Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Миловидов, Г. С. Шаров, Замкнутые релятивистские струны в пространствах с нетривиальной геометрией, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 1, 72–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1765>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:15:28

© 2005 г.

А. Е. Миловидов*, Г. С. Шаров*

ЗАМКНУТЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СТРУНЫ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Найдены точные решения уравнений движения для замкнутой релятивистской струны, которая нагружена точечной массой и движется в пространстве, являющемся прямым произведением пространства Минковского на компактное многообразие (многомерный тор). Исследованы физические характеристики состояний системы, описываемых этими решениями.

Ключевые слова: замкнутая релятивистская струна с точечной массой, компактное многообразие.

Свободная от квантовых аномалий теория струн [1], [2] существует в пространстве-времени критической размерности D . В частности, $D = 26$ для бозонной струны и $D = 10$ для струны с фермионными степенями свободы. Попытки решения проблемы лишних измерений имеют целью создание теории без аномалий при $D = 4$ [3] или разработку процедуры компактификации исходного D -мерного пространства Минковского $R^{1,D-1}$ в многообразие $\mathcal{M} = R^{1,3} \otimes K$. Последнее включает компактное многообразие K размерности $D - 4$, характерный размер которого достаточно мал [1].

В настоящей работе мы рассматриваем динамику замкнутой струны в многообразии $\mathcal{M} = R^{1,3} \otimes K$ (являющемся результатом компактификации), не уточняя саму процедуру компактификации. В качестве компакта K выступает $(D - 4)$ -мерный тор: $K = S^1 \otimes S^1 \otimes \dots \otimes S^1$ [1].

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{M}$ замкнутую релятивистскую струну с одной точечной массой m . Эта система описывается действием

$$S = -\gamma \int_{\Omega} \sqrt{-g} d\tau d\sigma - m \int \sqrt{\dot{x}_1^2(\tau)} d\tau. \quad (1)$$

Здесь γ – натяжение струны, g – определитель индуцированной метрики

$$g_{ab} = G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$$

* Тверской государственный университет, Тверь, Россия.
E-mail: s002027@tversu.ru, german.sharov@tversu.ru

на мировой поверхности струны $X^\mu(\tau, \sigma)$, погруженной в $\mathcal{M}$, $G_{\mu\nu}(X)$ – метрика на $\mathcal{M}$, $\Omega = \{\tau, \sigma: \tau_1 < \tau < \tau_2, \sigma_1(\tau) < \sigma < \sigma_2(\tau)\}$; уравнения $x_i^\mu(\tau) = X^\mu(\tau, \sigma_i(\tau))$, $i = 1, 2$, описывают одну и ту же траекторию массивной точки струны на мировой поверхности, имеющей форму трубки [4]:

$$x_1^\mu(\tau) = X^\mu(\tau, \sigma_1(\tau)) \cong X^\mu(\tau^*, \sigma_2(\tau^*)) = x_2^\mu(\tau^*). \quad (2)$$

В параметризации этой линии могут участвовать два различных параметра τ и τ^* , связанных соотношением $\tau^* = \tau^*(\tau)$, которым следует дополнить условие замыкания (2) мировой поверхности. Смысл символа равенства $\cong$ в условии (2) для координат, относящихся к компакту K , будет уточнен ниже.

Замкнутая струна с точечной массой, гомеоморфная окружности с выделенной точкой, может служить моделью точечной (элементарной) частицы, обладающей определенными внутренними степенями свободы. Эти степени свободы играют ту же роль, что и струнные возбуждения в струнных моделях адронов [2], [4]–[6], в модели “протяженная частица” [7] и в других струнных моделях. Особенностью рассматриваемой модели является нетривиальная фундаментальная группа пространства $\mathcal{M}$, содержащего компактное подмногообразие K . Вследствие этого замкнутая струна может относиться к тому или иному гомотопическому классу $\mathcal{M}$.

Полученные с помощью варьирования действия (1) уравнения движения системы без потери общности можно свести к простейшему виду [4], если выбрать параметры τ и σ так, чтобы были выполнены условия ортонормальности

$$(\partial_\tau X \pm \partial_\sigma X)^2 = 0, \quad (3)$$

а также условия

$$\sigma_1(\tau) = 0, \quad \sigma_2(\tau) = 2\pi. \quad (4)$$

Скалярный квадрат в условиях ортонормальности (3) понимается в смысле скалярного произведения $(\xi, \zeta) = G_{\mu\nu}\xi^\mu\zeta^\nu$.

Для замкнутой струны без масс наряду с условиями (3) мы можем без ограничения общности потребовать выполнения равенства $\tau = \tau^*$ в условии замыкания (2). Однако для струны с действием (1) при $m \neq 0$ из-за наличия выделенной (массивной) точки не на всякой мировой поверхности достижимы равенства $\tau = \tau^*$, (3) и (4).

При выполнении условий (3) (означающих, что индуцированная метрика g_{ab} является конформно-плоской) уравнения движения струны принимают вид

$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(X) \left(\frac{\partial X^\lambda}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} - \frac{\partial X^\lambda}{\partial \sigma} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (5)$$

где $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu(X)$ – символы Кристоффеля в $\mathcal{M}$.

Рассматривая в качестве компакта K тор размерности $D - 4$, будем предполагать, что тор K и многообразие $\mathcal{M} = R^{1,3} \otimes K$ являются плоскими, и введем координаты x^μ так, что x^0, x^1, x^2 и x^3 относятся к $R^{1,3}$, а координаты, описывающие K (ниже мы будем обозначать их $x^k, k = 4, 5, \dots$), являясь циклическими с периодом ℓ_k . Последнее означает, что точки с координатами x^k и $x^k + N_k \ell_k$, $N_k \in \mathbb{Z}$, отождествлены: $x^k \cong x^k + N \ell_k$.

Равенство с учетом данной факторизации фигурирует в условии замыкания (2). Принимая во внимание равенства (4), перепишем условие (2) в виде

$$X^\mu(\tau^*, 2\pi) = X^\mu(\tau, 0) + \sum_k N_k \ell_k \delta_k^\mu, \quad (6)$$

где δ_k^μ – символ Кронекера.

Метрика данного многообразия $\mathcal{M}$ совпадает с метрикой пространства Минковского $R^{1,D-1}$: $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Следовательно, в уравнении (5) $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu = 0$, и уравнение линеаризуется.

Однако краевое условие на траектории массивной точки (уравнение ее движения), выводимое из действия (1), остается нелинейным:

$$m \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{X}^\mu(\tau, 0)}{\sqrt{\dot{X}^2(\tau, 0)}} + \gamma [X'^\mu(\tau^*, 2\pi) - X'^\mu(\tau, 0)] = 0, \quad (7)$$

где $\dot{X}^\mu \equiv \partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu \equiv \partial_\sigma X^\mu$.

Итак, динамика замкнутой релятивистской струны с точечной массой в пространстве $\mathcal{M}$ описывается системой уравнений (3)–(7). Будем искать решения этой системы, допускающие линеаризацию краевого условия (7) в рамках условий ортонормальности (3). Для этого используем подход, развитый в работе [8] для струны с массивными концами. Наложим ограничения

$$\sqrt{\dot{X}^2(\tau, 0)} = C = \text{const}, \quad \tau^* = \tau + \tau_0, \quad \tau_0 = \text{const}. \quad (8)$$

После этого уравнения движения сводятся к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} &= 0, \\ X^\mu(\tau + \tau_0, 2\pi) &= X^\mu(\tau, 0) + \sum_k N_k \ell_k \delta_k^\mu, \\ \dot{X}^\mu(\tau, 0) + Q[X'^\mu(\tau + \tau_0, 2\pi) - X'^\mu(\tau, 0)] &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

дополненной условиями ортонормальности (3). Здесь $Q = \gamma C/m$.

Решение системы (9) было найдено методом Фурье в виде линейной комбинации функций $X^\mu(\tau, \sigma) = \alpha^\mu T(\tau) u(\sigma)$. Из системы (9) вытекают краевые задачи для функций $T(\tau)$ и $u(\sigma)$:

$$T''(\tau) + \lambda T = 0, \quad T(\tau + \tau_0) = \kappa T(\tau); \quad (10)$$

$$u''(\sigma) + \lambda u = 0, \quad u(2\pi) = \kappa^{-1} u(0), \quad \lambda u(0) = Q[\kappa u'(2\pi) - u'(0)]. \quad (11)$$

Здесь использовано условие замыкания (6) при $N_k = 0$.

Непосредственная проверка показывает, что решения этих задач существуют, если собственные значения λ неотрицательны.

При $\lambda = 0$ решение системы (9) есть сумма слагаемых вида $e_k^\mu(a_k\tau + b_k\sigma)$, в которых условие (6) приводит к равенствам

$$2\pi b_k = \begin{cases} -a_k\tau_0, & k \leq 3, \\ -a_k\tau_0 + \ell_k N_k, & k > 3. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь единичные векторы $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{D-1}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{M}$, причем e_0, e_1, e_2, e_3 – базис в $R^{1,3}$.

В случае $\lambda \equiv \omega^2 > 0$ в задачах (10), (11) параметр $\kappa = e^{\pm i\omega\tau_0}$, а краевая задача (11) (обобщение задачи Штурма–Лиувилля) имеет нетривиальные решения лишь при выполнении условия

$$\cos 2\pi\omega - \cos \omega\tau_0 = \frac{\omega}{2Q} \sin 2\pi\omega. \quad (13)$$

Эти решения имеют вид $u_n(\sigma) = \sin \omega_n(2\pi - \sigma) + e^{\mp i\omega_n\tau_0} \sin \omega_n\sigma$ и являются собственными функциями задачи (11), отвечающими корням $\omega = \omega_n$ уравнения (13).

Итак, найденные собственные функции задач (10) и (11) позволяют представить решение задачи (9) в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) = & e_0^\mu a_0 \left(\tau - \frac{\tau_0}{2\pi} \sigma \right) + \sum_{k \geq 3} e_k^\mu (a_k \tau + b_k \sigma) + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu [\sin \omega_n(2\pi - \sigma) + e^{i\omega_n\tau_0} \sin \omega_n\sigma] e^{-i\omega_n\tau}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь предполагается, что $\omega_{-n} = -\omega_n$, $\alpha_n^{*\mu} = -\alpha_{-n}^\mu$.

Осталось потребовать выполнения условий ортонормальности (3) и равенства

$$\dot{X}^2(\tau, 0) = C^2,$$

вытекающего из (8), для ряда (14). Это приводит к следующей системе уравнений для коэффициентов этого ряда:

$$\begin{aligned} a_0^2 \left(1 + \frac{\tau_0^2}{4\pi^2} \right) = & \sum_{k \geq 3} (a_k^2 + b_k^2) - 4 \sum_{n > 0} \omega_n^2 (\alpha_n, \alpha_n^*) (1 - \cos \omega_n \tau_0 \cdot \cos 2\pi \omega_n), \\ \frac{\tau_0}{2\pi} a_0^2 + & \sum_{k \geq 3} a_k b_k + 2 \sum_{n > 0} \omega_n^2 (\alpha_n, \alpha_n^*) \sin \omega_n \tau_0 \cdot \sin 2\pi \omega_n = 0, \\ a_0^2 - \sum_{k \geq 3} a_k^2 + & 2 \sum_{n > 0} \omega_n^2 (\alpha_n, \alpha_n^*) \sin^2 2\pi \omega_n = C^2, \\ N_k(e_k, \alpha_n) = & (e_0, \alpha_n) = 0, \quad (\alpha_m, \alpha_n) = 0, \quad m \neq -n. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (13) и (15) образуют систему, определяющую значения параметров, (например, τ_0 и ω_n) для ряда (14). Решения (14), содержащие единственную ненулевую частоту, будем называть одночастотными.

В рассматриваемом многообразии $\mathcal{M}$ даже в простейшем случае одночастотных решений при $\tau_0 = 0$ существуют топологически нетривиальные (отсутствующие в $R^{1,3}$)

решения, описывающие движение замкнутой струны, не стягиваемой в точку. Здесь под струной подразумевается сечение $t = \text{const}$ мировой поверхности (14). Безразмерные частоты $\omega = \omega_n$ этих состояний при $\tau_0 = 0$ являются корнями уравнения

$$\sin \pi \omega \cdot \left(\sin \pi \omega + \frac{\omega}{2Q} \cos \pi \omega \right) = 0. \quad (16)$$

Корням уравнения (16) $\omega_n = n$ отвечают нетривиальные решения

$$X^\mu = e_0^\mu a_0 \tau + \sum_{k>3} e_k^\mu b_k \sigma + A_n \sin n\sigma \cdot e^\mu(n\tau), \quad (17)$$

где

$$e^\mu(n\tau) = e_1^\mu \cos n\tau + e_2^\mu \sin n\tau, \quad a_0 = \sqrt{n^2 A_n^2 + \sum_k b_k^2}, \quad b_k = \frac{\ell_k N_k}{2\pi}.$$

Здесь мы положили $a_k = 0$ для $k \geq 3$ без потери общности, так как слагаемые, содержащие a_k , $k \geq 1$, в выражении (14) описывают прямолинейное равномерное движение системы с постоянной скоростью. Эти слагаемые можно обратить в нуль с помощью преобразования Лоренца.

Решения (17) описывают равномерное вращение в плоскости e_1, e_2 струны, имеющей форму синусоиды, длина которой конечна ввиду цикличности координаты с ортом e_k . Массивная точка покоится (при $\sigma = 0$) или отсутствует.

Корням $\omega_n = -2Q \operatorname{tg} \omega_n \neq n$, обращающим в нуль второй сомножитель уравнения (16), соответствуют ротационные движения

$$X^\mu = e_0^\mu a_0 \tau + \sum_{k>3} e_k^\mu b_k \sigma + A_n \cos[\omega_n(\sigma - \pi)] \cdot e^\mu(\omega_n \tau). \quad (18)$$

Они подобны движениям (17), но масса m (в точке $\sigma = 0$) движется по окружности вместе с вращающейся струной. Два отрезка струны, удерживающие эту массу, присоединены к ней под углом $\beta < \pi$.

В случае $b_k = 0$ уравнения (17), (18) описывают в пространстве Минковского $R^{1,3}$ равномерное вращение сложенной вдвое (и после этого $-(n-1)$ раз) струны. Такие состояния были классифицированы в работе [8]. Они характеризуются наличием точек возврата струны, движущихся со скоростью света (с особенностями метрики $\dot{X}^2 = X'^2 = 0$). В то же время решения (17) и (18) при $b_k \neq 0$, описывающие вращение не стягиваемой в точку струны в $\mathcal{M}$, не имеют таких особенностей.

Одночастотные решения (14) в случае $\tau_0 \neq 0$ представимы в виде

$$\begin{aligned} X^\mu = e_0^\mu a_0 \left(\tau - \frac{\tau_0}{2\pi} \sigma \right) + \sum_{k>3} e_k^\mu \frac{\ell_k N_k}{2\pi} \sigma + \\ + A_n \{ f_n(\sigma) \cdot e^\mu(\omega_n \tau) - \sin \omega_n \tau_0 \cdot \sin \omega_n \sigma \cdot \dot{e}^\mu(\omega_n \tau) \}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\dot{e}^\mu(\omega_n \tau) = -e_1^\mu \sin \omega_n \tau + e_2^\mu \cos \omega_n \tau, \quad f_n(\sigma) = \sin \omega_n (2\pi - \sigma) + \cos \omega_n \tau_0 \cdot \sin \omega_n \sigma.$$

Значения $\tau_0, \omega_n, a_0, A_n = \sqrt{-2(\alpha_n, \alpha_n^*)}$ определяются из системы уравнений (13), (15); $\alpha_n^\mu = A_n(e_1^\mu + ie_2^\mu)/2$; коэффициенты b_k заданы выражением (12).

Из системы (15) следует уравнение

$$1 + \theta^2 - 2\theta \frac{1 - \cos \omega_n \tau_0 \cdot \cos 2\pi \omega_n}{\sin \omega_n \tau_0 \cdot \sin 2\pi \omega_n} = \left(1 - \theta \frac{\sin 2\pi \omega_n}{\sin \omega_n \tau_0}\right) \frac{\gamma^2}{m^2 Q^2} \sum_{k \geq 3} b_k^2. \quad (20)$$

Здесь и ниже $\theta = \tau_0/(2\pi)$. Система уравнений (13), (20) определяет спектр значений τ_0 и ω_n независимо от амплитудных множителей a_0 и A_n .

При $b_k = N_k = 0$ для любого $k \geq 3$ уравнение (20) имеет вид

$$\frac{\tau_0}{2\pi} + \frac{2\pi}{\tau_0} = 2 \frac{1 - \cos \omega_n \tau_0 \cdot \cos 2\pi \omega_n}{\sin \omega_n \tau_0 \cdot \sin 2\pi \omega_n}. \quad (21)$$

В случае $b_k = 0$ решения (19) описывают равномерное вращение замкнутой струны, имеющей форму гипоциклоиды, соединенной под ненулевым углом в массивной точке. Эта форма является сечением $t = t_0 = \text{const}$ мировой поверхности (19):

$$\begin{aligned} X^\mu|_{t=t_0} = A_n \left\{ (f_n \cos \omega_n \theta \sigma + \sin \omega_n \tau_0 \cdot \sin \omega_n \sigma \cdot \sin \omega_n \theta \sigma) e^\mu \left(\frac{\omega_n t_0}{a_0} \right) + \right. \\ \left. + (f_n \sin \omega_n \theta \sigma - \sin \omega_n \tau_0 \cdot \sin \omega_n \sigma \cdot \cos \omega_n \theta \sigma) e^\mu \left(\frac{\omega_n t_0}{a_0} \right) \right\} + e_0^\mu t_0. \quad (22) \end{aligned}$$

Гипоциклоида есть траектория точки окружности, катящейся внутри неподвижной окружности большего радиуса. Обозначив радиусы этих окружностей соответственно r и R , представим уравнение гипоциклоиды в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= (R - r) \cos \frac{r}{R} t + r \cos \frac{R - r}{R} t, \\ y(t) &= (R - r) \sin \frac{r}{R} t - r \sin \frac{R - r}{R} t. \end{aligned} \quad (23)$$

Преобразуем правую часть (22) к виду

$$\begin{aligned} A_n \{ (\sin \pi \omega_n (1 + \theta) \cdot \cos \omega_n (1 - \theta) \sigma + \sin \pi \omega_n (1 - \theta) \cdot \cos \omega_n (1 + \theta) \sigma) e^\mu + \\ + (\sin \pi \omega_n (1 + \theta) \cdot \sin \omega_n (1 - \theta) \sigma - \sin \pi \omega_n (1 - \theta) \cdot \sin \omega_n (1 + \theta) \sigma) e^\mu \} + e_0^\mu t_0. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с уравнениями (23), находим, что линия (22) является гипоциклоидой, если имеет место равенство

$$\frac{\sin \pi \omega_n (1 - \theta)}{\sin \pi \omega_n (1 + \theta)} = \frac{1 - \theta}{1 + \theta}.$$

Оно равносильно условию (21), которое, напомним, ограничивает возможные значения параметров ω_n и θ в случае $a_k = b_k = 0$ при $k \geq 3$. Следовательно, при выполнении условия (21) линия (22) является гипоциклоидой с отношением радиусов окружностей

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - |\theta|}{2}.$$

При этом $|\theta| < 1$, что следует также из принципа причинности.

Данная гипоциклоида вращается в плоскости e_1, e_2 с угловой скоростью $\Omega = \omega_n/a_0$, где a_0 определяется уравнениями (15):

$$a_0^2 = \frac{m^2 Q^2}{\gamma^2(1-v^2)}, \quad (24)$$

$$v^2 = \left(\frac{A_n \omega_n \sin 2\pi\omega_n}{a_0} \right)^2 = \theta \frac{\sin 2\pi\omega_n}{\sin \omega_n \tau_0}. \quad (25)$$

Массивная точка движется со скоростью v по окружности радиуса v/Ω . Вращающаяся гипоциклоида (22) имеет точки возврата, которые движутся со скоростью света. Подобные решения для струнной модели “треугольник” были впервые получены в работе [4].

Одночастотные решения (19), включающие слагаемые с $b_k \neq 0$ (для циклических координат в $\mathcal{M}$), описывают вращающиеся пространственные кривые, не имеющие точек возврата. Последнее означает, что на мировых поверхностях (19) при $b_k \neq 0$ отсутствуют особенности $\dot{X}^2 = X'^2 = 0$.

Существуют различные топологические типы решений (19), различающиеся как гомотопическим классом замкнутой струны (набором чисел N_k , $k > 3$), так и видом проекции струны на плоскость e_1, e_2 . В частности, при $b_k = 0$ данная проекция (22) (гипоциклоида) может иметь различное число точек возврата.

В основу классификации решений (19) положим подход, использованный ранее для описания различных топологических состояний струнной модели бариона “треугольник” [9]. А именно, при фиксированных значениях чисел N_k, ℓ_k и параметров γ, a_0 для заданного топологического типа решения (19) рассмотрим предельный переход $m \rightarrow 0$.

Анализ уравнений (13), (15), (19), (24), (25) показывает, что при $m \rightarrow 0$ величина Q стремится к бесконечности, а значения параметров 2ω и $\tau_0\omega/\pi$ стремятся к целым числам, для которых мы введем следующие обозначения:

$$n_1 = \left| \lim_{m \rightarrow 0} 2\omega \right|, \quad n_2 = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\tau_0\omega}{\pi} = \lim_{m \rightarrow 0} 2\theta\omega. \quad (26)$$

В силу неравенства $|\theta| < 1$ и условия (13), приводящего к равенству $(-1)^{n_1} = (-1)^{n_2}$ (n_1 и n_2 имеют одинаковую четность), допустимы лишь следующие значения параметров (26):

$$n_1 \geq 2, \quad n_2 = n_1 - 2, n_1 - 4, \dots, -(n_1 - 2). \quad (27)$$

Отметим, что среди решений с $n_2 = 0$, которым соответствует $\tau_0 = 0$, в случае $m \neq 0$ следует различать два класса – состояния (17) и (18) с покоящейся и движущейся массивной точкой, соответственно. В пределе $m \rightarrow 0$ решения обоих классов стремятся к одинаковому предельному решению, описывающему вращение сложенной замкнутой струны без масс.

Если учесть последнее обстоятельство, то можно сделать вывод, что набор целых чисел N_k, n_1, n_2 , ограниченных условиями (27), однозначно определяет топологический тип одночастотных состояний (17), (18) или (19) замкнутой струны с массивной точкой

в пространстве $\mathcal{M}$. Фигурировавший в выражениях (17)–(19) индекс n можно воспринимать как мультииндекс: $n = (n_1, n_2)$. Он относится не только к ω_n , A_n , но и к параметрам θ , a_0 , которые также связаны с топологическим типом состояния.

По своему геометрическому смыслу параметр n_1 равен числу точек возврата гипоциклоиды, описываемой выражением (22) в пределе $m \rightarrow 0$, $\ell_k \rightarrow 0$, с учетом их кратности при изменении σ от 0 до 2π . Параметр n_2 характеризует форму данной гипоциклоиды, например для $n_1 = 5$ при $n_2 = 3$ получается криволинейный пятиугольник, а значению $n_2 = 1$ соответствует звезда.

Возможные приложения найденных решений для рассматриваемой модели связаны с описанием внутренних степеней свободы элементарных частиц с заданным набором квантовых чисел и физических характеристик. Вычислим важнейшие из них – энергию E и угловой момент J одночастотных состояний (14).

Для произвольного состояния замкнутой релятивистской струны, нагруженной точечной массой, энергия и угловой момент определяются с помощью следующих интегралов (токов Нётер) [2], [10]:

$$P^\mu = \int_C p^\mu(\tau, \sigma) d\sigma + p_1^\mu(\tau), \quad p^\mu(\tau, \sigma) = \gamma \frac{(\dot{X}, X')X'^\mu - X'^2 \dot{X}^\mu}{[(\dot{X}, X')^2 - \dot{X}^2 X'^2]^{1/2}}, \quad (28)$$

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = \int_C [X^\mu p^\nu - X^\nu p^\mu] d\sigma + [x_1^\mu(\tau)p_1^\nu(\tau) - x_1^\nu(\tau)p_1^\mu(\tau)], \quad (29)$$

где $x_1^\mu(\tau) = X^\mu(\tau, \sigma_1(\tau)) = X^\mu(\tau, 0)$ и $p_1^\mu(\tau) = m\dot{x}_1^\mu(\tau)/\sqrt{\dot{x}_1^2(\tau)}$ – координаты и импульс массивной точки, C – любой замкнутый контур, охватывающий трубнообразную мировую поверхность струны.

Линии $\tau = \text{const}$ на мировой поверхности (19) при $\tau_0 \neq 0$ незамкнуты, поэтому они не могут служить контуром интегрирования. В качестве контура C в интегралах (28), (29) нужно использовать другие линии, например $\tau - \theta\sigma = \text{const}$ (т.е. $t = \text{const}$).

Вычисление интегралов (28), (29) удобно проводить, сделав замену координат $\tilde{\tau} = \tau - \theta\sigma$, $\tilde{\sigma} = \sigma - \theta\tau$, при которой сохраняются условия ортонормальности (3). В ортонормальной калибровке (3) $p^\mu(\tau, \sigma) = \gamma \dot{X}^\mu(\tau, \sigma)$.

Если мы подставим выражения (19) (включая частные случаи (17), (18)) в уравнения (28), то получим следующее выражение для импульса:

$$P^\mu = \gamma \left\{ a_0 [2\pi(1 - \theta^2) + Q^{-1}] e_0^\mu + \theta \sum_{k>3} \ell_k N_k e_k^\mu \right\}. \quad (30)$$

Квадрат энергии равен скалярному квадрату сохраняющегося вектора импульса (28) или (30): $E^2 = P^2 = P_\mu P^\mu$.

Угловой момент (29) не является постоянным для заданной системы из-за анизотропии пространства $\mathcal{M}$. Лишь компоненты $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ с $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, относящиеся к пространству $R^{1,3}$, постоянны. Из них только z -компонента углового момента отлична от нуля:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = j_3^{\mu\nu} J, \quad J = \frac{\gamma}{2\omega_n} \left\{ 2\pi \left[a_0^2 (1 - \theta^2) - \sum_{k>3} b_k^2 \right] + \frac{a_0^2}{Q} - \frac{m^2 Q}{\gamma^2} \right\}, \quad (31)$$

где $j_3^{\mu\nu} = e_1^\mu e_2^\nu - e_1^\nu e_2^\mu = e^\mu \dot{e}^\nu - e^\nu \dot{e}^\mu$.

Выражения (30) и (31) для импульса и углового момента одночастотных состояний (14) можно обобщить на случай $a_k \neq 0$. При этом импульс P^μ и момент J следует дополнить слагаемыми соответственно

$$\Delta P^\mu = \gamma[2\pi(1 - \theta^2) + Q^{-1}] \sum_{k>3} a_k e_k^\mu, \quad \Delta J = -\frac{\gamma}{2\omega_n} [2\pi(1 - \theta^2) + Q^{-1}] \sum_{k>3} a_k^2.$$

Тем не менее ниже мы будем полагать $a_k = 0$, что, как упоминалось ранее, не ведет к потере общности.

В частном случае $N_k = 0$ значения E и J связаны условием

$$J = \frac{1}{2\Omega} (E - m\sqrt{1 - v^2}) = \frac{a_0}{2\omega_n} (E - m\sqrt{1 - v^2}).$$

Здесь v – постоянная скорость массивной точки.

Соотношения (30), (31) задают неявную зависимость $J = J(E^2)$ классического углового момента от квадрата энергии для одночастотного состояния определенного топологического типа. Если фиксирован топологический тип, определяемый числами n_1, n_2, N_k , а также значения m и γ , то состояния (17)–(19) образуют однопараметрическое множество. В качестве параметра данного множества можно использовать любую переменную из следующего набора: ω_n, τ_0 (или $\theta = \tau_0/(2\pi)$), Q, v, a_0, A_n, E, J и др. Остальные параметры выражаются через один заданный с помощью формул (13), (20), (24), (25), (30), (31).

График получающейся при этом зависимости $J = J(E^2)$ (траектория Редже) зависит от выбранного топологического типа одночастотного состояния. В качестве примера на рисунке показаны траектории Редже для состояний (17)–(19), полученные с помощью численных расчетов. Здесь $\gamma = 1/(2\pi)$, $m = 1/2$ для линий 1–4 и $m = 3$ для линии 5.

Топологический тип для каждой из траекторий Редже на рисунке иллюстрируется формой струны (22) – сечения $t = \text{const}$ мировой поверхности. В частности, для кривых 1 и 5 (различающихся лишь значением массы m) проекция этого сечения на плоскость e_1, e_2 есть прямолинейный отрезок с массой m на конце (что отвечает $n_1 = 2, n_2 = 0$); для траектории 2 – криволинейный треугольник с $n_1 = 3, n_2 = 1$; для траектории 3 – кривая, близкая к астроидам с $n_1 = 4, n_2 = 1$; для траектории 4 – “звезда” с $n_1 = 5, n_2 = 1$. Сплошные линии отвечают значению $\sum_k b_k^2 = 0$, тонкие пунктирные – значению $\sum_k b_k^2 = 1$. Отметим, что параметр $\sum_k b_k^2 = (2\pi)^{-2} \sum_k \ell_k^2 N_k^2$ по своему физическому смыслу должен быть мал по сравнению с квадратом размера струны A_n^2 .

Для каждой из траекторий значения параметра ω_n , используемого для параметризации кривой, пробегают интервал, определяемый неравенством $n_1 - 1 < 2\omega_n < n_1$. Для каждого значения ω_n из данного интервала с помощью численного решения уравнений (13), (20) найдены величины θ и Q , а далее – значения v, a_0, E, J с помощью формул (25), (24), (30), (31).

Предел $\omega_n \rightarrow n_1/2 - 0$ для всех траекторий Редже соответствует $E \rightarrow \infty$, в то время как в противоположном пределе $\omega_n \rightarrow (n_1 - 1)/2 + 0$ для траекторий 1, 2, 4, 5 на рисунке массивная точка стремится к центру вращения, а величины E и J – к минимальным значениям для данной траектории. Однако на V-образной траектории 3 пределу

Траектории Редже для одночастотных состояний

$\omega_n \rightarrow (n_1 - 1)/2 + 0$ отвечают верхней ветвь этой кривой и неограниченное возрастание E и J (массивная точка при этом приближается к середине звена кривой, стремящейся к трехзвенной гипоциклоиде).

Траектории Редже для состояний (17)–(19) рассматриваемой модели близки к прямолинейным (переходят в прямолинейные в случае $m = 0$). В наибольшей степени это относится к области энергий $E \gg m$.

Рассмотрим предел $E \rightarrow \infty$, соответствующий пределу $\omega_n \rightarrow n_1/2 - 0$ и реализующийся для всех топологических типов одночастотных решений за исключением решений (17). В данном ультрарелятивистском пределе скорость массивной точки стремится к скорости света, $v \rightarrow 1$, и имеют место соотношения (26), что позволяет исследовать асимптотическое поведение состояний (17)–(19), введя малые параметры $\varepsilon, \varepsilon_i$ такие, что

$$\varepsilon = \sqrt{1 - v^2}, \quad 2\omega = n_1 - \varepsilon_1, \quad n_1\theta = n_2 - \varepsilon_2. \quad (32)$$

Подставив эти соотношения в уравнения (13), (20), (25), выразим через один из малых параметров остальные:

$$\varepsilon_1 \simeq \frac{2n_1}{\pi\nu}\varepsilon + \frac{n_1^3}{3\pi\nu^3}\varepsilon^3, \quad \varepsilon_2 \simeq \frac{2n_2}{3\pi\nu}\varepsilon^3 + \frac{n_2(n_1^2 - 6n_2^2)}{3\pi\nu^3}\varepsilon^5,$$

где $\nu = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. Эти разложения после подстановки в формулы (24), (30), (31) приводят к следующим асимптотическим выражениям для энергии и углового момента в

случае $a_k = 0$:

$$E^2 \simeq \frac{\pi^2 \nu^2 m^2}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{n_1^2 - 2n_2^2}{2\nu^2} \right)^2 + \frac{\pi m^2 (n_1^2 - 2n_2^2)}{3\nu} \cdot \frac{1}{\varepsilon} - \gamma^2 \frac{n_2^2}{n_1^2} \sum_{k>3} b_k^2,$$

$$J \simeq \frac{\pi n_1 m^2}{8\gamma} \left(\frac{1}{\varepsilon^4} - \frac{n_1^2 - 2n_2^2}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{4n_1^2}{3\nu^3} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{2\pi\gamma}{n_1} \sum_{k>3} b_k^2.$$

Используя данные разложения, находим в пределе $v \rightarrow 1$, $E \rightarrow \infty$, $J \rightarrow \infty$ асимптотическое выражение для зависимости J от E^2 в случае состояния произвольного типа с заданными значениями параметров n_1 , n_2 , b_k :

$$J \simeq \alpha' E^2 + \alpha_1 E^{1/2} + \alpha_0, \quad E \rightarrow \infty, \quad (33)$$

где

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{n_1}{n_1^2 - n_2^2}, \quad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{2}n_1 m^{3/2}}{3\sqrt{\pi}\gamma\nu^{3/2}}, \quad \alpha_0 = -\frac{2\pi\gamma(n_1^2 - 2n_2^2)}{n_1\nu^2} \sum_{k>3} b_k^2.$$

Эта зависимость близка к линейному виду [2], [5] $J = \alpha' E^2 + \alpha_0$, однако коэффициент наклона α' для данной модели отличается от значения Намбу $\alpha' = 1/(2\pi\gamma)$ множителем $n_1/\nu^2 = n_1/(n_1^2 - n_2^2)$, зависящим от топологического типа (см. рисунок). Для ротационных движений (17), (18) топологического типа $n_1 = 2$, $n_2 = 0$ (траектории 1 на рисунке) этот множитель достигает максимального возможного значения $1/2$.

Для физических приложений найденных состояний (14)–(19) замкнутой струны с точечной массой необходимо их квантовое описание. Эта процедура, существенно осложненная нелинейностью уравнения (7) при $m \neq 0$, выходит за рамки данной статьи.

Список литературы

- [1] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990.
- [2] *Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко.* Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [3] *И. Н. Никитин.* ТМФ. 1996. Т. 109. № 2. С. 202; hep-th/0401002.
- [4] *Г. С. Шаров.* ТМФ. 1997. Т. 113. № 1. С. 68.
- [5] *Г. С. Шаров.* ЯФ. 1999. Т. 62. № 10. С. 1831; *A. Inopin, G. S. Sharov.* Phys. Rev. D. 2001. V. 63. № 5. P. 054023.
- [6] *G. S. Sharov.* Phys. Rev. D. 2000. V. 62. № 9. P. 094015; hep-ph/0004003.
- [7] *С. В. Талалов.* ТМФ. 2003. Т. 135. № 2. С. 289.
- [8] *В. П. Петров, Г. С. Шаров.* ТМФ. 1996. Т. 109. № 2. С. 187.
- [9] *Г. С. Шаров.* ТМФ. 1998. Т. 114. № 2. С. 277.
- [10] *G. S. Sharov.* Exited states of rotating relativistic string with massive ends. hep-ph/0311060.

Поступила в редакцию 22.III.2004 г.