Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Задача Смолуховского для электронов в металле, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 1, 93–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1764>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:33:48

© 2005 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ЗАДАЧА СМОЛУХОВСКОГО ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛЕ

Получено аналитическое решение задачи Смолуховского о скачке температуры и электрического потенциала в металле под действием нормального к поверхности градиента температуры. Проведен учет характера аккомодации энергии электронов на поверхности. Найдены аналитическое выражение для электрического поля, генерируемого тепловыми процессами, распределения температуры и электрического потенциала.

Ключевые слова: скачок температуры, электрический потенциал, поток тепла, коэффициент аккомодации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Смолуховского о скачке температуры является одной из важнейших в кинетической теории [1]. Аналитическое решение этой задачи получено сравнительно недавно для одноатомного газа [2] и для молекулярных газов [3]. Не менее важна эта задача и для металла, в частности при низких температурах, когда длина свободного пробега электронов велика. Большой интерес вызывает вопрос о распределении температуры вблизи поверхности металла. Особенно это важно для металлических образцов малого размера, типичных для микроэлектроники. Большое значение имеет также вопрос о распределении электрического потенциала вблизи поверхности металла при наличии процессов теплообмена на поверхности. Существенное влияние на указанные процессы оказывает характер аккомодации энергии электронов на поверхности.

Несмотря на большую теоретическую и практическую значимость этих вопросов, до сих пор отсутствовали аналитические решения соответствующих задач. Цель данной работы – устранить этот пробел.

Рассмотрим плоскую границу раздела между металлом и окружающей средой. Предположим, что имеется поток тепла в металле, текущий к (или от) поверхности. Введем декартову систему координат с центром на поверхности и осью x , перпендикулярной поверхности и направленной вглубь металла. Тогда на расстояниях от поверхности, существенно превышающих длину l свободного пробега электронов, потоку тепла соответствует постоянный градиент температуры $G_T = dT/dx$ (здесь и далее будем пренебрегать возможной анизотропией свойств металла).

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: latyshev@comail.ru, yushkanov@mtu-net.ru

Слой, примыкающий к границе раздела и имеющий толщину порядка l , будем называть, как это принято в кинетической теории [1], слоем Кнудсена. Вне слоя Кнудсена профиль температуры имеет вид $T = T_0 + G_T x$. Обозначим температуру поверхности через T_s . Скачком температуры называют величину $\Delta T = T_0 - T_s$. Эта величина при малых градиентах температуры пропорциональна градиенту G_T : $\Delta T = C_T l G_T$. Коэффициент C_T , не зависящий от G_T , называется коэффициентом скачка температуры. Для определения коэффициента C_T необходимо решить кинетическое уравнение вблизи поверхности металла в слое Кнудсена. Вместо абсолютного скачка температуры ΔT обычно имеют дело с относительным скачком $\varepsilon_T = C_T l g_T$, где $g_T = G_T / T_s$ – логарифмический градиент температуры.

Отметим, что на величину скачка температуры существенное влияние оказывает характер взаимодействия электронов с поверхностью металла. Это обстоятельство требует соответствующей модификации граничных условий с целью учета степени аккомодации энергии электронов на границе. Подобный учет проводится посредством введения соответствующего коэффициента аккомодации.

В общем случае процессы теплопроводности в металле сопровождаются возникновением разности потенциалов и электрического поля [4]. Поэтому наряду с задачей о распределении температуры вблизи поверхности возникает задача о поведении электрического поля в слое Кнудсена, генерируемого тепловыми процессами.

В работе [5] был исследован частный случай данной задачи при коэффициенте аккомодации, равном нулю. Общая постановка задачи рассматривается в настоящей работе. Другие работы в этом направлении в данной постановке авторам неизвестны.

Целью данной работы является вычисление скачка температуры в металле на основе аналитического решения кинетического уравнения для электронов с учетом характера аккомодации энергии на поверхности. Отметим, что мы рассматриваем общий случай произвольной степени вырождения электронного газа. Поэтому полученные результаты справедливы в широком диапазоне температур и для широкого класса материалов, включая полуметаллы.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим металл, в котором поверхность Ферми имеет сферическую форму. В кинетике металлов часто используется кинетическое уравнение для электронов в так называемом τ -приближении [4], [6], [7]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{\tau} (f_F^0 - f), \quad (2.1)$$

где f – функция распределения электронов, e_0 – заряд электрона, $\mathbf{p}$ – импульс электрона, $\mathbf{E}$ – электрическое поле, $\mathbf{v}$ – скорость электронов, τ – время релаксации электронов, f_F^0 – функция распределения Ферми.

Для нейтрального ферми-газа аналогичное уравнение рассматривалось в [4], [8]. При конечной температуре необходимо учитывать, что время релаксации τ может зависеть от скорости движения электронов. Для полностью вырожденного электронного газа это не принципиально, так как в кинетическом процессе участвуют только электроны на поверхности Ферми с одинаковой скоростью (скоростью Ферми). При конечной температуре это уже не так, и вопрос о зависимости времени релаксации от скорости электронов приобретает существенное значение.

В кинетической теории используются модели [9] с различной зависимостью времени релаксации от скорости частиц, участвующих в кинетическом процессе (в частности, от скорости электронов). В случае $\tau = \text{const}$ уравнение (2.1) обычно называют уравнением Бхатнагара–Гросса–Крука. В случае, когда время релаксации пропорционально скорости частиц (электронов), это уравнение называют уравнением Вильямса [10].

Если доминирует рассеяние электронов на примесях, то наиболее разумным представляется предположение о постоянстве длины свободного пробега электронов. При этом время релаксации τ пропорционально скорости электронов, т.е. $\tau = l/w$, где $w = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$, $\mathbf{u}$ – средняя скорость движения электронов. Отметим, что в металлах во всех физически реализуемых случаях выполняется условие $u \ll v$. Поэтому в дальнейшем везде вместо w будем писать v .

Кроме того, при конечной температуре наряду с кинетическим уравнением для электронов необходимо, вообще говоря, принимать во внимание кинетическое уравнение, описывающее поведение фононов.

Пусть функция распределения фононов f_{ph} удовлетворяет кинетическому уравнению [4], [7]

$$\frac{\partial f_{\text{ph}}}{\partial t} + (\mathbf{C}\nabla)f_{\text{ph}} = J(f_{\text{ph}}, f), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{C}$ – скорость фононов, $J(f_{\text{ph}}, f)$ – интеграл столкновения, учитывающий рассеяние фононов на электронах, рассеяние на дефектах решетки и межфононное рассеяние.

При конечной температуре в уравнении (2.1) в качестве равновесной функции распределения электронов вместо f_{F}^0 , соответствующей нулевой температуре, должна присутствовать функция распределения Ферми с некоторой эффективной температурой T_* и эффективным химическим потенциалом μ_* . Отметим, что указанные величины не совпадают, вообще говоря, с локально-равновесными значениями температуры T_{eq} и химического потенциала μ_{eq} .

При этом кинетическое уравнение для электронов в τ -приближении запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f + e_0\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{v}{l}(f_{\text{F}}^* - f). \quad (2.3)$$

Здесь $f_{\text{F}}^* = f_{\text{F}}(\mu_*, T_*)$ – функция распределения Ферми (фермиан),

$$f_{\text{F}}(\mu_*, T_*) = \left[\exp\left(\frac{mv^2}{2kT_*} - \frac{\mu_*}{kT_*}\right) + 1 \right]^{-1},$$

k – постоянная Больцмана, m – эффективная масса электрона.

Закон сохранения числа электронов приводит к следующему равенству, вытекающему из уравнения (2.3):

$$\int v f d\Omega_{\text{F}} = \int v f_{\text{F}}^* d\Omega_{\text{F}}, \quad (2.4)$$

где $d\Omega_{\text{F}} = (2s+1)(2\pi\hbar)^{-3}d\mathbf{p}$, $\hbar$ – постоянная Планка, s – спин электрона.

Для большинства металлов в переносе тепла доминирует вклад электронной подсистемы [7]. В дальнейшем будем рассматривать именно этот случай, пренебрегая вкладом фононов в перенос тепла.

Из кинетического уравнения (2.3) для электронов в стационарном случае вытекает следующее соотношение:

$$\nabla \mathbf{Q}_e = \frac{1}{l} \left(\int v \frac{m}{2} v^2 f_F^* d\Omega_F - \int v \frac{m}{2} v^2 f d\Omega_F \right), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{Q}_e$ — поток тепла, переносимый электронами.

В стационарном случае при отсутствии источников тепла полный поток тепла $\mathbf{Q}$ сохраняется, т.е. $\nabla \mathbf{Q} = 0$. Если вкладом фононов в перенос тепла в металле можно пренебречь, то согласно (2.5) отсюда следует, что $\nabla \mathbf{Q}_e = 0$. Тогда из уравнения (2.5) вытекает следующее соотношение:

$$\int v \frac{m}{2} v^2 f d\Omega_F = \int v \frac{m}{2} v^2 f_F^* d\Omega_F. \quad (2.6)$$

Равенства (2.4) и (2.6) определяют параметры T_* , μ_* кинетического уравнения (2.3).

Отметим, что в рассматриваемом приближении кинетическое уравнение для электронов (2.3) не зависит от кинетического уравнения для фононов (2.2). При этом ряд тонких эффектов, например увлечение электронов фононами, оказываются неучтенными. Для их учета необходим, вообще говоря, выход за пределы простейшего τ -приближения, рассмотрению которого посвящена данная работа.

Будем считать, что массовая скорость много меньше скорости электронов, а возникающие характерные перепады температуры на длине l малы по сравнению с температурой электронного газа. В этих предположениях возможна линейаризация задачи. Будем искать функцию распределения в виде $f = f_F^s + \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})g$. Здесь $f_F^s = f_F(\mu_s, T_s)$, φ — новая неизвестная функция, μ_s — химический потенциал электронов, рассеянных поверхностью, $g = -\partial f_F^s / \partial \varepsilon_s$, $\varepsilon_s = (mv^2/2 - \mu_s)/(kT_s)$, T_s — температура поверхности.

Введем обозначения:

$$\mathbf{c} = \sqrt{\frac{m}{2kT_s}} \mathbf{v}, \quad \alpha = \frac{\mu_s}{kT_s}, \quad \varepsilon_* = \frac{mv^2}{2kT_*} - \frac{\mu_*}{kT_*}.$$

С учетом этих обозначений имеем

$$f_F^*(\varepsilon_*) = \frac{1}{e^{\varepsilon_*} + 1}, \quad f_F^s(c, \alpha) = \frac{1}{e^{c^2 - \alpha} + 1},$$

$$g = g(c, \alpha) = \frac{e^{c^2 - \alpha}}{[e^{c^2 - \alpha} + 1]^2}.$$

Займемся линейаризацией локального фермиана f_F^* , переходя к безразмерным величинам. Заметим, что

$$\varepsilon_* = \frac{T_s}{T_*} \left[\frac{m}{2kT_s} v^2 - \frac{\mu_*}{kT_s} \right] = \frac{T_s}{T_*} (c^2 - \alpha_*), \quad \alpha_* = \frac{\mu_*}{kT_s}.$$

Учитывая, что $T_* = T_s + \delta T_s$, $\alpha_* = \alpha + \delta \alpha_*$, получаем

$$\varepsilon_* = c^2 - \alpha - \frac{\delta T_*}{T_s} (c^2 - \alpha) - \delta \alpha_*,$$

откуда $\delta\varepsilon_* = -\delta\alpha_* - (c^2 - \alpha)\delta T_*/T_s$, где $\delta\varepsilon_* = \varepsilon_* - \varepsilon_s$, $\varepsilon_s = c^2 - \alpha$. Следовательно, $f_F^* = f_F^s + (\partial f_F^*/\partial\varepsilon_*)_{\varepsilon_*=\varepsilon_s}\delta\varepsilon_*$, или

$$f_F^* = f_F^s + g(c, \alpha) \left[\delta\alpha_* + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} \right].$$

Введем безразмерные величины $\mathbf{e} = (e_0 l / k T_s) \mathbf{E}$, $t_* = t \sqrt{2kT_s/m}/l$, $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}/l$ (далее звездочки у этих величин будем опускать). В безразмерных переменных уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{c}\nabla)\varphi - \mathbf{c}\mathbf{e} = c \left[\delta\alpha_* + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} - \varphi \right]. \quad (2.7)$$

Параметры $\delta\alpha_*$, δT_* этого уравнения находятся из законов сохранения (соотношения (2.4) и (2.6)), которые теперь принимают вид

$$\begin{aligned} \int \left[\delta\alpha_* + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} - \varphi \right] c g d^3 c &= 0, \\ \int \left[\delta\alpha_* + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} - \varphi \right] c^3 g d^3 c &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы находим

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_*}{T_s} &= -\frac{r_1(\alpha)}{2\pi\Delta(\alpha)} \int \varphi c g d^3 c + \frac{l_0(\alpha)}{2\pi\Delta(\alpha)} \int \varphi c^3 g d^3 c, \\ \delta\alpha_* - \alpha \frac{\delta T_*}{T_s} &= \frac{r_3(\alpha)}{2\pi\Delta(\alpha)} \int \varphi c g d^3 c - \frac{r_1(\alpha)}{2\pi\Delta(\alpha)} \int \varphi c^3 g d^3 c, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} r_1(\alpha) &= 4 \int_0^\infty c \ln[1 + e^{\alpha - c^2}] dc, & l_0(\alpha) &= \ln(1 + e^\alpha), \\ r_3(\alpha) &= 12 \int_0^\infty c^3 \ln[1 + e^{\alpha - c^2}] dc, & \Delta(\alpha) &= l_0(\alpha)r_3(\alpha) - r_1^2(\alpha). \end{aligned}$$

Представим уравнение (2.7) в стандартной форме:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{c}{2\pi} \int k(c, c') \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}') d\Omega(\alpha), \quad (2.9)$$

где

$$k(c, c') = 1 + \frac{l_0^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \left(c^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l_0(\alpha)} \right) \left(c'^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l_0(\alpha)} \right), \quad d\Omega(\alpha) = \frac{g(c', \alpha) c'}{l_0(\alpha)} d^3 c'.$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть полупространство $x > 0$ заполнено металлом, плоскость zy совмещена с его границей. Предположим, что в металле существует поток тепла, перпендикулярный поверхности. Тогда и электрическое поле, связанное с потоком тепла, будет перпендикулярно поверхности. При этом все параметры задачи будут зависеть только от координаты x .

Система уравнений, описывающих данную задачу, состоит из кинетического уравнения для электронов (2.9) (с учетом стационарности задачи) и уравнения для электрического поля. В безразмерном виде эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu, c) - \mu e(x) &= \frac{1}{l_0(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty k(c, c') \varphi(x, \mu', c') g(c') c'^3 d\mu' dc', \\ e'(x) &= a_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi(x, \mu, c) g(c) c^2 d\mu dc, \quad \mu = \frac{c_x}{c}, \quad a_0^2 = \frac{e_0^2 m^2 l^2}{\pi^2 \varepsilon_0 \hbar^3} \sqrt{\frac{2kT_s}{m}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ε_0 – электрическая постоянная.

Необходимо отметить, что проблема граничных условий для электронов на поверхности металла носит весьма сложный характер [7]. Часто используется зеркально-диффузное граничное условие Максвелла. Однако все характеристики рассеяния электронов на поверхности невозможно свести к одному параметру, выражающему степень зеркальности рассеяния. Даже при чисто диффузном характере рассеяния остается возможность того, что в процессе рассеяния энергия электронов не меняется. Для описания теплообмена при рассеянии на поверхности вводится дополнительный коэффициент аккомодации энергии q_e . В дальнейшем ограничимся случаем чисто диффузного рассеяния электронов на поверхности. При этом функция распределения электронов, отраженных от поверхности, будет совпадать с равновесной функцией распределения Ферми $f_F^e = [e^{\varepsilon_e} + 1]^{-1}$, $\varepsilon_e = (mv^2/2 - \mu_e)/(kT_e)$. Параметры T_e, μ_e , вообще говоря, отличны от параметров поверхности T_s, μ_s и совпадают только в том случае, когда коэффициент аккомодации энергии q_e равен единице.

В линейном приближении функцию распределения f_F^e можно представить в виде

$$f_F^e = f_F^s + g(c, \alpha) \left[\delta\alpha_e + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_e}{T_s} \right],$$

где $\delta\alpha_e = (\mu_e - \mu_s)/(kT_s)$, $\delta T_e = T_e - T_s$.

Преобразуя полученное выражение, получаем, что граничные условия, учитывающие аккомодационный характер рассеяния электронов на поверхности [7] и условия в объеме металла, имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(0, \mu, c) &\equiv \varphi_0(\mu, c) = A_0 + \left(c^2 - \frac{r_3(\alpha)}{r_1(\alpha)} \right) B_0, \quad 0 < \mu < 1, \\ \varphi(x, \mu, c) &= \varphi_{as}(x, \mu, c) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0, \\ e(0) &= 0, \quad e(x) = e_{as} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{as}} &= \varepsilon_T \left(c^2 - \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} \right) + g_T (x - \mu) \left(c^2 - \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} \right) - h_0(\alpha) g_T \mu, \\ e_{\text{as}} &= -g_T h_0(\alpha), \quad \Delta_0(\alpha) = r_0(\alpha) l_0(\alpha) - s(\alpha) r_1(\alpha), \\ h_0(\alpha) &= \frac{\Delta_0(\alpha)}{s(\alpha) l_0(\alpha)} = \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} - \frac{r_1(\alpha)}{l_0(\alpha)}, \quad B_0 = \frac{T_e - T_s}{T_s}, \\ r_0(\alpha) &= \frac{3}{2} \int_0^\infty \ln[1 + e^{\alpha - c^2}] dc, \quad s(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{\alpha - c^2}}{1 + e^{\alpha - c^2}} dc.\end{aligned}$$

Предполагается, что поток E_r энергии электронов, отраженных от поверхности, связан с потоком E_i энергии электронов, падающих на поверхность, следующим условием:

$$q_e = (E_i - E_r)(E_i - E_s)^{-1}. \quad (3.3)$$

Здесь

$$E_i = - \int_{-1}^0 \int_0^\infty \varphi(0, \mu, c) c^5 \mu g(c) d\mu dc, \quad E_r = \int_0^1 \int_0^\infty \varphi_0(\mu, c) c^5 \mu g(c) d\mu dc,$$

E_s — поток энергии электронов от стенки, соответствующий термодинамическому равновесию стенки и электронов, когда $T_e = T_s$,

$$E_s = \int_0^1 \int_0^\infty \varphi_s(\mu, c) c^5 \mu g(c) d\mu dc,$$

причем $\varphi_s(\mu, c) = A_s$, $0 < \mu < 1$. Величина A_s определяется из условия

$$\int_0^1 \int_0^\infty \varphi_s(\mu, c) c^3 \mu g(c) d\mu dc = - \int_{-1}^0 \int_0^\infty \varphi(0, \mu, c) c^3 \mu g(c) d\mu dc.$$

Это условие можно записать в терминах потоков числа электронов: $N_s = N_i$, где N_s — поток числа электронов от стенки, соответствующий термодинамическому равновесию стенки и электронов, N_i — поток числа электронов, падающих на стенку.

Величина q_e , задаваемая формулой (3.3), называется коэффициентом аккомодации энергии. Коэффициент аккомодации энергии является эмпирической величиной. Его значение меняется в пределах от 0 до 1 и зависит от характера взаимодействия между электронами, поверхностными фононами и веществом, граничащим с металлом. При низких температурах и в случае, когда металл граничит с разреженным веществом (газом), коэффициент q_e может быть существенно меньше единицы, так как теплообмен между электронами и другими компонентами в этих условиях затруднен. Следовательно, учет аккомодации энергии для описания процессов теплообмена на границе весьма существен.

Кроме условия аккомодации энергии, на поверхности должно выполняться условие непротекания, состоящее в том, что полный поток числа электронов N_0 через поверхность равен нулю:

$$N_0 = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi(0, \mu, c) c^3 \mu g(c) d\mu dc = 0,$$

или, что эквивалентно, $N_0 = N_r - N_i = 0$, где N_r – поток числа электронов, отраженных от стенки,

$$N_r = \int_0^1 \int_0^\infty \varphi(0, \mu, c) c^3 \mu g(c) d\mu dc.$$

Точно так же, как полный поток числа электронов, полный поток энергии E_0 можно представить в виде $E_0 = E_r - E_i$. Следовательно, условие аккомодации энергии электронов представимо в виде $q_e(E_i - E_s) + E_0 = 0$, где величина полного потока

$$E_0 = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi(x, \mu, c) c^5 \mu g(c) d\mu dc$$

в силу закона сохранения энергии одинакова для всех $x > 0$. Величину E_0 найдем через значение асимптотической функции распределения на стенке:

$$E_0 = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi_{as}(0, \mu, c) c^5 \mu g(c) d\mu dc = -\frac{\Delta(\alpha)}{3l_0(\alpha)} g_T.$$

Отметим, что этот интеграл не зависит от x и его можно вычислять при $x = 0$.

Нетрудно видеть, что $E_s = r_1(\alpha) A_s/4$, $E_r = r_1(\alpha) A_0/4$, поэтому

$$\begin{aligned} E_i &= E_r - E_0 = \frac{1}{4} r_1(\alpha) A_0 + \frac{\Delta(\alpha)}{3l_0(\alpha)} g_T, \\ E_i - E_s &= E_r - E_0 - E_s = \frac{1}{4} r_1(\alpha) (A_0 - A_s) + \frac{\Delta(\alpha)}{3l_0(\alpha)} g_T. \end{aligned}$$

Теперь из условия аккомодации энергии электронов находим

$$A_0 = A_s + \frac{1 - q_e}{q_e} \frac{4\Delta(\alpha)}{3l_0(\alpha)r_1(\alpha)} g_T. \quad (3.4)$$

Из соотношений на потоки электронов $N_s = N_i$, $N_r = N_i$ вытекает, что $N_s = N_r$, откуда

$$A_s = A_0 - \frac{\Delta(\alpha)}{l_0(\alpha)r_1(\alpha)} B_0. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) находим величину $B_0 = 4(1 - q_e)g_T/(3q_e)$. Итак, найдена постоянная B_0 в первом из граничных условий (3.2). Другая постоянная A_0 заранее не задается, а определяется из решения задачи.

Функция φ_{as} описывает теплопроводность электронного газа в объеме металла. Процесс теплопроводности сопровождается появлением электрического поля e_{as} (термо-электрический эффект, описанный, например, в [4]). Условие $e(0) = 0$ связано с предположением об отсутствии электрического поля вне металла.

Подчеркнем, что функции φ_{as} , e_{as} являются решением системы (3.1).

4. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ

Согласно структуре функции $\varphi_{\text{ас}}$ ищем функцию φ в виде

$$\varphi(x, \mu, c) = h_1(x, \mu) + \left(c^2 - \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} \right) h_2(x, \mu). \quad (4.1)$$

Получим систему уравнений

$$\mu \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1(x, \mu) = \bar{h}_1(x) + \mu e(x), \quad (4.2)$$

$$\mu \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2(x, \mu) = \bar{h}_2(x), \quad \bar{h}_j(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_j(x, \mu) d\mu, \quad j = 1, 2, \quad (4.3)$$

$$e'(x) = a^2 \bar{h}_1(x), \quad a^2 = a_0^2 s(\alpha). \quad (4.4)$$

Граничные условия (3.2) согласно (4.1) имеют следующий вид

$$h_1(0, \mu) = A_0 + l_1(\alpha) B_0, \quad 0 < \mu < 1, \\ l_1(\alpha) = \frac{\Delta_1(\alpha)}{s(\alpha) r_1(\alpha)} = \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} - \frac{r_3(\alpha)}{r_1(\alpha)}, \quad \Delta_1(\alpha) = r_0(\alpha) r_1(\alpha) - s(\alpha) r_3(\alpha), \quad (4.5)$$

$$h_1(x, \mu) = -h_0(\alpha) g_T \mu + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad -1 < \mu < 0;$$

$$h_2(0, \mu) = B_0, \quad 0 < \mu < 1, \\ h_2(x, \mu) = \varepsilon_T + g_T(x - \mu) + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad -1 < \mu < 0; \quad (4.6)$$

$$e(0) = 0, \quad e(x) = e_{\text{ас}} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (4.7)$$

Обратим внимание на то, что задача (3.1), (3.2) распадается на две задачи, связанные только граничными условиями. Это задача (4.3), (4.6) о скачке температуры в металле и задача (4.2), (4.4), (4.5), (4.7) о поведении электрического поля вблизи поверхности при наличии нормального к поверхности градиента температуры g_T . Начнем с первой задачи.

5. ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В МЕТАЛЛЕ

Рассмотрим задачу (4.3), (4.6). Будем искать решение в виде $h_{2\eta}(x, \mu) = e^{-x/\eta} \times \Phi(\eta, \mu)$. Получим характеристическое уравнение

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \eta m(\eta), \quad m(\eta) = \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu) d\mu. \quad (5.1)$$

В силу однородности уравнения (4.3) можно считать, что $m(\eta) \equiv 1$. Тогда из уравнения (5.1) при $\eta \in \sigma_c$, где $\sigma_c = (-1, 0) \cup (0, 1)$, находим (см. [11]) собственные функции Кейза [12], отвечающие непрерывному спектру σ_c :

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu). \quad (5.2)$$

Здесь символ Px^{-1} означает распределение – главное значение интеграла от x^{-1} , $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\lambda(z)$ – дисперсионная функция Кейза [12],

$$\lambda(z) = 1 + \frac{z}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{u-z}.$$

Двойному нулю при $z = \infty$ функции $\lambda(z)$ отвечают два решения уравнения (4.3): $h_2(x) = 1$, $h_2(x) = x - \mu$. Решение задачи (4.3), (4.6) ищем в виде разложения по собственным решениям:

$$h_2(x, \mu) = \varepsilon_T + g_T(x - \mu) + \int_0^1 e^{-x/\eta} \Phi(\eta, \mu) m(\eta) d\eta. \quad (5.3)$$

В разложении (5.3) неизвестными являются величина скачка температуры ε_T и функция $m(\eta)$.

Используя граничные условия (4.6), перейдем от разложения (5.3) к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши [13], [14]:

$$\varepsilon_T - B_0 - g_T \mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta m(\eta)}{\eta - \mu} d\eta + \lambda(\mu) m(\mu) = 0. \quad (5.4)$$

Для решения этого уравнения введем вспомогательную функцию

$$M(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta m(\eta)}{\eta - z} d\eta, \quad (5.5)$$

аналитическую в комплексной плоскости с разрезом $[0, 1]$. Граничные значения $M(z)$ сверху и снизу на этом разрезе связаны между собой формулами Сохоцкого [13], [14]

$$\begin{aligned} M^+(\mu) - M^-(\mu) &= \pi i m(\mu), \\ \frac{1}{2}[M^+(\mu) + M^-(\mu)] &= M(\mu), \quad 0 < \mu < 1, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где функция $M(\mu)$ определяется формулой (5.5). Нам понадобятся формулы Сохоцкого и для дисперсионной функции $\lambda(z)$:

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = \pi i \mu, \quad \frac{1}{2}[\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu)] = \lambda(\mu), \quad -1 < \mu < 1,$$

где

$$\lambda(\mu) = 1 + \frac{\mu}{2} \ln \frac{1-\mu}{1+\mu}.$$

С помощью этих двух формул и равенств (5.6) сведем уравнение (5.4) к неоднородной краевой задаче Римана [14]:

$$\lambda^+(\mu)[M^+(\mu) + \varepsilon_T - B_0 - g_T \mu] = \lambda^-(\mu)[M^-(\mu) + \varepsilon_T - B_0 - g_T \mu], \quad 0 < \mu < 1.$$

Решим соответствующую однородную краевую задачу:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Заметим, что кривая $z = \lambda^+(\mu)/\lambda^-(\mu) = e^{2i\theta(\mu)}$, $0 \leq \mu \leq 1$, где $\theta(\mu) = \arg \lambda^+(\mu)$, один раз пробегает единичную окружность в положительном направлении. Каноническое решение (решение, порядок которого в бесконечности равен индексу задачи) имеет вид

$$X(z) = \frac{1}{z} e^{V(z)}, \quad V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\zeta(u)}{u-z} du,$$

$$\zeta(u) = \theta(\mu) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\lambda(u)}{\pi u}.$$

Неоднородную краевую задачу с помощью однородной преобразуем к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе:

$$X^+(\mu)[M^+(\mu) + \varepsilon_T - B_0 - g_T \mu] = X^-(\mu)[M^-(\mu) + \varepsilon_T - B_0 - g_T \mu], \quad 0 < \mu < 1.$$

Общее решение этой задачи содержит одну произвольную постоянную C :

$$M(z) = -\varepsilon_T + B_0 + g_T z + \frac{C}{X(z)}. \quad (5.7)$$

Потребуем, чтобы это решение можно было принять в качестве вспомогательной функции (5.5). Постоянную C выберем так, чтобы уничтожить полюс решения (5.7) в точке $z = \infty$: $C = -g_T$. Величину ε_T теперь находим из условия $M(z)|_{z=\infty} = 0$. Разлагая функцию $1/X(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$, приравняем к нулю свободный член в правой части решения (5.7). Получим

$$\varepsilon_T = V_1 g_T + B_0 = \left(V_1 + \frac{4(1-q_e)}{3q_e} \right) g_T, \quad V_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \zeta(u) du = 0.71045 \dots \quad (5.8)$$

Эта формула представляет собой искомую величину температурного скачка в металле. Из (5.8) находим величину коэффициента скачка температуры

$$C_T = V_1 + \frac{4(1-q_e)}{3q_e}.$$

Отметим, что этот коэффициент не зависит от степени вырожденности электронного газа. Из полученной формулы видно, что по мере уменьшения коэффициента аккомодации скачок температуры растет.

Профиль распределения температуры в металле построим согласно (2.8). Используя разложение (4.1), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int \varphi g c d^3 c = l(\alpha) \bar{h}_1 - \frac{\Delta_0(\alpha)}{s(\alpha)} \bar{h}_2,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int \varphi g c^3 d^3 c = r_1(\alpha) \bar{h}_1 - \frac{\Delta_1(\alpha)}{s(\alpha)} \bar{h}_2.$$

Подставляя эти равенства в (2.8), находим

$$\frac{\delta T_*(x)}{T_s} = \bar{h}_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 h_2(x, \mu) d\mu = \varepsilon_T + g_T x + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x/\eta} m(\eta) d\eta,$$

Рис. 1

или, получая $m(\eta)$ с помощью (5.6) и (5.7),

$$\frac{\delta T_*(x)}{T_s} = \varepsilon_T + g_T x + g_T \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-x/\eta} \frac{\sin \zeta(\eta)}{X(\eta)} \frac{d\eta}{\eta}. \quad (5.9)$$

На основании (5.9) можно вычислить аналитически значение относительного скачка температуры на стенке:

$$\frac{\delta T_*}{T_s} = \varepsilon_T + g_T \left(-V_1 + \frac{1}{X(+0)} \right) = g_T \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4(1-q_e)}{3q_e} \right).$$

На рис. 1 приведен профиль распределения температуры в полупространстве, построенный согласно найденному аналитическому выражению. Штриховая линия соответствует асимптотическому профилю температуры.

6. СКАЧОК ПОТЕНЦИАЛА В МЕТАЛЛЕ

Перейдем к решению задачи, состоящей из уравнений (4.2) и (4.4) и граничных условий (4.5) и (4.7). Решения этих уравнений будем искать в виде

$$h_{1\eta}(x, \mu) = e^{-x/\eta} F(\eta, \mu), \quad e_\eta(x) = e^{-x/\eta} E(\eta).$$

Приходим к характеристической системе

$$(\eta - \mu) F(\eta, \mu) = \frac{1}{2} (1 - a^2 \eta \mu) \eta n(\eta), \quad (6.1)$$

$$E(\eta) = -\frac{1}{2} a^2 \eta n(\eta), \quad n(\eta) = \int_{-1}^1 F(\eta, \mu) d\mu. \quad (6.2)$$

Считая, что $\eta n(\eta) \equiv 1$, возьмем при $\eta \in \sigma_c \equiv (-1, 0) \cup (0, 1)$ решение уравнения (6.1) в пространстве обобщенных функций [11]

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1 - a^2\eta^2}{\eta}\Phi(\eta, \mu), \quad (6.3)$$

где Φ – собственная функция Кейза, введенная равенством (5.2).

Дисперсионная функция этой задачи $(1 - a^2z^2)\lambda(z)/z$ имеет три нуля: $z = \infty$ и $z = \pm 1/a$. Соответственно этим нулям имеем три решения системы (4.2), (4.4): $\{h_1 = \mu, e = 1\}$ и $\{h_1 = e^{\mp ax}, e = \mp ae^{\mp ax}\}$. Эти решения отвечают дискретному спектру, а непрерывному спектру отвечают собственные функции (6.3) и (6.2).

Решение задачи будем искать в виде разложений по собственным решениям дискретного и непрерывного спектров:

$$h_1(x, \mu) = -g_T h_0(\alpha)\mu + A_1 e^{-ax} + \int_0^1 e^{-x/\eta} F(\eta, \mu) n(\eta) d\eta, \quad (6.4)$$

$$e(x) = -g_T h_0(\alpha) - aA_1 e^{-ax} - \frac{1}{2}a^2 \int_0^1 e^{-x/\eta} n(\eta) d\eta. \quad (6.5)$$

Неизвестными в разложениях (6.4) и (6.5) являются постоянная A_1 и функция $n(\eta)$, а также постоянная A_0 , которая входит в граничное условие (4.5). Отметим, что слагаемое в (6.5), пропорциональное A_1 , соответствует экранированию Дебая электрического поля.

Заметим, что разложения (6.4), (6.5) автоматически удовлетворяют соответствующим граничным условиям при $x \rightarrow +\infty$. Подстановка этих разложений в граничные условия при $x = 0$ приводит к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} A_0 + l_1(\alpha)B_0 &= -g_T h_0(\alpha)\mu + A_1 + A_2 + (1 - a^2\mu^2)\frac{\lambda(\mu)}{\mu} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - a^2\eta^2) \frac{n(\eta) d\eta}{\eta - \mu}, \quad A_2 = \frac{1}{2}a^2 \int_0^1 \eta n(\eta) d\eta, \\ aA_1 &= -g_T h_0(\alpha) - \frac{1}{2}a^2 \int_0^1 n(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Для решения этой системы воспользуемся методом регуляризации Карлемана–Векуа [14]. Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - a^2\eta^2) \frac{n(\eta) d\eta}{\eta - z}$$

и, как и ранее, сведем первое из уравнений (6.6) к краевой задаче Римана. Не выписывая последнюю, приведем ее решение:

$$N(z) = A_0 - (A_1 + A_2) + l_1(\alpha)B_0 + g_T h_0(\alpha)(z - X(z))^{-1}.$$

Подставим это решение в формулу Сохоцкого для разности граничных значений на разрезе вспомогательной функции $N(z)$. На этом пути находим функцию $n(\eta)$:

$$(1 - a^2\eta^2)n(\eta) = -\frac{g_T h_0(\alpha)}{\pi i} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] = 2g_T h_0(\alpha) \frac{\sin \zeta(\eta)}{\pi X(\eta)}. \quad (6.7)$$

Рис. 2

Условие разрешимости задачи Римана приводит к условию

$$A_0 = A_1 + A_2 - l_1(\alpha)B_0 - g_T h_0(\alpha)V_1.$$

Для вычисления интегралов

$$I_k(a) = \frac{1}{2} \int_0^1 \eta^k n(\eta) d\eta, \quad k = 0, 1,$$

введем функцию $f_k(z) = z^k / [X(z)(1 - a^2 z^2)]$, аналитическую в комплексной плоскости, за исключением разреза $[0, 1]$ и простых полюсов в точках $\pm 1/a$. Отметим, что для металлов величина $1/a$ принадлежит разрезу; это означает, что интегралы I_k являются сингулярными. Возьмем сложный контур (см. рис. 2), состоящий из окружности γ_R достаточно большого радиуса $R = 1/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, окружности γ_{-1} : $|z + 1/a(\alpha)| = 2\varepsilon$ и контура γ_ε , охватывающего разрез $[0, 1]$. Контур γ_ε ориентирован по часовой стрелке (в отличие от остальных контуров), отстоит от разреза на расстоянии ε и содержит часть окружности γ_{+1} : $|z - 1/a(\alpha)| = 2\varepsilon$. По теореме Коши для многосвязных областей

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} f_k(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{-1}} f_k(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\varepsilon} f_k(z) dz.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$I_k(a) = -g_T h_0(\alpha) [\text{Res}_{|\infty} f_k(z) + \text{Res}_{|-1/a} f_k(z) + \text{Res}_{|1/a} f_k(z)].$$

Нетрудно видеть, что $\text{Res } |_{\infty} f_1(z) = -V_1/a^2$, $\text{Res } |_{-1/a} f_1(z) = -1/[2a^2 X(-1/a)]$. Учитывая, что точка $1/a$ лежит на разрезе, имеем

$$\text{Res } |_{1/a} f_1(z) = -\frac{1}{2a^2} \left[\frac{1}{2X+(1/a)} + \frac{1}{2X-(1/a)} \right] = -\frac{\cos \zeta(1/a)}{2a^2 X(1/a)}.$$

Таким образом,

$$A_2 = a^2 I_1(a) = g_T h_0(\alpha) \left[V_1 + \frac{\cos \zeta(1/a)}{2X(1/a)} + \frac{1}{2X(-1/a)} \right]. \quad (6.8)$$

Аналогично выводу (6.8) получаем

$$\text{Res } |_{\infty} f_0(z) = \frac{1}{a^2}, \quad \text{Res } |_{-1/a} f_0(z) = \frac{1}{2aX(-1/a)}, \quad \text{Res } |_{1/a} f_0(z) = -\frac{\cos \zeta(1/a)}{2aX(1/a)}.$$

Следовательно,

$$a^2 I_0(a) = -g_T h_0(\alpha) \left[1 + \frac{a}{2X(-1/a)} - \frac{a \cos \zeta(1/a)}{2X(1/a)} \right].$$

Вычислим сингулярный интеграл из (6.6):

$$N(\mu) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - a^2 \eta^2) \frac{n(\eta) d\eta}{\eta - \mu} \equiv -g_T h_0(\alpha) I(\mu),$$

где

$$I(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu}.$$

Рассуждая, как и выше, с помощью техники контурного интегрирования получим

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \text{Res } |_{\infty} \frac{1}{X(z)(z - \mu)} + \text{Res } |_{\mu} \frac{1}{X(z)(z - \mu)} = \\ &= V_1 - \mu + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{X^+(\mu)} + \frac{1}{X^-(\mu)} \right] = V_1 - \mu + \frac{\cos \zeta(\mu)}{X(\mu)}, \quad \mu \in (0, 1). \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$I(\mu) = V_1 - \mu + \frac{1}{X(\mu)}, \quad -1 < \mu < 0.$$

Введем новый угол

$$\zeta_+(\mu) = \begin{cases} \zeta(\mu), & 0 \leq \mu < 1, \\ 0, & -1 < \mu < 0, \end{cases}$$

с помощью которого объединим два последних интегральных представления в одно:

$$I(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} = V_1 - \mu + \frac{\cos \zeta_+(\mu)}{X(\mu)}, \quad \mu \in (-1, 1).$$

Из последнего уравнения в (6.6) с помощью (6.8) найдем

$$A_1 = \frac{g_T h_0(\alpha)}{2} \left[\frac{\cos \zeta(1/a)}{X(1/a)} - \frac{1}{X(-1/a)} \right], \quad (6.9)$$

$$A_1 + A_2 = g_T h_0(\alpha) \left(V_1 + \frac{1}{X(-1/a)} \right), \quad (6.10)$$

$$A_0 = g_T \left[\frac{h_0(\alpha)}{X(-1/a)} - \frac{4(1-q_e)}{3q_e} l_1(\alpha) \right].$$

Согласно (3.4) и (6.9) находим постоянную A_s :

$$A_s = g_T h_0(\alpha) \left[\frac{1}{X(-1/a)} - \frac{4(1-q_e)}{3q_e} \right].$$

Профиль электрического поля построим, учитывая (6.5), (6.7) и (6.9):

$$\begin{aligned} e(x) = g_T h_0(\alpha) & \left[-1 + \frac{a}{2} \left(\frac{\cos \zeta(1/a)}{X(1/a)} - \frac{1}{X(-1/a)} \right) e^{-ax} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-x/u} \frac{\sin \zeta(u)}{X(u)} \frac{du}{u^2 - a^{-2}} \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Учитывая, что электрическое поле связано с потенциалом $U(x)$ соотношением $e(x) = -dU/dx$, и принимая за нуль потенциал на поверхности, имеем

$$U(x) = - \int_0^x e(x') dx'.$$

Отсюда следует, что вдали от поверхности профиль потенциала имеет следующий вид: $U_{as}(x) = -xe_{as} + \Delta U$. Величину ΔU назовем скачком потенциала. Выражение для нее имеет следующий вид:

$$\Delta U = - \int_0^\infty [e(x) - e_{as}] dx.$$

Подставляя в это равенство найденное выражение для электрического поля, после интегрирования с использованием (6.10) получаем

$$\Delta U = A_1 + \frac{1}{2} a^2 \int_0^1 \eta n(\eta) d\eta = A_1 + A_2 = C_U g_T,$$

где

$$C_U = h_0(\alpha) \left[V_1 + \frac{1}{X(-1/a)} \right] \quad (6.12)$$

есть коэффициент скачка потенциала (см. рис. 3, 4).

Отметим, что коэффициент скачка потенциала, в отличие от коэффициента скачка температуры, не зависит от величины коэффициента аккомодации энергии q_e .

Анализ выражения (6.12) показывает, что коэффициент скачка потенциала меняет знак при $a = 10.795$. Характер поведения скачка потенциала при различных значениях величин a и α виден из рис. 3, 4. На рис. 4 штриховой линией показано асимптотическое значение величины $\alpha C_U(a)$ при $a \rightarrow \infty$.

Рис. 3

Рис. 4

Теперь с помощью (6.11) построим распределение потенциала (см. рис. 3) в полупространстве:

$$\begin{aligned} \frac{U(x)}{g_T h_0(\alpha)} = x + V_1 + \frac{1}{X(-1/a)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \zeta(1/a)}{X(1/a)} - \frac{1}{X(-1/a)} \right) e^{-ax} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-x/\eta} \frac{\sin \zeta(\eta)}{X(\eta)} \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - a^{-2}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Рассмотрим типичные металлы, для которых величина химического потенциала $\alpha \gg 1$. Для оценки интегралов, входящих в распределение (6.13), воспользуемся известной асимптотикой (см. [15], с. 191, формула (58,1)):

$$\int_0^\infty \frac{f(x) dx}{e^{x-\alpha} + 1} = \int_0^\alpha f(x) dx + \frac{\pi^2}{6} f'(\alpha) + \frac{7\pi^2}{360} f'''(\alpha) + \dots, \quad \alpha \gg 1.$$

При $\alpha \gg 1$ имеем

$$\begin{aligned} r_0(\alpha) = \alpha^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} \alpha^{-1/2} + \dots, \quad r_1(\alpha) = \alpha^2 + \frac{\pi^2}{3} + \dots, \\ s(\alpha) = \alpha^{1/2} - \frac{\pi^2}{24} \alpha^{-3/2} + \dots, \quad l_0(\alpha) = \alpha + \dots. \end{aligned}$$

Следовательно, в формулах (6.12) и (6.13) следует положить $h_0(\alpha) = -\pi^2/(6\alpha)$. Величина a определяется в этих формулах как $a = \sqrt{3}\omega_p l/v_F$, где $\omega_p^2 = e_0^2 n m^{-1} \varepsilon_0^{-1}$, ω_p — плазменная частота, n — концентрация электронов.

Рис. 5

На рис. 5 приведен график зависимости потенциала. Так как для металлов при низких температурах часто выполняется условие $a \gg 1$, то, переходя к пределу при $a \rightarrow \infty$

в формуле (6.12), получим, что коэффициент скачка потенциала в этом случае можно вычислять по формуле

$$C_U = -\frac{\pi^2}{6\alpha} \left(V_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{0.090035}{\alpha}.$$

Отметим, что вклады в скачок потенциала моды Дебая и мод Кнудсена (затухающих на расстоянии от поверхности порядка длины свободного пробега электронов) противоположны. В результате превалирует вклад мод Кнудсена, а коэффициент скачка потенциала оказывается малым по абсолютной величине.

(нормированного для удобства на коэффициент $6\alpha/g_T$) при $\alpha \gg 1$ от расстояния до поверхности. Штриховая прямая соответствует асимптотическому профилю потенциала.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые обобщается предложенное ранее [5] кинетическое уравнение Вильямса для нейтрального квантового ферми-газа электронов на случай заряженных квантовых ферми-газов электронов в металле. Разработан математический метод аналитического решения систем уравнений, состоящих из кинетического уравнения для ферми-газа электронов в металле и уравнения Максвелла для электрического поля. В работе впервые вычислена величина скачка потенциала при наличии нормального к поверхности металла потока тепла. Показано, что коэффициент скачка потенциала не зависит от коэффициента аккомодации энергии и меняет знак по мере роста отношения длины свободного пробега электронов к радиусу Дебая.

Благодарности. А. В. Латышев благодарен РФФИ за частичную финансовую поддержку (грант № 03-01-00281).

Список литературы

- [1] К. Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [2] А. В. Латышев. ПММ. 1990. Т. 54. № 4. С. 581.
- [3] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ЖЭТФ. 1998. Т. 114. № 3(9). С. 956.
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
- [5] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ЖТФ. 2003. Т. 73. № 7. С. 37.
- [6] А. А. Абрикосов. Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972.
- [7] Дж. Займан. Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962.
- [8] В. В. Веденяпин. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
- [9] С. Е. Siewert, F. Sharipov. Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 12. P. 4123.
- [10] M. M. R. Williams. Mathematical Methods in Particle Transport Theory. New York: Wiley, 1971.
- [11] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2000.
- [12] К. Кейз, П. Цвайфель. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
- [13] И. К. Лифанов. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО "Янус", 1995.
- [14] Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [15] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 18.11.2004 г.