Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Карасёв, Е. М. Новикова, Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана в поле Кулона–Дирака, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 1, 127–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:25:03

© 2005 г.

М. В. Карасев*, Е. М. Новикова*

АЛГЕБРА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОММУТАЦИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ ДЛЯ ЭФФЕКТА ЗЕЕМАНА В ПОЛЕ КУЛОНА–ДИРАКА

Рассматривается модель движения частицы в поле электромагнитного монополя (поле Кулона–Дирака), возмущенном однородным магнитным и неоднородным электрическим полями. После квантового усреднения возникает интегрируемая система, гамильтониан которой выражается через образующие алгебры с полиномиальными коммутационными соотношениями. Строятся неприводимые представления этой алгебры, а также ее гипергеометрические когерентные состояния. С помощью этих состояний получено представление собственных функций исходной задачи через решения модельного обыкновенного дифференциального уравнения и указана асимптотика собственных значений в главном порядке теории возмущений, где полностью снимается вырождение спектра.

Ключевые слова: интегрируемые системы, монополь Дирака, нелинейные коммутационные соотношения, когерентные состояния, спектральные асимптотики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья – вторая из цикла работ, посвященных 30-летию выхода в свет книги В. П. Маслова “Операторные методы” [1], послужившей отправной точкой многих современных исследований в области некоммутативного анализа и квантовой геометрии.

Первая статья данного цикла [2] содержит подробное введение, где в контексте задачи о квантовой частице в электромагнитном поле обсуждается некоторый общий механизм возникновения алгебр операторов с нелинейными коммутационными соотношениями, а также даны ссылки на литературу и подробно описывается используемая здесь техника. В статье [2] рассмотрена также конкретная спектральная задача для частицы, движущейся в поле электромагнитного монополя (поле Кулона–Дирака), возмущенном аксиальным электрическим полем. Показано, что в такой модели возникает алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями, обобщающая алгебру, найденную в работе [3] для эффекта Зеемана в атоме водорода (см. также [4]).

*Московский государственный институт электроники и математики, Москва, Россия. E-mail: karasev@miem.edu.ru; novikova@miem.edu.ru

В данной работе рассматривается другая конфигурация: поле Кулона–Дирака, возмущенное однородным магнитным и неоднородным электрическим полями. Исследуется случай, когда напряженность возмущающего электрического поля (в безразмерных единицах) является величиной второго порядка малости по сравнению с напряженностью возмущающего магнитного поля. В такой системе после усреднения появляется *алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями*, структура которых универсальна и определяется лишь арифметической пропорцией между главными квантовыми числами. Неприводимые представления и когерентные состояния этой алгебры позволяют найти (приближенно) спектр и собственные функции исходной неинтегрируемой системы.

Работа имеет следующую структуру. В начале раздела 2 гамильтониан системы приводится к виду “*действие*” + *возмущение*. Далее, после квантового усреднения возникает новый оператор возмущения, коммутирующий с “действием”. В свою очередь, это усредненное возмущение тоже представляет собой сумму некоторого оператора типа “действие” и возмущающего оператора второго порядка малости. К этой сумме можно еще раз применить квантовое усреднение. В результате исходная спектральная задача сводится к спектральной задаче для трех коммутирующих операторов: *два “действия” + дважды усредненное возмущение*.

Основная часть второго раздела посвящена исследованию дважды усредненного возмущения. Этот оператор является элементом алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ совместных квантовых интегралов движения двух коммутирующих операторов “действие”. В п. 2.6 выписаны генераторы этой алгебры и полиномиальные коммутационные соотношения, которым они подчинены. Кроме того, в модельном примере (с простейшим потенциалом возмущающего электрического поля) получено явное выражение для дважды усредненного гамильтониана в виде функции от генераторов алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$.

Выделенная алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями детально исследуется в разделе 3. Строятся ее неприводимые представления обыкновенными дифференциальными операторами в пространстве полиномов; выписываются соответствующие когерентные состояния и определяется когерентное преобразование, сплетающее абстрактное представление данной алгебры с неприводимым.

В разделе 4 с помощью когерентного преобразования спектральная задача для дважды усредненного гамильтониана сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве полиномов. В модельном примере это дифференциальное уравнение имеет второй или третий порядок.

В результате вычисляются собственные значения исходного гамильтониана, а также соответствующие им собственные функции в главном приближении теории возмущений, где полностью снимается вырождение старшей части спектра.

В приложении приведена реализация задачи в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$, выписаны формулы для генераторов алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ и формулы для соответствующих когерентных состояний в $L^2(\mathbb{R}^4)$.

2. ДВОЙНОЕ КВАНТОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Предположим, что в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$ операторы $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ и $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ задают неприводимое представление алгебры

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_k] &= 0, \quad [\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_k] = -i\hbar \delta_{jk}, \quad [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar \mu \varepsilon_{jkl} \frac{\mathbf{q}_l}{|\mathbf{q}|^3}, \\ \mathbf{q}_j &= \mathbf{q}_j^*, \quad \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_j^*, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\hbar > 0$, звездочка обозначает операторное сопряжение, а константа μ (магнитный заряд) подчинена условию квантования: $\mu = \hbar k/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Число k раз и навсегда фиксировано. Алгебра (2.1) используется для описания монополя Дирака [5]. Ее реализации операторами в $L^2(\mathbb{R}^4)$, обсуждение и ссылки на литературу приведены в работе [2]. Квантовая система, которая исследуется в данной работе, — это *частица в поле Кулона–Дирака, возмущенном однородным магнитным и неоднородным электрическим полями*. Ее гамильтониан имеет вид

$$\left(\mathbf{p}_1 - \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{q}_2 \right)^2 + \left(\mathbf{p}_2 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{q}_1 \right)^2 + \mathbf{p}_3^2 - \frac{1}{|\mathbf{q}|} + \frac{\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} + \varepsilon^2 \mathcal{U}(\mathbf{q})$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$ представления алгебры (2.1). Здесь однородное магнитное поле предполагается направленным вдоль третьей оси, $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ — потенциал электрического поля, а ε — параметр, характеризующий величину напряженности полей. Мы предполагаем, что $\varepsilon \ll 1$.

Для наглядности наряду со случаем общего неоднородного потенциала $\mathcal{U}$ будем рассматривать также модельный пример, когда

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \gamma q_1 q_2^2, \quad (2.2)$$

где $\gamma = \text{const}$.

2.1. Сведение задачи к виду “действие” + возмущение. Наша исходная спектральная задача имеет вид

$$\left(\mathbf{H}_0 + \varepsilon(\mathbf{q}_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2 \mathbf{p}_1) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4}(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \right) \right) \psi = \mathcal{E} \psi, \quad \psi \in \mathcal{L}, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{H}_0 = |\mathbf{p}|^2 - \frac{1}{|\mathbf{q}|} + \frac{\mu^2}{|\mathbf{q}|^2}$$

— гамильтониан частицы в поле Кулона–Дирака (все подробности о свойствах $\mathbf{H}_0$ и ссылки на литературу см. в работе [2]). Дискретный спектр лежит на отрицательной полуоси $\mathcal{E} < 0$, поэтому мы полагаем

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4\lambda^2}, \quad \lambda > 0.$$

После умножения на $\lambda|\mathbf{q}|$ свеем (2.3) к задаче

$$(\mathbf{S}_0 + \varepsilon \mathbf{X}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{Y}_1)\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in \mathcal{L}_-, \quad (2.4)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_-$ со скалярным произведением

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{4} \left\langle \frac{1}{|\mathbf{q}|} \psi_1, \psi_2 \right\rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathcal{L}$. Здесь $\mathbf{S}_0$ – оператор “действие” (см. [2]):

$$\mathbf{S}_0 \stackrel{\text{def}}{=} s(\lambda, \frac{2}{\mathbf{q}}, \frac{1}{\mathbf{p}}), \quad s(\lambda, q, p) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda|q||p|^2 + \frac{\mu^2 \lambda}{|q|} + \frac{|q|}{4\lambda}, \quad (2.5)$$

а $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{Y}_1$ задаются формулами

$$\mathbf{X}_1 = \lambda|\mathbf{q}|(\mathbf{q}_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2 \mathbf{p}_1), \quad \mathbf{Y}_1 = \lambda|\mathbf{q}| \left(\frac{1}{4}(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \right). \quad (2.6)$$

2.2. Квантовое усреднение. Схема квантового усреднения, которую мы используем, описана в работах [2], [4]. Основные расчетные формулы следующие. Для каждого оператора $\mathbf{F}$ определим операторы

$$\underline{\mathbf{F}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(i\tau/\hbar)\mathbf{S}_0} \mathbf{F} e^{(i\tau/\hbar)\mathbf{S}_0} d\tau, \quad \mathbf{F}^\# = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - \tau) e^{-(i\tau/\hbar)\mathbf{S}_0} \mathbf{F} e^{(i\tau/\hbar)\mathbf{S}_0} d\tau.$$

Используя эти обозначения, построим усредняющий оператор

$$\mathbf{U} = \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{\hbar} (\mathbf{S}_1^\# + \varepsilon \mathbf{S}_2^\#) \right\}, \quad \text{где } \mathbf{S}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{2\hbar} [\mathbf{S}_1^\#, \mathbf{S}_1 + \underline{\mathbf{S}}_1].$$

Тогда имеют место тождества

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{S}_0 + \varepsilon \mathbf{S}_1)\mathbf{U} = \mathbf{S}_0 + \varepsilon \underline{\mathbf{S}}_1 + \varepsilon^2 \underline{\mathbf{S}}_2 + O(\varepsilon^3), \quad [\underline{\mathbf{S}}_1, \mathbf{S}_0] = [\underline{\mathbf{S}}_2, \mathbf{S}_0] = 0.$$

Таким образом, в результате квантового усреднения получены новые гамильтонианы $\underline{\mathbf{S}}_1$ и $\underline{\mathbf{S}}_2$, коммутирующие со старшим членом $\mathbf{S}_0$.

2.3. Усредненный оператор. Вычислим усредненное возмущение $\underline{\mathbf{S}}_1 + \varepsilon \underline{\mathbf{S}}_2$ для нашей задачи, в которой $\mathbf{S}_1 = \mathbf{X}_1 + \varepsilon \mathbf{Y}_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathbf{S}_0$ – оператор “действие” (2.5), а $\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1$ – операторы (2.6). Тогда выполнены тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{S}_0 + \varepsilon \mathbf{X}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{Y}_1) \mathbf{U} &= \mathbf{S}_0 + \varepsilon \underline{\mathbf{X}}_1 + \varepsilon^2 (\underline{\mathbf{X}}_2 + \underline{\mathbf{Y}}_1) + O(\varepsilon^3), \\ [\underline{\mathbf{X}}_1, \mathbf{S}_0] &= [\underline{\mathbf{X}}_2, \mathbf{S}_0] = [\underline{\mathbf{Y}}_1, \mathbf{S}_0] = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

в которых усредненное возмущение задается гамильтонианами

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{X}}_1 &= 2\lambda^2 ((\mathbf{S}_0 + \mu) \mathbf{J}_3 + (\mathbf{S}_0 - \mu) \mathbf{K}_3), \\ \underline{\mathbf{X}}_2 &= -2\lambda^4 (\mathbf{S}_0 (\mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3)^2 + \mu^2 \mathbf{S}_0 + 2\mu (\mathbf{J}_3^2 - \mathbf{K}_3^2)), \\ \underline{\mathbf{Y}}_1 &= \lambda^4 (3\mathbf{S}_0^3 - \mu^2 \mathbf{S}_0 - 4\mathbf{S}_0 (\mathbf{J}_3^2 + \mathbf{K}_3^2) - 2\mu (\mathbf{J}_3^2 - \mathbf{K}_3^2) + 4\mathbf{S}_0 \mathbf{J}_3 \mathbf{K}_3 - \\ &\quad - 8\mathbf{S}_0 (\mathbf{J}_1 \mathbf{K}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{K}_2) + \hbar^2 \mathbf{S}_0) + \lambda |\mathbf{q}| \mathcal{U}(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

а оператор $|\mathbf{q}| \mathcal{U}(\mathbf{q})$ (последнее слагаемое в $\underline{\mathbf{Y}}_1$) – формулой

$$|\mathbf{q}| \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\mathbf{S}_0 + \mathbf{v} e^{i\tau} + \mathbf{v}^* e^{-i\tau}) \mathcal{U}(\lambda(2(\mathbf{J} - \mathbf{K}) + \mathbf{V} e^{i\tau} + \mathbf{V}^* e^{-i\tau})) d\tau.$$

В модельном примере (2.2) имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}| \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2^2 &= \lambda^4 \left(20\mathbf{S}_0 (2\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2^2 - 2\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2^2 - 7\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \mathbf{K}_2 + 7\mathbf{J}_2 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 - 5\mathbf{J}_2^2 \mathbf{K}_1 + 5\mathbf{J}_1 \mathbf{K}_2^2 - \right. \\ &\quad - \mathbf{J}_3^2 \mathbf{K}_1 + \mathbf{J}_1 \mathbf{K}_3^2 + \mathbf{J}_3 \mathbf{J}_1 \mathbf{K}_3 - \mathbf{J}_3 \mathbf{K}_3 \mathbf{K}_1) - 8\mu \mathbf{S}_0^2 (\mathbf{J}_1 + \mathbf{K}_1) - \\ &\quad - 8\mu^2 \mathbf{S}_0 (\mathbf{J}_1 - \mathbf{K}_1) + 4\mu (6\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2^2 + 6\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2^2 - 7\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \mathbf{K}_2 - 7\mathbf{J}_2 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 - \\ &\quad - 5\mathbf{J}_2^2 \mathbf{K}_1 - 5\mathbf{J}_1 \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{J}_3^2 \mathbf{K}_1 - \mathbf{J}_1 \mathbf{K}_3^2 + \mathbf{J}_3 \mathbf{J}_1 \mathbf{K}_3 + \mathbf{J}_3 \mathbf{K}_3 \mathbf{K}_1) - \\ &\quad - 40i\hbar \mathbf{S}_0 (\mathbf{J}_2 \mathbf{J}_3 - \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_3 + 2\mathbf{J}_2 \mathbf{K}_3 - 2\mathbf{J}_3 \mathbf{K}_2) - \\ &\quad \left. - 24i\hbar \mu (\mathbf{J}_2 \mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_3) + 12i\hbar \mu (\mathbf{J}_2 \mathbf{K}_3 + \mathbf{J}_3 \mathbf{K}_2) - 12\hbar^2 \mu (\mathbf{J}_1 + \mathbf{K}_1) \right). \end{aligned}$$

Образующие $\mathbf{J}, \mathbf{K}$ алгебры квантовых интегралов движения оператора “действие” и операторы $\mathbf{v}, \mathbf{V}, \mathbf{v}^*, \mathbf{V}^*$ определены в статье [2] (см. формулы (2.6), (2.7) и (2.8), (2.9)).

Усредняющее преобразование $\mathbf{U}$ в первом из тождеств (2.7) имеет вид

$$\mathbf{U} = \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{\hbar} (\mathbf{X}_1^\# + \varepsilon (\mathbf{X}_2^\# + \mathbf{Y}_1^\#)) \right\}.$$

2.4. Второй оператор “действие”. Оператор “действие” $\mathbf{S}_0$ имеет собственные значения $\lambda_n = \hbar(n + 1 + |k|/2)$ и собственные подпространства $\mathcal{L}_-[n] \subset \mathcal{L}_-, n \in \mathbb{Z}_+$. Описание этих подпространств дано в работе [2].

Обозначим через l и r взаимно простые натуральные числа такие, что

$$\frac{n + 1 + |k|/2 + k/2}{n + 1 + |k|/2 - k/2} = \frac{l}{r} \quad (2.8)$$

(в случае $k = 0$ нужно положить $l = r = 1$). Тогда можно записать

$$n + 1 + \frac{|k|}{2} + \frac{k}{2} = ld, \quad n + 1 + \frac{|k|}{2} - \frac{k}{2} = rd, \quad (2.9)$$

где d – некоторое натуральное число.

Введем операторы

$$\mathbf{G}_0 = l\mathbf{J}_3 + r\mathbf{K}_3, \quad \mathbf{G}_1 = \frac{1}{2\lambda^2 d \hbar} (\mathbf{X}_2 + \mathbf{Y}_1).$$

Отметим, что спектр $\mathbf{G}_0$ на подпространстве $\mathcal{L}_-[n]$ состоит из чисел

$$\hbar \left(rj_2 - lj_1 - \frac{l-r}{2} \right),$$

где $0 \leq j_1 \leq rd - 1$, $0 \leq j_2 \leq ld - 1$. Соответствующими собственными функциями являются функции ψ_{j_1, j_2}^n , определенные в статье [2] формулой (2.11).

Таким образом, $\mathbf{G}_0$ может рассматриваться как новый оператор “действие”.

Усредненный возмущающий оператор в правой части (2.7) на подпространстве $\mathcal{L}_-[n]$ принимает вид

$$[\varepsilon \mathbf{X}_1 + \varepsilon^2 (\mathbf{X}_2 + \mathbf{Y}_1)]|_{\mathcal{L}_-[n]} = \varepsilon 2\hbar d \lambda^2 (\mathbf{G}_0 + \varepsilon \mathbf{G}_1).$$

2.5. Вторичное квантовое усреднение. К сумме операторов $\mathbf{G}_0 + \varepsilon \mathbf{G}_1$ на $\mathcal{L}_-[n]$ можно снова применить квантовое усреднение; для этого нужно ввести операторы

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(i\tau/\hbar)\mathbf{G}_0} \mathbf{G}_1 e^{(i\tau/\hbar)\mathbf{G}_0} d\tau, \\ \# \mathbf{G}_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - \tau) e^{-(i\tau/\hbar)\mathbf{G}_0} \mathbf{G}_1 e^{(i\tau/\hbar)\mathbf{G}_0} d\tau. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда

$$e^{(i\varepsilon/\hbar)\# \mathbf{G}_1} (\mathbf{G}_0 + \varepsilon \mathbf{G}_1) e^{-(i\varepsilon/\hbar)\# \mathbf{G}_1} = \mathbf{G}_0 + \varepsilon \overline{\mathbf{G}}_1 + O(\varepsilon^2), \quad [\overline{\mathbf{G}}_1, \mathbf{G}_0] = 0.$$

Таким образом, спектральная задача (2.4) с точностью $O(\varepsilon^3)$ сводится к спектральной задаче для дважды усредненного возмущения $\overline{\mathbf{G}}_1$, а точнее, к задаче

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0 \varphi = \frac{\hbar(l+r)d}{2} \varphi, \\ \mathbf{G}_0 \varphi = \hbar \left(m - \frac{l-r}{2} \right) \varphi, \\ \overline{\mathbf{G}}_1 \varphi = \zeta \varphi. \end{cases} \quad (2.11)$$

Здесь целые числа m определяют спектр $\mathbf{G}_0$; они имеют вид

$$m = rj_2 - lj_1,$$

где $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j_1 \leq rd - 1$, $0 \leq j_2 \leq ld - 1$. Собственные значения ζ и собственные функции φ оператора $\overline{\mathbf{G}}_1$ в (2.11) связаны с исходными собственными значениями λ и собственными функциями ψ следующими формулами:

$$\lambda = \lambda_n + \varepsilon \cdot 2\hbar^2 d \left(m - \frac{l-r}{2} \right) \lambda_n^2 + \varepsilon^2 \cdot 2\hbar d \lambda_n^2 \left[\zeta + 4\hbar^3 d \left(m - \frac{l-r}{2} \right)^2 \lambda_n \right] + O(\varepsilon^3),$$

$$\psi = \varphi + O(\varepsilon),$$

где $\lambda_n = \hbar(n + 1 + |k|/2)$.

2.6. Дважды усредненное возмущение как элемент алгебры интегралов движения операторов “действие” $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$. В результате двукратного применения квантового усреднения исходная система (2.4) сводится к квантовой интегрируемой системе с гамильтонианом $\overline{\mathbf{G}}_1$, который обладает двумя независимыми коммутирующими между собой квантовыми интегралами движения: $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ алгебру всех операторов, коммутирующих с $\mathbf{S}_0$ и с $\mathbf{G}_0$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть l, r – взаимно простые целые числа.

1. Алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ операторов, коммутирующих с $\mathbf{S}_0$ и с $\mathbf{G}_0 = l\mathbf{J}_3 + r\mathbf{K}_3$, порождается следующими генераторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{J}_3, & \mathbf{A}_2 &= \mathbf{K}_3, & \mathbf{A}_3 &= \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2, & \mathbf{A}_4 &= \mathbf{K}_1^2 + \mathbf{K}_2^2, \\ \mathbf{B} &= (\mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2)^r (\mathbf{K}_1 + i\mathbf{K}_2)^l, & \mathbf{C} &= (\mathbf{J}_1 + i\mathbf{J}_2)^r (\mathbf{K}_1 - i\mathbf{K}_2)^l. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Генераторы $\mathbf{A}$ эрмитовы: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, а $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ взаимно сопряжены: $\mathbf{B} = \mathbf{C}^*$.

2. Операторы $\mathbf{A}_j$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ подчинены следующим полиномиальным перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j] &= 0, & [\mathbf{C}, \mathbf{B}] &= f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4), \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_1 - r\hbar), & \mathbf{C} \mathbf{A}_1 &= (\mathbf{A}_1 - r\hbar) \mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_2 + l\hbar), & \mathbf{C} \mathbf{A}_2 &= (\mathbf{A}_2 + l\hbar) \mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_3 + 2r\hbar \mathbf{A}_1 - r^2 \hbar^2), & \mathbf{C} \mathbf{A}_3 &= (\mathbf{A}_3 + 2r\hbar \mathbf{A}_1 - r^2 \hbar^2) \mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_4 \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_4 - 2l\hbar \mathbf{A}_2 - l^2 \hbar^2), & \mathbf{C} \mathbf{A}_4 &= (\mathbf{A}_4 - 2l\hbar \mathbf{A}_2 - l^2 \hbar^2) \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь полином f от четырех переменных определен формулой

$$\begin{aligned} f(A_1, A_2, A_3, A_4) &\stackrel{\text{def}}{=} \hbar \left(r \prod_{q=0}^{l-1} (A_4 + (2q+1)\hbar A_2 - q(q+1)\hbar^2) \times \right. \\ &\times \sum_{j=0}^{r-1} (2A_1 + (r-1-2j)\hbar) \prod_{p=j+1-r}^{j-1} (A_3 + (2p+1)\hbar A_1 - p(p+1)\hbar^2) - \\ &- l \prod_{p=0}^{r-1} (A_3 + (2p+1)\hbar A_1 - p(p+1)\hbar^2) \times \\ &\times \sum_{j=0}^{l-1} (2A_2 + (l-1-2j)\hbar) \prod_{q=j+1-l}^{j-1} (A_4 + (2q+1)\hbar A_2 - q(q+1)\hbar^2) \Big). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Соотношения (2.13) имеют четыре элемента Казимира

$$\mathbf{B}\mathbf{C} - \rho(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4), \quad l\mathbf{A}_1 + r\mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_3, \quad \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_4,$$

где

$$\begin{aligned} \rho(A_1, A_2, A_3, A_4) \stackrel{\text{def}}{=} & \prod_{p=0}^{r-1} (A_3 - (2p+1)\hbar A_1 - p(p+1)\hbar^2) \times \\ & \times \prod_{q=0}^{l-1} (A_4 + (2q+1)\hbar A_2 - q(q+1)\hbar^2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

3. В представлении (2.12) элементы Казимира выражаются через $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{G}_0$ по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{BC} - \rho(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4) &= 0, \quad l\mathbf{A}_1 + r\mathbf{A}_2 = \mathbf{G}_0, \\ \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_3 &= \frac{1}{4}(\mathbf{S}_0 - \mu)^2 - \frac{\hbar^2}{4}, \quad \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_4 = \frac{1}{4}(\mathbf{S}_0 + \mu)^2 - \frac{\hbar^2}{4}. \end{aligned}$$

Если $k = 0$, то $l = r = 1$, и тогда $\mathbf{G}_0$ совпадает с третьей компонентой углового момента (см. формулы (2.7) в статье [2]): $\mathbf{G}_0 = \mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3 = \mathbf{M}_3$. В этом случае алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ совпадает с квадратичной алгеброй, описанной в работе [4].

Если $k \neq 0$, то хотя бы одно из чисел l или r больше 1. Рассмотрим, например, простейший случай, когда $l = 2$, $r = 1$. Тогда полиномы f (2.14) и ρ (2.15) из теоремы 2.1 – кубические:

$$\begin{aligned} f(A_1, A_2, A_3, A_4) &= 2\hbar(A_1 A_4^2 - 4A_2 A_3 A_4 - 2\hbar^2 A_1 A_4 + 2\hbar^2 A_2 A_3 + 3\hbar^2 A_1 A_2^2), \\ \rho(A_1, A_2, A_3, A_4) &= (A_3 - \hbar A_1)(A_4 + \hbar A_2)(A_4 + 3\hbar A_2 - 2\hbar^2). \end{aligned}$$

Вследствие теоремы 2.1 справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. 1. Для произвольного возмущающего потенциала $\mathcal{U}(q)$ дважды усредненное возмущение $\overline{\mathbf{G}_1}$ (2.10) является элементом алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$, т.е. $\overline{\mathbf{G}_1}$ представим в виде функции от образующих $\mathbf{A}_j$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ (2.12) этой алгебры.

2. В модельном примере $\mathcal{U}(q) = \gamma q_1 q_2^2$ (2.2) оператор $\overline{\mathbf{G}_1}$ задается следующими формулами:

в случае $l = r = 1$ (т.е. когда $k = 0$ и $\mu = 0$)

$$\overline{\mathbf{G}_1} = \frac{\lambda^2}{2\hbar d} \mathbf{S}_0 (3\mathbf{S}_0^2 - 6\mathbf{A}_1^2 - 6\mathbf{A}_2^2 - 4(\mathbf{B} + \mathbf{C}) + \hbar^2); \quad (2.16a)$$

в случае $l = 2$, $r = 1$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}_1} &= \frac{\lambda^2}{2\hbar d} (3\mathbf{S}_0 (\mathbf{S}_0^2 - \mu^2) - 6(\mathbf{S}_0 + \mu)\mathbf{A}_1^2 - 6(\mathbf{S}_0 - \mu)\mathbf{A}_2^2 + \hbar^2 \mathbf{S}_0) + \\ &+ \frac{\lambda^3 \gamma}{2\hbar d} (5\mathbf{S}_0 - \mu)(\mathbf{B} + \mathbf{C}); \end{aligned} \quad (2.16b)$$

в случае $l = 1, r = 2$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_1 = & \frac{\lambda^2}{2\hbar d} (3\mathbf{S}_0(\mathbf{S}_0^2 - \mu^2) - 6(\mathbf{S}_0 + \mu)\mathbf{A}_1^2 - 6(\mathbf{S}_0 - \mu)\mathbf{A}_2^2 + \hbar^2\mathbf{S}_0) - \\ & - \frac{\lambda^3\gamma}{2\hbar d} (5\mathbf{S}_0 + \mu)(\mathbf{B} + \mathbf{C}); \end{aligned} \quad (2.16\text{в})$$

в случае $l + r > 3$

$$\overline{\mathbf{G}}_1 = \frac{\lambda^2}{2\hbar d} (3\mathbf{S}_0(\mathbf{S}_0^2 - \mu^2) - 6(\mathbf{S}_0 + \mu)\mathbf{A}_1^2 - 6(\mathbf{S}_0 - \mu)\mathbf{A}_2^2 + \hbar^2\mathbf{S}_0). \quad (2.16\text{г})$$

Здесь $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — образующие (2.12) алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ (2.13).

Ниже в разделе 3 строятся неприводимые представления алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ обыкновенными дифференциальными операторами в гильбертовых пространствах полиномов и соответствующие когерентные состояния. С их помощью можно вычислить собственные функции и собственные числа усредненного оператора $\overline{\mathbf{G}}_1$ в каждом из совместных собственных подпространств операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$ (на которых реализуются неприводимые представления алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$), а значит, и решить исходную спектральную задачу (2.3).

3. ПУАССОНОВА СТРУКТУРА И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathcal{F}$

3.1. Алгебра $\mathcal{F}$ (классическая версия). В пределе при $\hbar \rightarrow 0$ соотношениям (2.1) отвечают следующие скобки Пуассона между координатами $q \in (\mathbb{R}^3 \setminus 0)$, $p \in \mathbb{R}^3$:

$$\{q_j, q_k\} = 0, \quad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad \{p_j, p_k\} = -\mu \varepsilon_{jkl} \frac{q_l}{|q|^3};$$

здесь $\mu \in \mathbb{R}$ — структурная константа. Соответствующий пуассонов тензор задает фазовое пространство $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ с симплектической формой

$$\sum_{j=1}^3 dp_j \wedge dq_j + \frac{\mu}{|q|^3} (q_1 dq_2 \wedge dq_3 + q_2 dq_3 \wedge dq_1 + q_3 dq_1 \wedge dq_2).$$

На этом фазовом пространстве символ оператора “действие” $\mathbf{S}_0$ (2.5) — это функция $S_0(q, p) = \lambda|q||p|^2 + \mu^2\lambda/|q| + |q|/(4\lambda)$. Она находится в инволюции с компонентами вектор-функций

$$M = (q \times p) - \mu \frac{q}{|q|}, \quad R = 2\lambda(q, p)p - \lambda q|p|^2 + \frac{\mu^2\lambda q}{|q|^2} - \frac{2\mu\lambda}{|q|}(q \times p) + \frac{1}{4\lambda}q$$

— символами операторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{R}$ (см. формулы (2.7) в работе [2]).

Вместо векторов M и R удобно ввести два новых вектора $J = (M + R)/2$ и $K = (M - R)/2$ (это символы операторов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{K}$; см. формулы (2.6) в работе [2]). Компоненты вектор-функций J и K порождают алгебру $so(4)$ относительно скобки Пуассона:

$$\{J_j, J_k\} = -\varepsilon_{jkl}J_l, \quad \{J_j, K_k\} = 0, \quad \{K_j, K_k\} = -\varepsilon_{jkl}K_l.$$

В этой алгебре имеются два элемента Казимира: $|J|^2$ и $|K|^2$. Они выражаются через функцию S_0 так: $|J|^2 = (S_0 - \mu)^2/4$, $|K|^2 = (S_0 + \mu)^2/4$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть l и r – взаимно простые натуральные числа.

1. Алгебра $\mathcal{F}$ функций на $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$, находящаяся в инволюции с S_0 и $G_0 = lJ_3 + rK_3$, порождается следующими образующими:

$$\begin{aligned} A_1 &= J_3, & A_2 &= K_3, & A_3 &= J_1^2 + J_2^2, & A_4 &= K_1^2 + K_2^2, \\ B &= (J_1 - iJ_2)^r (K_1 + iK_2)^l, & C &= (J_1 + iJ_2)^r (K_1 - iK_2)^l. \end{aligned} \quad (3.1)$$

2. Образующие пуассоновой алгебры $\mathcal{F}$ подчинены полиномиальным соотношениям

$$\begin{aligned} \{A_j, A_k\} &= 0 & \{C, B\} &= 2i(r^2 A_1 A_3^{r-1} A_4^l - l^2 A_2 A_3^r A_4^{l-1}), \\ \{A_1, B\} &= -irB, & \{A_1, C\} &= irC, \\ \{A_2, B\} &= ilB, & \{A_2, C\} &= -ilC, \\ \{A_3, B\} &= 2irA_1B, & \{A_3, C\} &= -2irA_1C, \\ \{A_4, B\} &= -2ilA_2B, & \{A_4, C\} &= 2ilA_2C. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3. Соотношения (3.2) при любых (не обязательно целочисленных) значениях $l \geq 1$, $r \geq 1$ определяют скобки Пуассона на $\mathbb{R}^6$. Симплектические листы $\Omega \subset \mathbb{R}^6$ задаются четырьмя функциями Казимира

$$\varkappa_1 = bc - a_3^r a_4^l, \quad \varkappa_2 = la_1 + ra_2, \quad \varkappa_3 = a_1^2 + a_3, \quad \varkappa_4 = a_2^2 + a_4$$

(здесь $a_1, a_2, a_3, a_4, (b+c)/2, (b-c)/(2i)$ – декартовы координаты на $\mathbb{R}^6$). Реализация $a_j = A_j$, $b = B$, $c = C$ (3.1) подчинена следующим условиям:

$$\varkappa_1 = 0, \quad a_3 \geq 0, \quad a_4 \geq 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим область, где помимо условий (3.3) выполнено дополнительное условие

$$l^2 \varkappa_3 = r^2 \varkappa_4.$$

В этой области симплектические листы параметризуются двумя константами D и γ , причем $|\gamma| \leq lrD$; замыкание листа задается уравнениями

$$\overline{\Omega} = \left\{ bc - a_3^r a_4^l = 0, \quad la_1 + ra_2 = \gamma, \quad a_1^2 + a_3 = \frac{r^2 D^2}{4}, \quad a_2^2 + a_4 = \frac{l^2 D^2}{4} \right\}, \quad (3.4)$$

причем в реализации (3.1) имеем

$$|J|_{|\Omega} = \frac{S_0 - \mu}{2} \Big|_{\Omega} = \frac{rD}{2}, \quad |K|_{|\Omega} = \frac{S_0 + \mu}{2} \Big|_{\Omega} = \frac{lD}{2}, \quad (lJ_3 + rK_3)|_{\Omega} = \gamma.$$

Если $|\gamma| = lrD$, то листы Ω нульмерны и состоят из одной точки

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, b, c) = \left(\frac{\operatorname{sgn}(\gamma) rD}{2}, \frac{\operatorname{sgn}(\gamma) lD}{2}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Если $0 < |\gamma| < lrD$, то при $l > 1$ и $r > 1$ листы Ω диффеоморфны цилиндру и получаются из замыкания (3.4) выкидыванием двух точек

$$P \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_2, a_3, a_4, b, c) = \left(\frac{\text{sgn}(\gamma) rD}{2}, \frac{\gamma}{r} - \frac{\text{sgn}(\gamma) lD}{2}, 0, \frac{|\gamma|(lrD - |\gamma|)}{r^2}, 0, 0 \right),$$

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_2, a_3, a_4, b, c) = \left(\frac{\gamma}{l} - \frac{\text{sgn}(\gamma) rD}{2}, \frac{\text{sgn}(\gamma) lD}{2}, \frac{|\gamma|(lrD - |\gamma|)}{l^2}, 0, 0, 0 \right).$$

Если $0 < |\gamma| < lrD$, то в случаях $l > 1$, $r = 1$ и $l = 1$, $r > 1$ листы диффеоморфны плоскости. В случае $l > 1$, $r = 1$ листы получаются из замыкания (3.4) выкидыванием точки Q , а в случае $l = 1$, $r > 1$ листы получаются из $\bar{\Omega}$ выкидыванием точки P .

Если $0 < |\gamma| < lrD$, то при $l = r = 1$ листы диффеоморфны сфере $\mathbb{S}^2$.

В случае $\gamma = 0$ листы диффеоморфны цилиндру и получаются из $\bar{\Omega}$ (3.4) выкидыванием двух точек

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, b, c) = \left(\pm \frac{rD}{2}, \mp \frac{lD}{2}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Во всех случаях выброшенные точки сами являются нульмерными симплектическими листами.

4. Кэлерова структура на листах Ω вводится с помощью комплексной координаты

$$z = \frac{c}{(rD/2 + a_1)^r (lD/2 - a_2)^l}.$$

Образующие $a_j|_{\Omega}$, $b|_{\Omega}$, $c|_{\Omega}$ выражаются через z следующим образом:

$$a_1 = \frac{rD}{2} - \frac{|\gamma| - \gamma}{2l} - ra(|z|^2),$$

$$a_2 = -\frac{lD}{2} + \frac{|\gamma| + \gamma}{2r} + la(|z|^2),$$

$$a_3 = \left(\frac{|\gamma| - \gamma}{2l} + ra(|z|^2) \right) \left(rD - \frac{|\gamma| - \gamma}{2l} - ra(|z|^2) \right),$$

$$a_4 = \left(\frac{|\gamma| + \gamma}{2r} + la(|z|^2) \right) \left(lD - \frac{|\gamma| + \gamma}{2r} - la(|z|^2) \right),$$

$$b = \left(rD - \frac{|\gamma| - \gamma}{2l} - ra(|z|^2) \right)^r \left(lD - \frac{|\gamma| + \gamma}{2r} - la(|z|^2) \right)^l \bar{z},$$

$$c = \left(rD - \frac{|\gamma| - \gamma}{2l} - ra(|z|^2) \right)^r \left(lD - \frac{|\gamma| + \gamma}{2r} - la(|z|^2) \right)^l z.$$

Здесь $a = a(x)$ — функция, обратная к функции

$$x = x(a) = \frac{((|\gamma| - \gamma)/(2lr) + a)^r ((|\gamma| + \gamma)/(2lr) + a)^l}{(D - (|\gamma| - \gamma)/(2lr) - a)^r (D - (|\gamma| + \gamma)/(2lr) - a)^l}$$

на промежутке $0 \leq a \leq D - |\gamma|/(lr)$. Симплектическая структура на листах Ω , соответствующая скобкам (3.2), имеет вид $\omega = ia'(|z|^2) d\bar{z} \wedge dz$. Симплектическая площадь листа равна

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \omega = D - \frac{|\gamma|}{lr}.$$

3.2. Алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ (квантовая версия). Согласно определению алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ ее неприводимые представления реализуются на совместных собственных подпространствах операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$, где $\mathbf{S}_0$ принимает значения $\hbar(l + r)d/2$, а $\mathbf{G}_0$ — значения $\hbar(m - (l - r)/2)d$. Здесь l, r — взаимно простые натуральные числа, $d \in \mathbb{N}$, а $m = m(j_1, j_2) = rj_2 - lj_1$, где $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j_1 \leq rd - 1$, $0 \leq j_2 \leq ld - 1$.

Отметим, что разным парам чисел j_1, j_2 может соответствовать одно и то же значение $m = m(j_1, j_2)$. Поэтому прежде всего введем обозначения для однозначной записи чисел m .

ЛЕММА. Пусть l, r — взаимно простые натуральные числа; $d \in \mathbb{N}$;

$$m = rj_2 - lj_1, \quad (3.5)$$

где $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j_1 \leq rd - 1$, $0 \leq j_2 \leq ld - 1$.

Тогда существует единственная тройка целых чисел $(m_1^0, m_2^0, \Delta m)$ такая, что

$$m = rm_2^0 - lm_1^0 + l\Delta m, \quad 0 \leq m_1^0 \leq r - 1, \quad 0 \leq m_2^0 \leq l - 1, \quad |\Delta m| \leq d - 1. \quad (3.6)$$

Верно и обратное: если некоторая тройка целых чисел $(m_1^0, m_2^0, \Delta m)$ удовлетворяет условиям (3.6), то найдутся числа j_1 и j_2 такие, что выполнено условие (3.5), а именно

$$j_1 = m_1^0 + r \left(\frac{|\Delta m|}{2} - \frac{\Delta m}{2} + j \right), \quad j_2 = m_2^0 + l \left(\frac{|\Delta m|}{2} + \frac{\Delta m}{2} + j \right),$$

где $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq d - 1 - |\Delta m|$.

3.2.1. Гипергеометрическое представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$. Пусть $l, r, d \in \mathbb{N}$, $m = rm_2^0 - lm_1^0 + l\Delta m$, где $m_1^0, m_2^0, \Delta m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m_1^0 \leq r - 1$, $0 \leq m_2^0 \leq l - 1$, $|\Delta m| \leq d - 1$. Введем обозначения

$$m_1 \stackrel{\text{def}}{=} m_1^0 + r \left(\frac{|\Delta m|}{2} - \frac{\Delta m}{2} \right), \quad m_2 \stackrel{\text{def}}{=} m_2^0 + l \left(\frac{|\Delta m|}{2} + \frac{\Delta m}{2} \right) \quad (3.7)$$

и определим положительные числа

$$\kappa_0 = 1, \quad \kappa_j = (-1)^{(l+r)j} \frac{(1 + m_1 - rd)_{rj} (1 + m_2 - ld)_{lj}}{(1 + m_1)_{rj} (1 + m_2)_{lj}}, \quad 1 \leq j \leq d - 1 - |\Delta m|. \quad (3.8)$$

Здесь операция $(\alpha)_j$ определяется формулой

$$(\alpha)_j \equiv \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+j-1), \quad (\alpha)_0 \equiv 1. \quad (3.9)$$

Используя числа κ_j , введем гильбертово пространство $\mathcal{P}^{l,r}[d, m]$ полиномов степени не выше $d-1-|\Delta m|$: $f(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{d-1-|\Delta m|} f_j \bar{z}^j$. Здесь z – стандартная комплексная координата на плоскости z , $\bar{z}$ обозначает комплексное сопряжение. Скалярное произведение в $\mathcal{P}^{l,r}[d, m]$ определим формулой

$$\langle f, f' \rangle_{\mathcal{P}^{l,r}[d, m]} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{d-1-|\Delta m|} \frac{1}{\kappa_j} f_j \bar{f}'_j. \quad (3.10)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $l, r, d \in \mathbb{N}$; $m = rm_2^0 - lm_1^0 + lr\Delta m$, где $m_1^0, m_2^0, \Delta m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m_1^0 \leq r-1$, $0 \leq m_2^0 \leq l-1$, $|\Delta m| \leq d-1$; m_1, m_2 – числа (3.7); и пусть $\hbar > 0$.

Дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \mathring{A}_1 &= \hbar \left(\frac{rd-1}{2} - m_1 - r\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \\ \mathring{A}_2 &= -\hbar \left(\frac{ld-1}{2} - m_2 - l\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \\ \mathring{A}_3 &= \frac{\hbar^2 (r^2 d^2 - 1)}{4} - \mathring{A}_1^2, \\ \mathring{A}_4 &= \frac{\hbar^2 (l^2 d^2 - 1)}{4} - \mathring{A}_2^2, \\ \mathring{B} &= \hbar^{l+r} \prod_{p=0}^{r-1} \left(rd - m_1 + p - r\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \prod_{q=0}^{l-1} \left(ld - m_2 + q - l\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \bar{z}, \\ \mathring{C} &= \frac{\hbar^{l+r}}{\bar{z}} \prod_{p=0}^{r-1} \left(m_1 - p + r\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \prod_{q=0}^{l-1} \left(m_2 - q + l\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

в пространстве $\mathcal{P}^{l,r}[d, m]$ задают неприводимое представление алгебры (2.13) со структурными константами l и r , соответствующее симплектическому листу Ω (3.4) с параметрами $D = \hbar d$, $\gamma = \hbar(m - (l-r)d/2)$. В этом представлении операторы $\mathring{A}_j$ эрмитовы: $\mathring{A}_j = \mathring{A}_j^*$, а $\mathring{B}$ и $\mathring{C}$ взаимно сопряжены: $\mathring{B} = \mathring{C}^*$.

Это представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ мы назовем *гипергеометрическим*.

Алгоритм построения представлений алгебры (2.13) в гильбертовых пространствах полиномов (в том числе и представления (3.11)) описывается в приложении Б статьи [2] и подробно изложен в работе [6].

3.2.2. Гипергеометрические когерентные состояния алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$. Предположим, что выполнены условия теоремы 3.2. Пусть задано произвольное представление соотношений (2.13) со структурными константами l и r в некотором гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_-^{l,r}$. Генераторы этого представления обозначим через $\mathbb{A}_j, \mathbb{B}, \mathbb{C}$. Предположим, что в этом представлении операторы $\mathbb{A}_j$ эрмитовы, а операторы $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ взаимно сопряжены.

Пусть $\chi_0 \in \mathbb{L}_-^{l,r}$ – нормированный “вакуумный” вектор, подчиненный уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\chi_0 &= 0, \\ \mathbb{A}_1\chi_0 &= \hbar\left(\frac{rd-1}{2} - m_1\right)\chi_0, & \mathbb{A}_3\chi_0 &= \hbar^2\left(\frac{r^2d^2-1}{4} - \left(\frac{rd-1}{2} - m_1\right)^2\right)\chi_0, \\ \mathbb{A}_2\chi_0 &= -\hbar\left(\frac{ld-1}{2} - m_2\right)\chi_0, & \mathbb{A}_4\chi_0 &= \hbar^2\left(\frac{l^2d^2-1}{4} - \left(\frac{ld-1}{2} - m_2\right)^2\right)\chi_0. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_z &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{d-1-|\Delta m|} \frac{1}{(1+m_1)_{rj}(1+m_2)_{lj}} \left(\frac{z\mathbb{B}}{\hbar^{l+r}}\right)^j \chi_0 = \\ &= {}_0F_{l+r-1}\left(\left(\frac{1+m_1}{r}, \dots, \frac{r+m_1}{r}, \frac{1+m_2}{l}, \dots, \frac{l+m_2}{l}\right)'; \frac{z\mathbb{B}}{l^l r^r \hbar^{l+r}}\right) \chi_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь ${}_sF_t(\alpha_1, \dots, \alpha_s; \beta_1, \dots, \beta_t; y)$ – гипергеометрический ряд [7]:

$${}_sF_t(\alpha_1, \dots, \alpha_s; \beta_1, \dots, \beta_t; y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \geq 0} \frac{(\alpha_1)_j \dots (\alpha_s)_j}{j! (\beta_1)_j \dots (\beta_t)_j} y^j, \quad (3.13)$$

штрих в выражении ${}_sF_{t-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_s; (\beta_1, \dots, \beta_t)'; y)$ обозначает, что по меньшей мере один из параметров $\beta_1, \dots, \beta_t$ гипергеометрического ряда равен единице и один из таких единичных параметров опускается; операция $(\alpha)_j$ определена формулой (3.9). Мы называем семейство векторов $\mathfrak{H}_z$ (3.12) *гипергеометрическими когерентными состояниями*.

Вычисление показывает, что

$$\langle \mathbb{B}^j \chi_0, \mathbb{B}^i \chi_0 \rangle_{\mathbb{L}_-^{l,r}} = \delta_{ji} \hbar^{2(l+r)} \kappa_j [(1+m_1)_{rj}(1+m_2)_{lj}]^2.$$

Введем ортонормированные векторы

$$\chi_j = (-1)^{lj} \frac{\mathbb{B}^j \chi_0}{\|\mathbb{B}^j \chi_0\|_{\mathbb{L}_-^{l,r}}}, \quad 0 \leq j \leq d-1-|\Delta m|. \quad (3.14)$$

Их линейная оболочка $\mathbb{L}_-^{l,r}[d, m]$ образует подпространство в $\mathbb{L}_-^{l,r}$, на котором реализуется неприводимое представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$.

Гипергеометрические когерентные состояния $\mathfrak{H}_z$ (3.12) могут быть разложены по базису (3.14):

$$\mathfrak{H}_z = \sum_{j=0}^{d-1-|\Delta m|} \overline{g_j(\bar{z})} \chi_j.$$

Здесь $\{g_j\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{P}^{l,r}[d, m]$, состоящий из мономов

$$g_j(\bar{z}) = (-1)^{lj} \sqrt{\kappa_j} \bar{z}^j. \quad (3.15)$$

В частности, если представление $\mathbb{A}_j = \mathbf{A}_j$, $\mathbb{B} = \mathbf{B}$, $\mathbb{C} = \mathbf{C}$ (2.12) реализован в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_-$ и числа k, n связаны с числами l, r, d формулами (2.9), т.е. $n + 1 + |k| = (l + r)d/2$, $k = (l - r)/2$, то векторы χ_j (3.14) имеют вид

$$\chi_j \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{m_1+rj, m_2+l j}^n, \quad (3.16)$$

где ψ_{j_1, j_2}^n – функции (2.11) из работы [2], а m_1, m_2 – числа (3.7). В этом случае векторы χ_j образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathcal{L}_-^{l,r}[d, m] \subset \mathcal{L}_-^k$, где реализуется неприводимая компонента представления (2.12). Это совместное собственное подпространство операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$:

$$\mathcal{L}_-^{l,r}[d, m] = \left\{ \chi \in \mathcal{L}_- \mid \mathbf{S}_0 \chi = \hbar \left(n + 1 + \frac{|k|}{2} \right) \chi, \quad \mathbf{G}_0 \chi = \hbar \left(m - \frac{k}{2} \right) \chi \right\}.$$

Теперь заметим, что скалярное произведение двух когерентных состояний (3.12) задается формулой

$$\langle \mathfrak{H}_{z'}, \mathfrak{H}_{z''} \rangle_{\mathbb{L}_-} = \mathfrak{K}(z' \overline{z''}), \quad \mathfrak{K}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{d-1-|\Delta m|} \kappa_j x^j.$$

Полином $\mathfrak{K}(x)$ является единственным решением *гипергеометрического уравнения*

$$\begin{aligned} x \prod_{p=0}^{r-1} \left(rd - r - m_1 + p - r x \frac{d}{dx} \right) \prod_{q=0}^{l-1} \left(ld - l - m_2 + q - l x \frac{d}{dx} \right) \mathfrak{K} - \\ - \prod_{p=0}^{r-1} \left(m_1 - p + r x \frac{d}{dx} \right) \prod_{q=0}^{l-1} \left(m_2 - q + l x \frac{d}{dx} \right) \mathfrak{K} = 0, \end{aligned}$$

удовлетворяющим условию нормировки $\mathfrak{K}(0) = 1$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(x) = {}_{l+r}F_{l+r-1} \left(\frac{1+m_1}{r} - d, \dots, \frac{r+m_1}{r} - d, \frac{1+m_2}{l} - d, \dots, \frac{l+m_2}{l} - d; \right. \\ \left. \left(\frac{1+m_1}{r}, \dots, \frac{r+m_1}{r}, \frac{1+m_2}{l}, \dots, \frac{l+m_2}{l} \right)' ; (-1)^{l+r} x \right), \end{aligned}$$

где ${}_sF_t$ – гипергеометрическая функция (3.13), а штрих обозначает ту же операцию, что и в формуле (3.12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Полиномы $\mathfrak{K}(x)$ обладают воспроизводящим свойством:*

$$\langle \mathfrak{K}(z'\bar{z}), \mathfrak{K}(z''\bar{z}) \rangle_{\mathcal{P}^{l,r}[d,m]} = \mathfrak{K}(z'\bar{z}'').$$

Здесь $\mathfrak{K}(z'\bar{z})$ и $\mathfrak{K}(z''\bar{z})$ рассматриваются как элементы гильбертова пространства $\mathcal{P}^{l,r}[d,m]$ полиномов от $\bar{z}$ со скалярным произведением (3.10).

Теперь мы укажем явный вид преобразования, сплетающего представления алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ с неприводимыми представлениями. Эта конструкция основана на следующем свойстве когерентных состояний $\mathfrak{H}_z$:

$$\mathbb{A}_j \mathfrak{H}_z = \overline{\mathring{A}_j} \mathfrak{H}_z, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \mathbb{B} \mathfrak{H}_z = \overline{\mathring{C}} \mathfrak{H}_z; \quad \mathbb{C} \mathfrak{H}_z = \overline{\mathring{B}} \mathfrak{H}_z.$$

В этих формулах операторы $\overline{\mathring{A}_j}$, $\overline{\mathring{B}}$, $\overline{\mathring{C}}$ действуют по переменной z и получаются комплексным сопряжением из операторов $\mathring{A}_j$, $\mathring{B}$, $\mathring{C}$, заданных формулами (3.11).

Обозначим через $\mathfrak{h}$ мономорфизм $\mathfrak{h}: \mathcal{P}^{l,r}[d,m] \rightarrow \mathbb{L}_-^{l,r}$, который переводит каждый базисный моном g_j (3.15) в вектор χ_j (3.14), т.е.

$$\mathfrak{h}(g_j) = \chi_j, \quad j = 0, 1, \dots, d-1-|\Delta m|. \quad (3.17)$$

ТЕОРЕМА 3.3. 1. *Когерентное преобразование $\mathfrak{h}: \mathcal{P}^{l,r}[d,m] \rightarrow \mathbb{L}_-^{l,r}[d,m]$, заданное формулой (3.17), унитарно. Обратное преобразование задается формулой*

$$(\mathfrak{h}^{-1}\chi)(\bar{z}) = \langle \chi, \mathfrak{H}_z \rangle_{\mathbb{L}_-}$$

для любого $\chi \in \mathbb{L}_-^{l,r}[d,m]$.

Для любого фиксированного $w \in \mathbb{C}$ преобразование $\mathfrak{h}$ переводит гипергеометрический полином $\mathfrak{K}(w\bar{z})$ в гипергеометрическое когерентное состояние $\mathfrak{H}_w$.

2. *Выполнены формулы коммутации*

$$\mathbb{A}_j \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \mathring{A}_j, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \mathbb{B} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \mathring{B}; \quad \mathbb{C} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \mathring{C},$$

т.е. $\mathfrak{h}$ сплетает абстрактное представление $\mathbb{A}_j, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ алгебры (2.13) в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_-^{l,r}$ с гипергеометрическим (неприводимым) представлением $\mathring{A}_j, \mathring{B}, \mathring{C}$ этой алгебры в гильбертовом пространстве $\mathcal{P}^{l,r}[d,m]$.

В приложении Б работы [2] (подробнее см. [6]) приведен алгоритм построения когерентных состояний (3.12). Ниже в приложении к данной статье описана реализация операторов (2.12) в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$ и выписаны гипергеометрические когерентные состояния (3.12) в этой реализации.

4. РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ КОГЕРЕНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

4.1. Когерентное преобразование дважды усредненной задачи. В силу утверждения 1 теоремы 3.3 спектральная задача в любом представлении алгебры (2.13) может быть переформулирована в терминах дифференциального уравнения в пространстве полиномов $\mathcal{P}^{l,r}[d, m]$.

Объясним это подробнее. Пусть исходная спектральная задача имеет вид

$$f(\overset{3}{\mathbb{B}}, \overset{2}{\mathbb{A}}, \overset{1}{\mathbb{C}})\varphi = \zeta\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{L}_-^{l,r}[d, m], \quad (4.1)$$

где $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4)$, $\mathbb{B}, \mathbb{C}$ – некоторое представление соотношений (2.13) в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_-^{l,r}$, а f – функция шести переменных, например, полином. Тогда когерентное преобразование (3.17)

$$\varphi = \mathfrak{h}(\Phi) \quad (4.2)$$

сводит задачу (4.1) к следующей задаче в пространстве полиномов:

$$f(\overset{3}{\mathring{B}}, \overset{2}{\mathring{A}}, \overset{1}{\mathring{C}})\Phi = \zeta\Phi, \quad \Phi \in \mathcal{P}^{l,r}[d, m]. \quad (4.3)$$

Здесь $\overset{\circ}{A}_j, \overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{C}$ – неприводимое представление соотношений (2.13), заданное формулами (3.11).

Решение задачи (4.3) – некоторый полином, и его можно разложить по базису мономов g_j (3.15):

$$\Phi(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{d-1-|\Delta m|} \Phi^j g_j(\bar{z}). \quad (4.4)$$

Тогда формула (4.2) дает для решения задачи (4.1) выражение

$$\varphi = \sum_{j=0}^{d-1-|\Delta m|} \Phi^j \chi_j, \quad (4.5)$$

где $\{\chi_j\}$ – ортонормированный базис (3.14) в $\mathbb{L}_-^{l,r}[d, m]$.

Рассмотрим теперь нашу конкретную спектральную задачу (2.11). В этом случае мы используем представление $\mathbb{A}_j = \mathbf{A}_j$, $\mathbb{B} = \mathbf{B}$, $\mathbb{C} = \mathbf{C}$ (2.12) алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$, заданное в пространстве $\mathbb{L}_-^{l,r} = \mathcal{L}_-^{l,r}$. Уравнение $\overline{\mathbf{G}}_1\varphi = \zeta\varphi$ представляется в виде (4.1). Для наглядности остановимся на модельном примере (2.2), в котором усредненный гамильтониан $\overline{\mathbf{G}}_1$ задается через образующие алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ одной из явных формул (2.16а)–(2.16г). Заметим, что любые векторы вида $\varphi = \mathfrak{h}(\Phi)$ автоматически дают точные решения первых двух уравнений (2.11) при любых Φ . Третье уравнение (2.11) принимает вид (4.3), т.е.

в случае $l = r = 1$

$$\begin{aligned} & \bar{z}(\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1) \frac{d^2 \Phi}{d\bar{z}^2} + ((|m| - 2d + 3)\bar{z}^2 + 3(|m| - d + 2)\bar{z} + |m| + 1) \frac{d\Phi}{d\bar{z}} + \\ & + \left((d - 1)(d - 1 - |m|)\bar{z} - \frac{3}{2}(d - |m|)(|m| + 1) + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2\hbar^4 d^2} \right) \Phi = 0; \end{aligned} \quad (4.6a)$$

в случае $l = 2, r = 1$

$$\begin{aligned} & 28\hbar^2 \gamma d \bar{z}^2 (\bar{z}^2 - 1) \frac{d^3 \Phi}{d\bar{z}^3} - \\ & - \bar{z} (14\hbar^2 \gamma d (6d - 2m_1 - 2m_2 - 11)\bar{z}^2 - 24\bar{z} + 14\hbar^2 \gamma d (2m_1 + 2m_2 + 5)) \frac{d^2 \Phi}{d\bar{z}^2} + \\ & + (7\hbar^2 \gamma d (12d^2 + m_2^2 + 4m_1 m_2 - 8dm_1 - 8dm_2 + 10m_1 + 11m_2 - 32d + 22)\bar{z}^2 + \\ & + 8(2m_1 + 2m_2 - 3d + 5)\bar{z} - 7\hbar^2 \gamma d (m_2^2 + 3m_1 m_2 + 2m_1 + 4m_2 + 2)) \frac{d\Phi}{d\bar{z}} - \\ & - \left(7\hbar^2 \gamma d (d - 1 - m_1)(2d - 2 - m_2)(2d - 1 - m_2)\bar{z} - \right. \\ & \left. - 2(d - 1 - 2m_1)^2 - (2d - 1 - 2m_2)^2 + 6d^2 + 1 - \frac{16\zeta}{27\hbar^4 d^2} \right) \Phi(\bar{z}) = 0; \end{aligned} \quad (4.6b)$$

в случае $l = 1, r = 2$

$$\begin{aligned} & 28\hbar^2 \gamma d \bar{z}^2 (1 - \bar{z}^2) \frac{d^3 \Phi}{d\bar{z}^3} + \\ & + \bar{z} (14\hbar^2 \gamma d (6d - 2m_1 - 2m_2 - 11)\bar{z}^2 + 24\bar{z} + 14\hbar^2 \gamma d (2m_1 + 2m_2 + 5)) \frac{d^2 \Phi}{d\bar{z}^2} - \\ & - (7\hbar^2 \gamma d (12d^2 + m_1^2 + 4m_1 m_2 - 8dm_1 - 8dm_2 + 11m_1 + 10m_2 - 32d + 22)\bar{z}^2 - \\ & - 8(2m_1 + 2m_2 - 3d + 5)\bar{z} - 7\hbar^2 \gamma d (m_1^2 + 3m_1 m_2 + 4m_1 + 2m_2 + 2)) \frac{d\Phi}{d\bar{z}} + \\ & + \left(7\hbar^2 \gamma d (d - 1 - m_2)(2d - 2 - m_1)(2d - 1 - m_1)\bar{z} + \right. \\ & \left. + 2(d - 1 - 2m_2)^2 + (2d - 1 - 2m_1)^2 - 6d^2 - 1 + \frac{16\zeta}{27\hbar^4 d^2} \right) \Phi(\bar{z}) = 0; \end{aligned} \quad (4.6b)$$

в случае $l + r > 3$

$$\begin{aligned} & \left((l + r)(3lrd^2 + 1) - 12l \left(\frac{1 - rd}{2} + m_1 + r \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 12r \left(\frac{1 - ld}{2} + m_2 + l \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right)^2 - \frac{16\zeta}{\hbar^4 d^2 (l + r)^2} \right) \Phi(\bar{z}) = 0. \end{aligned} \quad (4.6r)$$

Отметим, что в случае $l = r = 1$ дифференциальное уравнение (4.6a) – известное уравнение Хейна¹⁾.

¹⁾Точнее, оригинальное уравнение Хейна [8] получается из (4.6a) после линейной замены переменной $\bar{z} \rightarrow -(3 + \sqrt{5})\bar{z}/2$.

4.2. Асимптотика спектра и собственных функций. В любом из перечисленных четырех случаев всего имеется $d - |\Delta m|$ собственных чисел и независимых полиномиальных решений дифференциального уравнения (4.6а)–(4.6г). Обозначим эти числа через ζ_j , а полиномы – через Φ_j , $j = 0, 1, \dots, d - 1 - |\Delta m|$.

Разложим Φ_j согласно (4.4):

$$\Phi_j(\bar{z}) = \sum_{i=0}^{d-1-|\Delta m|} \Phi_j^i g_i(\bar{z}). \quad (4.7)$$

Тогда собственные функции $\varphi_j \in \mathcal{L}_-^{l,r}[d, m]$ задачи (2.11) получим по формуле (4.5), т.е. $\varphi_j = \sum_{p=0}^{d-1-|\Delta m|} \Phi_j^p \chi_p$, где $\{\chi_j\}$ – базис (3.16) в подпространстве $\mathcal{L}_-^{l,r}[d, m]$.

В частном случае $l + r > 3$ нормированные решения уравнения (4.6г) – мономы (3.15): $\Phi_j(\bar{z}) = g_j(\bar{z})$; поэтому $\Phi_j^p = \delta_j^p$. Следовательно, нормированные собственные функции задачи (2.11) – функции (3.16): $\varphi_j = \chi_j$. Соответствующие собственные значения равны

$$\zeta_j = \frac{\hbar^4 d^2 (l + r)^2}{16} \left((l + r)(3lrd^2 + 1) - 12l \left(\frac{1 - rd}{2} + m_1 + rj \right)^2 - 12r \left(\frac{1 - ld}{2} + m_2 + lj \right)^2 \right).$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\varepsilon \ll 1$, $\hbar > 0$, $\mu = \hbar k/2$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда решение спектральной задачи (2.3) для квантовой частицы в поле Кулона–Дирака, возмущенном однородным магнитным полем и кубическим потенциалом (2.2), задается формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{E}_{j,n,m} &= -\frac{1}{4\lambda_n^2} + \varepsilon \hbar^2 \frac{md - k/2}{\lambda_n} + \varepsilon^2 \left(\hbar^4 \left(md - \frac{k}{2} \right)^2 + \frac{\zeta_j d \hbar}{\lambda_n} \right) + O(\varepsilon^3), \\ \psi &= \psi_{j,n,m} = \sum_{p=0}^{d-1-|\Delta m|} \Phi_j^p \chi_p + O(\varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq j \leq d - 1 - |\Delta m|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь $\lambda_n = \hbar(n + 1 + |k|/2)$, а ζ_j и Φ_j – j -е собственное число и полиномиальное решение одного из уравнений (4.6а)–(4.6г) (в зависимости от значений чисел l, r). Взаимно простые натуральные числа l и r и натуральное число d определяются для каждого значения n формулами (2.8), (2.9) (в случае $k = 0$ следует положить $l = r = 1$, $d = n + 1$); число m – любое целое, представимое в виде (3.6); m_1, m_2 – числа (3.7); χ_j – функции (3.16); Φ_j^i – коэффициенты разложения (4.7); остаток $O(\varepsilon^3)$ оценивается в норме $\mathcal{L}_-$.

В частности, результат этой теоремы применим и к “чистому” эффекту Зеемана, когда кубический потенциал в (2.3) отсутствует ($\gamma = 0$). Здесь в случае $l = r = 1$ числа ζ_j – собственные значения уравнения Хейна (4.6а), а Φ_j – соответствующие полиномы Хейна. В остальных случаях (когда $l + r \geq 3$) числа ζ_j задаются следующими формулами:

в случае $l = 2, r = 1$

$$\zeta_j = -\frac{27\hbar^4 d^2}{16} [24j^2 + 8(2m_1 + 2m_2 - 3d + 2)j + 2(d - 1 - 2m_1)^2 + (2d - 1 - 2m_2)^2 - 6d^2 - 1];$$

в случае $l = 1, r = 2$

$$\zeta_j = -\frac{27\hbar^4 d^2}{16} [24j^2 + 8(2m_1 + 2m_2 - 3d + 2)j + 2(d - 1 - 2m_2)^2 + (2d - 1 - 2m_1)^2 - 6d^2 - 1];$$

в случае $l + r > 3$

$$\zeta_j = \frac{(l + r)^2 \hbar^4 d^2}{16} \left[(l + r)(3ldr^2 + 1) - 12l \left(\frac{1 - rd}{2} + m_1 + rj \right)^2 - 12r \left(\frac{1 - ld}{2} + m_2 + lj \right)^2 \right].$$

При этом коэффициенты Φ_j^i во всех случаях $l + r \geq 3$ имеют вид $\Phi_j^i = \delta_j^i$.

Таким образом, мы развили теорию эффекта Зеемана для частицы в поле электромагнитного монополя. Показано, что вырождение старшей части спектра может быть снято только в далеких (квадратичных или выше) членах теории возмущений по магнитному полю. Снятие вырождения контролируется динамической алгеброй с полиномиальными перестановочными соотношениями (2.13), структура которой определяется арифметической пропорцией (2.8) между главным квантовым числом n и квантовым числом k магнитного заряда. Неприводимые представления (3.11) динамической алгебры реализуются в пространстве полиномов и задают модельные дифференциальные уравнения (4.6) с полиномиальными решениями, которые определяют главный член асимптотики собственных функций в эффекте Зеемана. Дополнительная асимптотика построенных решений (4.8) при больших квантовых числах $n, k \sim 1/\hbar$ может быть получена с помощью гипергеометрических когерентных состояний (П.1) (см. приложение) по той же схеме, которая применялась в работе [4] для случая нулевого магнитного заряда, т.е. когда $k = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ и когерентные состояния в $L^2(\mathbb{R}^4)$

Образующие $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ (2.12) алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ можно реализовать операторами в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$. В этом случае $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — дифференциальные операторы, действующие по переменным $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \widehat{A}_1 = \widehat{J}_3, & \mathbf{A}_2 &= \widehat{A}_2 = \widehat{K}_3, & \mathbf{A}_3 &= \widehat{A}_3 = \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2, & \mathbf{A}_4 &= \widehat{A}_4 = \widehat{K}_1^2 + \widehat{K}_2^2, \\ \mathbf{B} &= \widehat{B} = (\widehat{J}_1 - i\widehat{J}_2)^r (\widehat{K}_1 + i\widehat{K}_2)^l, & \mathbf{C} &= \widehat{C} = (\widehat{J}_1 + i\widehat{J}_2)^r (\widehat{K}_1 - i\widehat{K}_2)^l, \end{aligned}$$

где

$$\hat{J} = \frac{1}{2}(\widehat{M} + \widehat{R}), \quad \widehat{K} = \frac{1}{2}(\widehat{M} - \widehat{R}),$$

а $\widehat{M}, \widehat{R}$ задаются формулами

$$\widehat{M} = \frac{1}{2}C(u)\widehat{w}, \quad \widehat{R} = \frac{1}{4\omega}(\sigma\widehat{w} + \omega^2\sigma u).$$

Здесь $\omega = 1/\lambda$, матрица $C(u)$ и вектор σu для каждого $u \in \mathbb{R}^4$ определяются как

$$C(u) = \begin{pmatrix} u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \\ -u_3 & -u_4 & u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & -u_4 & u_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma u = \begin{pmatrix} 2(u_1u_3 + u_2u_4) \\ 2(u_1u_4 - u_2u_3) \\ u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 \end{pmatrix},$$

а оператор $\widehat{w} \equiv -i\hbar\partial/\partial u$.

В этом представлении когерентные состояния (3.12) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_z = & \frac{\omega}{\pi\hbar} \left(\frac{\sqrt{\omega}(u_1 + i \operatorname{sgn}(m_1 - m_2 + (l-r)(d-j))u_2)}{\sqrt{\hbar}} \right)^{|m_1 - m_2 + (l-r)(d-j)|} \times \\ & \times \left(\frac{\sqrt{\omega}(u_3 - i \operatorname{sgn}(m_1 - m_2 - (l-r)j)u_4)}{\sqrt{\hbar}} \right)^{|m_1 - m_2 - (l-r)j|} \exp \left\{ -\frac{\omega|u|^2}{2\hbar} \right\} \times \\ & \times \sum_{j=0}^{d-1-|\Delta m|} \sqrt{\kappa_j} ((-1)^l z)^j L_{\min\{r(d-j)-m_1-1, l(d-j)-m_2-1\}}^{|m_1 - m_2 + (l-r)(d-j)|} \left(\frac{\omega(u_1^2 + u_2^2)}{\hbar} \right) \times \\ & \times L_{\min\{m_1+rj, m_2+lj\}}^{|m_1 - m_2 - (l-r)j|} \left(\frac{\omega(u_3^2 + u_4^2)}{\hbar} \right), \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где κ_j — коэффициенты (3.8), а L_N^s — нормированные обобщенные полиномы Лагерра [9]:

$$L_N^s(y) = \sum_{j=0}^N \frac{\sqrt{N!} \Gamma(N+s+1)}{(N-j)! j! \Gamma(j+s+1)} (-1)^{N-j} y^j.$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства образования России (грант PD02-1.1-39), а также INTAS (грант 00-257).

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [2] М. В. Карасев, Е. М. Новикова. ТМФ. 2004. Т. 141. № 3. С. 424–454.
- [3] М. В. Карасев, Е. М. Новикова. УМН. 1994. Т. 49. № 5. С. 169–170.
- [4] М. В. Карасев, Е. М. Новикова. ТМФ. 1996. Т. 108. № 3. С. 339–387.
- [5] H. V. McIntosh, A. Cisneros. J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 3. P. 896–916; I. Mladenov, V. Tsanov. J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 5865–5871; T. Iwai, Y. Uwano. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 4083–4104; I. Mladenov. Ann. Inst. H. Poincaré. 1989. V. 50. P. 219–227; A. Yoshioka, K. Ii. J. Math. Phys. 1990. V. 31. № 6. P. 1388–1394.
- [6] M. V. Karasev, E. M. Novikova. Adapted connections, Hamilton dynamics, geometric phases and quantization over isotropic submanifolds. In: Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry. Ed. M. V. Karasev. Providence, RI: AMS Publ., 1998. P. 1–202.
- [7] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [8] Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
- [9] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 12.IV.2004 г.