Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Ханмамедов, О быстроубывающем решении задачи Коши для цепочки
Тоды, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 1, 5–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:03:23

О БЫСТРОУБЫВАЮЩЕМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Доказано существование быстроубывающего решения задачи Коши для цепочки Тоды. Найден класс начальных данных, обеспечивающих существование такого решения.

Ключевые слова: цепочка Тоды, быстроубывающее решение, данные рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) дает схему построения быстроубывающих решений некоторых нелинейных уравнений (см. [1]–[6]). Особый интерес при этом представляет доказательство того факта, что построенная при помощи такой схемы функция действительно является быстроубывающим решением. Как следует из работы [3], существование такого решения тесно связано с выбором класса начальных данных.

Рассмотрим задачу Коши для цепочки Тоды:

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2}a_n(b_n - b_{n+1}), \quad \dot{b}_n = a_{n-1}^2 - a_n^2, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_n(t) > 0, & b_n &= b_n(t), & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ a_n(0) &= \hat{a}_n \rightarrow 1, & b_n(0) &= \hat{b}_n \rightarrow 0, & |n| &\rightarrow +\infty; \end{aligned} \quad (1.2)$$

здесь и далее точкой сверху обозначается производная по t .

Решение $a_n(t)$, $b_n(t)$ назовем быстроубывающим, если $a_n(t) - 1$, $b_n(t)$ есть быстроубывающие функции, т.е. при любом $T > 0$ удовлетворяют условию $\sup_{0 \leq t \leq T} Q_1(t) < +\infty$, где $Q_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^r (|a_n(t) - 1| + |b_n(t)|)$, $r = 1$ (или $r = 3$).

В работах [1], [2], [4]–[6] с помощью МОЗР показан способ построения быстроубывающего решения задачи (1.1), (1.2). В этих работах предполагается, что быстроубывающее решение существует и начальные данные убывают достаточно быстро. Однако вопрос существования быстроубывающего решения остается открытым.

*Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан.
E-mail: agil.khanmamedov@yahoo.com

Этот вопрос и рассматривается в настоящей работе. Кроме того, указывается более широкий класс начальных данных, который обеспечивает существование быстроубывающего решения.

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА. *Быстроубывающее решение задачи (1.1), (1.2) существует и единственно, если начальные данные удовлетворяют условию $Q_3(0) < \infty$.*

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данном разделе мы сформулируем некоторые известные факты, многие из которых содержатся и доказываются в работах [6]–[8]. Рассмотрим разностное уравнение

$$\hat{a}_{n-1}y_{n-1} + \hat{b}_ny_n + \hat{a}_ny_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.1)$$

где предполагается, что $Q_1(0) < \infty$. В уравнении (2.1) положим $\lambda = 2 \cos z$, $z = \xi + i\tau$. При $\text{Im } z \geq 0$ определим решения $f_n^\pm(z)$ типа решения Йоста уравнения (2.1), положив $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f_n^\pm(z)e^{\mp inz} = 1$. Такие решения существуют и определяются однозначно. Справедливы [7], [8] представления через операторы преобразования

$$f_n^\pm(z) = \alpha_n^\pm e^{\pm inz} \left(1 + \sum_{m=\pm 1}^{\pm\infty} A_{nm}^\pm e^{\pm imz} \right) \quad (2.2)$$

и имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \hat{b}_n &= A_{n,\pm 1}^\pm - A_{n\mp 1,\pm 1}^\pm, \quad \hat{a}_n = \frac{\alpha_{n+\frac{1\pm 1}{2}}^\pm}{\alpha_{n+\frac{1\mp 1}{2}}^\pm}, \\ \hat{a}_n^2 &= 1 + A_{n+\frac{1\mp 1}{2},\pm 2}^\pm - A_{n+\frac{1\mp 3}{2},\pm 2}^\pm - \hat{b}_{n+\frac{1\mp 1}{2}} A_{n+\frac{1\mp 1}{2},\pm 1}^\pm, \\ \hat{a}_{n-\frac{1\mp 1}{2}}^2 A_{n\pm 1,m}^\pm - A_{nm}^\pm + \hat{b}_n A_{n,m\pm 1}^\pm + A_{n\mp 1,m\pm 2}^\pm - A_{n,m\pm 2}^\pm &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\alpha_n^\pm = 1 + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad A_{nm}^\pm = O\left(\sum_{k=n+\lfloor m/2 \rfloor}^{\pm\infty} (|\hat{a}_k - 1| + |\hat{b}_k|)\right), \quad n + m \rightarrow \pm\infty,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ означает целую часть.

На непрерывном спектре $\sigma = \{\lambda: |\lambda| \leq 2\}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} a^{-1}(\xi)f_n^\mp(\xi) &= f_n^\pm(-\xi) + r^\pm(\xi)f_n^\pm(\xi), \\ r^\pm(\xi) &= \pm \frac{b(\pm\xi)}{a(\xi)}, \quad -\infty < \xi < \infty, \end{aligned}$$

где $a^{-1}(\xi) = a^{-1}(\xi + 2\pi)$, $r^\pm(\xi) = r^\pm(\xi + 2\pi)$ – коэффициент прохождения и коэффициенты отражения направо и налево, соответственно. Функция $a(\xi)$ допускает регулярное продолжение $a(z) = a(z + 2\pi)$ в полуплоскость $\text{Im } z > 0$, и в этой полуплоскости в полуполосе $\Omega = \{z = \xi + i\tau: -\pi/2 \leq \xi \leq 3\pi/2, \tau > 0\}$ может иметь только конечное число простых нулей в точках $z_j = i\tau_j$, $j = 1, \dots, N_0$, $z_j = \pi + i\tau_j$, $j = N_0 + 1, \dots, N$ (см. [7]). Кроме того, функции $r^\pm(\xi)$ непрерывны [6] при $\xi \in (-\infty, \infty)$ и $|r^\pm(\xi)| < 1$ при $\xi \neq k\pi$, $-1 \leq r^\pm(k\pi) < 1$, $k = 0, \pm 1, \dots$.

Пусть $(m_k^\pm)^2 = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n^\pm(z_k)|^2)^{-1}$, $k = 1, \dots, N$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (см. [7], теорема 2). *Имеют место формулы разложения*

$$\sum_{k=1}^N (m_k^\pm)^2 f_n^\pm(z_k) f_m^\pm(z_k) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n^\pm(\xi) [f_m^\pm(-\xi) + r^\pm(\xi) f_m^\pm(\xi)] d\xi = \delta_{nm}, \quad (2.4)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера.

Набор величин $\{r^\pm(\xi); z_j; m_j^\pm, j = 1, \dots, N\}$ назовем правыми и левыми данными рассеяния. Одни данные рассеяния однозначно определяются другими (см., например, книгу [4], с. 430). Обратная задача рассеяния для уравнения (2.1) состоит в восстановлении коэффициентов $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ по данным рассеяния.

При исследовании свойств данных рассеяния, а также при решении обратной задачи важную роль играют основные уравнения типа уравнения Марченко.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (см. [7], лемма 2). *Величины $\alpha_n^\pm$ и $A_{nm}^\pm$, входящие в представления (2.2), удовлетворяют соотношениям*

$$A_{nm}^\pm + F_{2n+m}^\pm + \sum_{k=\pm 1}^{\pm\infty} A_{nk}^\pm F_{2n+m+k}^\pm = 0, \quad \pm m \geq 1, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.5)$$

$$(\alpha_n^\pm)^{-2} = 1 + F_{2n}^\pm + \sum_{k=\pm 1}^{\pm\infty} A_{nk}^\pm F_{2n+k}^\pm, \quad (2.6)$$

где

$$F_n^\pm = \sum_{k=1}^N (m_k^\pm)^2 e^{\pm i n z_k} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^\pm(\xi) e^{\pm i n \xi} d\xi. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.5) называются основными уравнениями обратной задачи. Они позволяют уточнить свойства величин $F_n^\pm$, удовлетворяющих оценкам [7]

$$\sum_{n=\pm 1}^{\pm\infty} |n| |F_{n+2}^\pm - F_n^\pm| < \infty. \quad (2.8)$$

Таким образом, данные рассеяния задачи (2.1) удовлетворяют следующему условию: при всех вещественных ξ коэффициенты отражения $r^\pm(\xi)$ непрерывны, $|r^\pm(\xi)| < 1$ при $\xi \neq k\pi$, $-1 \leq r^\pm(k\pi) < 1$. Величины $F_n^\pm$ удовлетворяют неравенствам (2.8).

В работах [7], [8] доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если выполнено сформулированное выше условие, то уравнение (2.5) при каждом n имеет единственное решение $A_{nm}^\pm \in l_1(\pm 1, \pm\infty)$.*

Как известно [7], [8], при таком условии уравнения (2.5) порождаются вполне непрерывными операторами. Поэтому, например, для случая “+” оператор $\mathcal{F}_{(n)}^+$, действующий по формуле $(\mathcal{F}_{(n)}^+ y)_m = \sum_{k=1}^{\infty} F_{2n+m+k}^+ y_k$, вполне непрерывен в $l_1(1, \infty)$. Тогда в силу утверждения 3 оператор $I + \mathcal{F}_{(n)}^+$ при каждом n в $l_1(1, \infty)$ имеет ограниченный обратный. Легко видеть, что этот обратный оператор ограничен в $l_1(1, \infty)$ по норме

равномерно относительно n , $n \geq a$, где a – конечное число. Последнее позволяет получить некоторые оценки для $A_{nm}^\pm$. Перепишав основное уравнение (2.5) и уравнение

$$\begin{aligned} (A_{nm}^\pm - A_{n-1,m}^\pm) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk}^\pm - A_{n-1,k}^\pm) F_{2(n-1)+m+k}^+ = \\ = (F_{2(n-1)+m}^+ - F_{2n+m}^+) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^+ (F_{2(n-1)+m+k}^+ - F_{2n+m+k}^+) \end{aligned}$$

в виде операторных уравнений, получим оценки при $n \geq a$:

$$\begin{aligned} |A_{nm}^\pm| \leq C\eta(2n+m), \\ |(A_{nm}^+ - A_{n-1,m}^+) + (F_{2n+m}^+ - F_{2(n-1)+m}^+)| \leq C\eta(2n-1)\eta(m+2n-1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\eta(n) = \sum_{k=n}^{\infty} |F_{k+2}^+ - F_k^+|$.

В работе [7] найдены другие условия для данных рассеяния, связанные с функцией $a(z)$. Эти условия вместе с условием, сформулированным выше, обеспечивают однозначную разрешимость обратной задачи.

Опишем теперь короткую процедуру решения обратной задачи. Построим сначала величины $F_n^\pm$ по формулам (2.7). Ядра $A_{nm}^\pm$ находятся из основных уравнений (2.5). После этого коэффициенты $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ можно найти по любым из формул (2.3). Как следует из работ [7], [8], эта процедура приводит к одному и тому же разностному уравнению вида (2.1), коэффициенты которого удовлетворяют условию $Q_1(0) < \infty$.

В конце этого раздела отметим, что в случае, когда в уравнении (2.1) стоят коэффициенты $a_n(t), b_n(t)$, являющиеся быстроубывающим решением задачи (1.1), (1.2), эволюция данных рассеяния во времени описывается [1], [2], [4]–[6] формулами

$$\begin{aligned} a(z, t) = a(z, 0), \quad r^\pm(\xi, t) = r^\pm(\xi, 0) e^{\mp 2it \sin \xi}, \\ (m_k^\pm(t))^2 = (m_k^\pm(0))^2 e^{\mp 2it \sin z_k}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для отыскания самого решения $a_n(t), b_n(t)$ задачи (1.1), (1.2) нужно найти данные рассеяния при $t = 0$, затем построить функцию $F_n^\pm(t)$ по формуле (2.7), куда вместо $r^\pm(\xi, 0), m_k^\pm(0)$ следует подставить (2.10). Далее следует решить уравнение (2.5) с параметром t относительно $A_{nm}^\pm(t)$ и найти $a_n(t), b_n(t)$ по формулам (2.3).

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем теперь, как обычно [4]–[6], операторы

$$\begin{aligned} (Ly)_n &= a_{n-1}(t)y_{n-1} + b_n(t)y_n + a_n(t)y_{n+1}, \\ (Ay)_n &= \frac{1}{2}a_{n-1}(t)y_{n-1} - \frac{1}{2}a_n(t)y_{n+1}, \end{aligned}$$

зависящие от параметра t . Операторы L и A образуют пару Лакса, и система уравнений (1.1) эквивалентна операторному уравнению

$$\dot{L} = AL - LA. \quad (3.1)$$

При этом, если $a_n(t)$, $b_n(t)$ – быстроубывающее решение системы уравнений (1.1), то оператор $M_1 = d/dt - A$ переводит решения уравнения $L\varphi = \lambda\varphi$ в решения этого же уравнения (см. [5], с. 169). Наоборот, если $a_n(t)$, $b_n(t)$ и их производные по t быстро убывают и оператор M_1 переводит любое решение φ уравнения $L\varphi = \lambda\varphi$ в какое-то решение этого же уравнения, то $(\dot{L} - AL + LA)\varphi = 0$. Тогда в силу (2.4) получим уравнение (3.1). Согласно (2.4) быстроубывающие функции $a_n(t)$, $b_n(t)$ являются решением системы уравнений (1.1) тогда и только тогда, когда $M_1[f_n^+(z, t)]$ является решением уравнения (2.1), коэффициентами которого служат $a_n(t)$, $b_n(t)$. С другой стороны, если $a_n(t)$, $b_n(t)$ и их производные по t быстро убывают, то $M_1[f_n^+(z, t)]$ обладает асимптотикой

$$M_1[f_n^+(z, t)] \sim i \sin z e^{inz} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как решение с такой асимптотикой единственно, то $M_1[f_n^+(z, t)] = i \sin z f_n^+(z, t)$.

Таким образом, если функции $a_n(t)$, $b_n(t)$ и их производные по t быстро убывают, то система уравнений (1.1) эквивалентна уравнению

$$M_1[f_n^+(z, t)] = i \sin z f_n^+(z, t). \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь соотношения (2.7), (2.10). Из этих соотношений следует, что функция $F_n^+(t)$ непрерывно дифференцируема по t и

$$\dot{F}_n(t) = F_{n-1}(t) - F_{n+1}(t). \quad (3.3)$$

В пространстве $l_1(1, \infty)$ определим оператор $\mathcal{F}_{(n)}^+(t)$, полагая

$$(\mathcal{F}_{(n)}^+(t)y)_m = \sum_{k=1}^{\infty} F_{2n+m+k}^+(t)y_k.$$

Норма оператора $\mathcal{F}_{(n)}^+(t)$ в пространстве $l_1(1, \infty)$ оценивается неравенствами

$$\|\mathcal{F}_{(n)}^+(t)\| \leq \sup_{m \geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2n+m+k}^+(t)| \leq \sum_{s=2n+2}^{\infty} |F_s^+(t)|. \quad (3.4)$$

Если $Q_3(0) < 0$, то функция $r^+(\xi, 0)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет непрерывную производную второго порядка. Тогда, подставляя (2.10) в формулу (2.7), интегрируя по частям и используя (3.4), находим, что оператор $\mathcal{F}_{(n)}^+(t)$ непрерывен по норме на каждом конечном отрезке $[0, T]$. По этой же формуле, интегрируя дважды по частям, получим

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} n |F_{n+2}^+(t) - F_n^+(t)| < \infty. \quad (3.5)$$

Однако при условии (3.5) для любого n оператор $I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t)$ имеет при всех $t \in [0, T]$ ограниченный обратный $(I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t))^{-1}$. Так как оператор $I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t)$ непрерывен по норме на $[0, T]$, то этот обратный также непрерывен (см. [9], с. 12, 13) по норме на $[0, T]$ и, в частности, равномерно ограничен на $[0, T]$. Кроме того, в силу (3.3), (3.5) оператор $I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t)$ сильно непрерывно дифференцируем. Тогда оператор $(I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t))^{-1}$ также сильно непрерывно дифференцируем, и справедлива формула

$$[(I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t))^{-1}]'_t = -(I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t))^{-1}[\mathcal{F}_{(n)}^+(t)]'_t(I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t))^{-1}. \quad (3.6)$$

Заметим, что обратный оператор $(I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t))^{-1}$ ограничен в $l_1(1, \infty)$ по норме равномерно относительно n , $n \geq a$ и $t, t \in [0, T]$. В самом деле, в силу (3.4), (3.5) при $n > n_0$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathcal{F}_{(n)}^+(t)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{s=2n+2}^{\infty} |\mathcal{F}_s^+(t)| < \frac{1}{2}.$$

Тогда $\|(I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t))^{-1}\| \leq (1 - \|\mathcal{F}_{(n)}^+(t)\|)^{-1} < 2$ при $n > n_0$. Остается конечное число операторов $(I + \mathcal{F}_{(n)}^+(t))^{-1}$, $a \leq n \leq n_0$, каждый из которых равномерно ограничен на $[0, T]$.

С другой стороны, при выполнении неравенства (3.5) уравнение (2.5) для случая “+” при каждом n однозначно разрешимо в $l_1(1, +\infty)$. Причем решение $A_{nm}^+(t)$ и, согласно (3.6), его производная по t удовлетворяют неравенствам, аналогичным (2.9), а сами равенства (2.5), (2.6) можно дифференцировать по t .

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Пусть $Q_3(0) < \infty$ и функции $a_n = a_n(t)$, $b_n = b_n(t)$ определяются формулами

$$b_n = A_{n1}^+ - A_{n-1,1}^+, \quad a_n^2 = 1 + A_{n2}^+ - A_{n-1,2}^+ - b_n A_{n1}^+,$$

где A_{nm}^+ – решение уравнения (2.5). Из результатов предыдущего раздела следует, что функции a_n , b_n , $\dot{a}_n$, $\dot{b}_n$ являются быстроубывающими. Предположим доказательству теоремы две леммы.

ЛЕММА 1. *При условии $Q_3(0) < \infty$ решение $A_{nm}^+(t)$ уравнения (2.5) удовлетворяет равенству*

$$\dot{A}_{nm}^+ + (A_{n,m+1}^+ - A_{n-1,m+1}^+) - b_n A_{nm}^+ = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результатам раздела 2 к обеим частям равенства (2.5) можно применить оператор M_2 , действующий по формуле $(M_2 h)_{nm} = \dot{h}_{nm} + (h_{n,m+1} - h_{n-1,m+1}) - b_n h_{nm}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \dot{F}_{2n+m}^+ + (F_{2n+m+1}^+ - F_{2(n-1)+m+1}^+) - b_n F_{2n+m}^+ + (M_2 A^+)_{nm} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{nk}^+ F_{2n+m+k}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^+ \dot{F}_{2n+m+k}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^+ F_{2n+m+1+k}^+ - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} A_{n-1,k}^+ F_{2(n-1)+m+1+k}^+ - b_n \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^+ F_{2n+m+k}^+ = 0. \end{aligned}$$

Из (3.3) вытекает, что

$$\begin{aligned}
& \dot{F}_{2n+m}^+ + (F_{2n+m+1}^+ - F_{2(n-1)+m+1}^+) = 0, \\
& \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^+ \dot{F}_{2n+m+k}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^+ F_{2n+m+1+k}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} A_{n-1,k}^+ F_{2(n-1)+m+1+k}^+ = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk}^+ - A_{n-1,k}^+) F_{2n+m+k-1}^+ = (A_{n1}^+ - A_{n-1,1}^+) F_{2n+m}^+ + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{n,k+1}^+ - A_{n-1,k+1}^+) F_{2n+m+k}^+ = \\
& = b_n F_{2n+m}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{n,k+1}^+ - A_{n-1,k+1}^+) F_{2n+m+k}^+.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(M_2 A^+)_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} (M_2 A^+)_{nk} F_{2n+m+k}^+ = 0.$$

Так как это уравнение для $(M_2 A^+)_{nm}$ имеет лишь тривиальное решение, то $(M_2 A^+)_{nm} \equiv 0$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. Величина α_n^+ , определяемая формулой (2.6), удовлетворяет соотношению

$$\dot{\alpha}_n^+ = -\frac{1}{2} b_n \alpha_n^+. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что правая часть равенства (2.6) положительна (см. [7]). Тогда, дифференцируя равенство (2.6) по t , получим

$$\dot{\alpha}_n^+ = -\frac{1}{2} (\alpha_n^+)^3 p_n,$$

где

$$p_n = \dot{F}_{2n}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{nk}^+ F_{2n+k}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^+ \dot{F}_{2n+k}^+.$$

Используя (2.5), (3.3), (4.1), имеем

$$\begin{aligned}
p_n &= \left[F_{2(n-1)+1}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n-1,k}^+ F_{2(n-1)+1+k}^+ \right] - \left[F_{2n+1}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k}^+ F_{2n+1+k}^+ \right] + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk}^+ - A_{n-1,k}^+) F_{2n+k-1}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{nk}^+ F_{2n+k}^+ = \\
&= -A_{n-1,1}^+ + A_{n1}^+ + (A_{n1}^+ - A_{n-1,1}^+) F_{2n}^+ + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_{n,k+1}^+ - A_{n-1,k+1}^+) F_{2n+k}^+ + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{nk}^+ F_{2n+k}^+ = \\
&= b_n + b_n F_{2n}^+ + b_n \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^+ F_{2n+k}^+ = b_n (\alpha_n^+)^{-2},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Завершим теперь доказательство теоремы. Подставляя представление (2.2) в уравнение (2.1) с коэффициентами $a_n(t)$, $b_n(t)$, получим

$$\begin{aligned} a_n^2 - 1 &= A_{n2}^+ - A_{n-1,2}^+ - b_n A_{n1}^+, \\ a_n^2 A_{n+1,m-1}^+ - A_{n,m-1}^+ &= A_{n,m+1}^+ - A_{n-1,m+1}^+ - b_n A_{nm}^+. \end{aligned}$$

Тогда в силу леммы 1

$$\begin{aligned} \dot{A}_{n1}^+ + \frac{1}{2}(A_{n2}^+ - A_{n-1,2}^+) - \frac{1}{2}b_n A_{n1}^+ &= \frac{1}{2}(1 - a_n^2), \\ \dot{A}_{nm}^+ - \frac{1}{2}b_n A_{nm}^+ + \frac{1}{2}a_n^2 A_{n+1,m-1}^+ - \frac{1}{2}A_{n-1,m+1}^+ &= \frac{1}{2}A_{n,m-1}^+ - \frac{1}{2}A_{n,m+1}^+. \end{aligned}$$

Последние равенства вместе с (4.2) эквивалентны уравнению (3.2). Тем самым существование быстроубывающего решения доказано. Единственность решения следует из однозначной разрешимости обратной задачи. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] *H. Flashka*. Progr. Theor. Phys. 1974. V. 51. № 3. P. 703–716.
- [2] *С. В. Манаков*. ЖЭТФ. 1974. Т. 67. № 2. С. 543–555.
- [3] *В. А. Марченко*. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [4] *Л. А. Таттаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [5] *М. Тода*. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
- [6] *И. М. Гусейнов, А. Х. Ханмамедов*. ТМФ. 1999. Т. 119. № 3. С. 429–440.
- [7] *Г. Ш. Гусейнов*. ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 5. С. 1045–1048.
- [8] *Г. Ш. Гусейнов*. Обратные задачи теории рассеяния для самосопряженных разностных операторов второго порядка. Дисс. к.-ф.м.н. М.: МГУ, 1976.
- [9] *С. Г. Крейн*. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 11.III.2004 г.,
после доработки 18.V.2004 г.