta}_k + \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\xi}_k + \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{2R^3} R_k - \right. \\ & \left. - \frac{\ddot{\eta}_k}{2R} - \frac{(R_l \ddot{\eta}_l)}{2R^3} R_k + \frac{3}{2} \frac{(R_l \dot{\eta}_l)^2}{R^5} R_k - \frac{(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{2R^3} R_k \right\} + \frac{2}{3} (Q \ddot{\xi}_k + q \ddot{\eta}_k) Q. \end{aligned} \quad (66)$$

7. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе на примере системы из двух заряженных частиц последовательно выполнены все процедуры, предусмотренные методом ЭИГ, до λ^{2N+7} -приближения включительно. В результате в ПК-приближении воспроизведено уравнение Дарвина, а в ППК-приближении получены члены с третьими производными координат частиц по времени, т.е. члены, описывающие потерю энергии на радиационное трение и не обладающие инвариантностью относительно изменения знака времени. Одновременно с выводом уравнений движения получены явные выражения для компонент метрики и векторного потенциала электромагнитного поля.

Выше уже отмечалось, что данная работа имеет методический характер. Главная ее цель состоит в анализе процедур, выполняемых при применении метода ЭИГ, на предмет их соответствия внутренней логике метода. Имея это в виду, в работе достаточно подробно изложены операции по выводу выражений для функций $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α и условий разрешимости полевых уравнений. Материал в такой форме делает, во-первых, изложение самодостаточным, а во-вторых, позволяет обсудить по существу проблемы, возникающие при решении электродинамических задач методом ЭИГ, и отметить ряд особенностей такого применения метода ЭИГ.

К проблемам и особенностям общего характера относятся следующие.

1. При использовании классической версии метода ЭИГ функции $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α являются гладкими в той пространственно-временной области, в которой ведется рассмотрение. Достигается это, во-первых, путем введения в рассмотрение поверхностей малых размеров, окружающих точки, в которых функции $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α могут иметь сингулярность; во-вторых — путем исключения из рассмотрения областей внутри этих поверхностей. Процедура рассмотрения не требует использования каких бы то ни было модельных представлений о структуре полевых функций внутри поверхностей и/или приемов регуляризации, т.е. того, к чему с неизбежностью приходится прибегать при использовании методов Фейнмана [9], Дирака [10] и др.

2. Другая особенность связана с первой и состоит в том, что перенормировка массы и заряда в рамках метода ЭИГ производится в классе конечных выражений, никаких операций с вычитанием одной бесконечной величины из другой не делается.

3. Еще одной особенностью является наличие в самой схеме критериев самосогласованности процедур, выполняемых по методу ЭИГ. Одним из таких критериев является сокращение расходящихся поверхностных интегралов при нахождении условий разрешимости уравнений $[mn]$, $[0k]$. В данной работе появление расходящихся интегралов впервые зафиксировано при рассмотрении условия разрешимости уравнения $[mn; \lambda^{2N+6}]$. Расходящиеся интегралы появились как от метрических степеней свободы (левой части уравнений ОТО), так и от электродинамических степеней свободы (правой части уравнений ОТО). Суммарный вклад от всех таких интегралов оказался равным нулю (см. табл. 3).

4. Рассмотрение электродинамических задач методом ЭИГ требует использования не одного, а двух параметров малости (λ и $M/Q \sim \lambda^N$) и установления соотношения между этими параметрами. Результаты данной работы имеют силу в случае, если

$N > 2$, т.е. тогда, когда нет необходимости учитывать силовой механизм воздействия гравитации на движение частиц. Учет электрогравитационных эффектов в рамках λ^{2N+7} -приближения не представляет принципиальных трудностей, однако эти эффекты лежат вне круга интересов данной работы.

5. При рассмотрении электродинамических задач методом ЭИГ нельзя в разложениях полевых функций (7), (8) ограничиваться либо четными, либо нечетными членами разложения по параметру λ . Начиная с γ_{2N+4}^{00} , γ_{2N+5}^{0k} , γ_{2N+4}^{mn} , A_{N+4}^0 , A_{N+5}^k , как оказалось, необходимо учитывать члены всех степеней разложения.

Перечисленные выше проблемы и особенности связаны с сущностью метода ЭИГ и, скорее всего, возникнут и при применении метода ЭИГ для решения задач, ответы на которые либо неизвестны, либо ненадежны. С этой точки зрения данная работа представляет собой ценность как решение тестовой задачи и выяснение возможностей метода в качестве возможного инструмента для решения задач другого типа. Например, задачи об уравнении движения кварков – объектов со спином $1/2$, взаимодействующих через посредство неабелева калибровочного поля, растущего с расстоянием.

В заключение заметим, что все результаты, получаемые методом ЭИГ, носят аппроксимационный характер. На каждом этапе приближения возникает необходимость определять некоторые численные значения коэффициентов в разложениях функций $\gamma_{\mu\nu}$, A_α . Это приводит к одному неустраняемому “пороку” метода ЭИГ – невозможности в рамках внутренней логики самого метода определить все такие коэффициенты. Детально этот вопрос на примере решения Керра изучен в работе [5]. В рассмотренном здесь случае это проявляется при нахождении γ_{2N+2}^{00} , A_{N+2}^0 , а также C_0 , C_2 в уравнениях движения λ^{2N+7} -приближения. Поэтому использование либо физических соображений, либо разложений точных решений является неотъемлемым атрибутом метода ЭИГ.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (проект МНТЦ № 1655).

Список литературы

- [1] *A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann.* Ann. Math. 1938. V. 39. P. 65.
- [2] *A. Einstein, L. Infeld.* Can. J. Math. 1949. V. 1. P. 209.
- [3] *J. L. Anderson.* Phys. Rev. D. 1977. V. 56. № 8. P. 4675.
- [4] *М. В. Горбатенко, А. В. Пушкин.* ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 1985. Вып. 2. С. 28.
- [5] *М. В. Горбатенко, Т. М. Горбатенко.* ТМФ. 2004. Т. 140. № 1. С. 160.
- [6] *В. А. Брумберг.* Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972.
- [7] *А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
- [8] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
- [9] *R. P. Feynman.* Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 939.
- [10] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. London A. 1938. V. 176. P. 148.

Поступила в редакцию 28.X.2003 г.,
после доработки 9.IV.2004 г.