Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Сладь, Спектры масс в теории бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 1, 21–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1766>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:30:01

© 2005 г.

Л. М. Сладь*

СПЕКТРЫ МАСС В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНЫХ ПОЛЕЙ С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассматривается задача о характеристиках спектров масс в дважды симметричной теории полей, которые преобразуются по представлениям собственной группы Лоренца, разложимым в бесконечную прямую сумму конечномерных неприводимых представлений. Показано, что существует такая область свободных параметров теории, в которой спектры масс фермионов являются вполне удовлетворительными с физической точки зрения и соответствуют картине, ожидаемой в партонной модели адронов.

Ключевые слова: релятивистски-инвариантные теории, бесконечнокомпонентные поля, двойные симметрии, спектры масс.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] было положено начало исследованиям релятивистски-инвариантной теории полей, которые преобразуются по представлениям собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$, разложимым в бесконечную прямую сумму конечномерных неприводимых представлений (такие поля мы относим к классу ISFIR).

Структура релятивистски-инвариантных лагранжианов любых свободных полей, имеющих вид

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} [(\Psi, \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi) - (\partial_\mu \Psi, \Gamma^\mu \Psi)] - (\Psi, R\Psi), \quad (1)$$

найдена и описана Гельфандом и Ягломом [3], [4]. В случае полей класса ISFIR матричные операторы Γ^μ из лагранжиана (1) содержат в себе бесконечное количество произвольных констант. Из-за этого в работе [1] проводится сужение теории полей класса ISFIR, получаемое в результате наложения требования инвариантности лагранжиана (1) относительно следующих преобразований вторичной симметрии¹⁾:

$$\Psi'(x) = e^{-iD^\mu \theta_\mu} \Psi(x). \quad (2)$$

¹⁾ Понятие двойной симметрии, состоящей из первичной и вторичной симметрии, было введено в работе [5]. Оно может рассматриваться как обобщение суперсимметрии и симметрии σ -модели Гелл-Манна–Леви [6].

* Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Москва, Россия.
E-mail: slad@theory.sinp.msu.ru

В формуле (2) параметры θ_μ являются полярными или аксиальными 4-векторами ортохронной группы Лоренца $L^\uparrow$, а операторы D^μ имеют матричную реализацию. Указанное требование приводит к отбору счетного множества вариантов теории, каждый из которых характеризуется вполне определенным представлением группы $L^\uparrow$, однозначными (с точностью до нормировочной константы) 4-векторными операторами Γ^μ и D^μ и тем, что оператор R кратен единичному оператору E .

Чтобы выполненное в [1] расширение группы Лоренца не приводило в спектре масс к бесконечному вырождению по спину, ожидаемому в соответствии с теоремой Коулмена–Мандулы [7], в работе [2] постулируется спонтанное нарушение вторичной симметрии, а именно предполагается, что скалярные (относительно группы $L^\uparrow$) компоненты одного или нескольких бозонных бесконечнокомпонентных полей класса ISFIR имеют ненулевые вакуумные средние λ^i (индекс i может, например, обозначать ту или иную компоненту некоторого представления группы внутренней симметрии $SU(3)$). Тогда, полагая, что оператор R , задающий массовый член в лагранжиане свободного фермионного поля, полностью обусловлен спонтанным нарушением вторичной симметрии, имеем

$$R = \sum_i \lambda^i Q_i^{(0,1)00}. \quad (3)$$

Операторы $Q_i^{(0,1)00}$ приходят в соотношение (3) из лагранжиана фермион-бозонного взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_{i', \tau, l, m} (\psi(x), Q_{i'}^{\tau lm} \varphi_{\tau lm}^{i'}(x) \psi(x)), \quad (4)$$

где $\psi(x)$ – фермионное поле, $\varphi_{\tau lm}^{i'}(x)$ – компонента бозонного поля, характеризуемая конечномерным неприводимым представлением $\tau = (l_0, l_1)$ группы $L^\uparrow$, спином l ($l = |l_0|, |l_0| + 1, \dots, |l_1| - 1$) и его проекцией на третью ось m , а $Q_{i'}^{\tau lm} \equiv Q_{i'}^{(l_0, l_1)lm}$ – матричные операторы. Индекс i' в формуле (4) может включать в себя некоторый индекс i из соотношения (3) и, вдобавок к этому, сведения о трансформационных свойствах соответствующего бозонного поля относительно пространственного отражения. Решение вопроса о существовании нетривиального дважды симметричного лагранжиана (4) и о матричных элементах оператора $Q_i^{(0,1)00}$ дано в [2].

Разделяя неоднократно высказывавшуюся веру [8] в то, что монолокальные бесконечнокомпонентные поля могут быть эффективными образами составных частиц, и используя результаты работ [1], [2], мы приступаем к изучению возможности описания адронов и их взаимодействий с помощью дважды симметричной теории полей класса ISFIR. Чтобы такая возможность была сколь-нибудь реальной, рассматриваемая теория должна удовлетворять по крайней мере следующим двум требованиям. Во-первых, она должна обеспечивать существование физически приемлемых спектров масс. Во-вторых, упругое электромагнитное взаимодействие основного фермионного состояния теории должно описываться формфакторами, похожими на нуклонные. Первое из этих требований рассматривается в настоящей статье.

Напомним, что именно спектры масс были камнем преткновения для всех ранее предпринимавшихся попыток последовательного релятивистского описания частиц с беско-

нечным числом степеней свободы, реализуемых в виде различных состояний одного и того же поля, так как они во всех рассмотренных случаях имели точку сгущения, расположенную в нуле. К такому заключению относительно спектров масс пришли, в частности, Гинзбург и Тамм [9], Юкава [10], Широков [11], Марков [12] в своих анализах отдельных билакальных уравнений, а также Гельфанд и Яглом [3], Комар и др. [13] по отношению к общим линейным релятивистски-инвариантным уравнениям, основанным на представлениях группы $L_+^\uparrow$, разложимых в конечную прямую сумму бесконечномерных неприводимых представлений.

Тем более значимым представляется полученный в настоящей работе результат: дважды симметричной теории бесконечнокомпонентных полей класса ISFIR присущи спектры масс, в качественном плане воспроизводящие характерные черты экспериментальной физики адронов и партонной модели с мешками. Его обоснование и развернутая формулировка дается только для фермионных полей в вариантах теории с одним свободным параметром. Варианты теории с тремя, пятью и т. д. свободными параметрами при достаточно высоких положениях уровней спектров масс (относительно основного уровня) с любой заданной точностью сводятся к вариантам с одним параметром. Некоторые из полученных нами характеристик спектров масс предстают как следствие точных аналитических выкладок, а другие – как итог применения численных методов.

После решения основной задачи некоторое внимание в статье уделяется вопросу сопоставления теоретического спектра масс с уровнями адронных резонансов. При этом отмечается нетривиальная особенность полей класса ISFIR, заключающаяся в том, что одно состояние такого поля может иметь экспериментальное проявление в виде группы из нескольких близлежащих резонансов с различными спинами. Указывается возможная конкретизация таких групп для случая нуклонных резонансов (см. ниже таблицу). Уровень достоверности этой конкретизации не может быть установлен иначе, чем с помощью обширного анализа, включающего в себя, во-первых, предполагаемое соответствие между теоретическими и экспериментальными нуклонными и π -мезонными уровнями, во-вторых, нахождение волновых функций каждого из вовлеченных в анализ теоретических состояний, в-третьих, сравнение результатов теоретического (на основании лагранжиана (3)) и экспериментального парциально-волнового анализа амплитуд рождения πN -состояний в областях наблюдаемых нуклонных резонансов.

2. УРАВНЕНИЯ И УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ, ОПИСЫВАЕМЫХ ПОЛЯМИ КЛАССА ISFIR

Предметом нашего анализа являются линейные релятивистски-инвариантные уравнения для свободного фермионного поля класса ISFIR

$$(\Gamma^\mu \partial_\mu + iR)\psi(x) = 0, \quad (5)$$

соответствующие лагранжианам (1).

Для поля, отвечающего плоской волне с нулевым пространственным волновым вектором $\psi(x) = e^{-iMt}\psi_{M0}$, уравнение (5) сводится к виду

$$(M\Gamma^0 - R)\psi_{M0} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение при каждом допустимом значении спина и его третьей проекции представляет собою одно или несколько рекуррентных соотношений относительно компонент бесконечнокомпонентного поля ψ_{M0} . Эти соотношения сами по себе при любом значении величины M дают с точностью до числового множителя одно или несколько линейно независимых решений.

Если бы уравнение (6) являло собой замкнутую математическую задачу, то оно, скорее всего, дополнялось бы условием нормируемости своих решений. Однако в физике частиц нас интересуют не столько поля, сколько амплитуды процессов, которые в рассматриваемой теории выражаются через токи вида $(\psi_{M0}, O\psi_{Mp})$. Вектор поля ψ_{Mp} получается из вектора ψ_{M0} в результате такого перехода от одной системы отсчета к другой, при котором волновой 4-вектор $\{M, 0, 0, 0\}$ преобразуется в 4-вектор $\{E, 0, 0, p\}$. В качестве оператора O может выступать любой из матричных операторов теории: $Q_i^{\tau lm}$, Γ^μ , D^μ или R . Токи $(\psi_{M0}, O\psi_{Mp})$, в свою очередь, выражаются через бесконечные ряды, члены которых квадратичны по компонентам векторов ψ_{M0} и линейны по матричным элементам конечных преобразований собственной группы Лоренца. В связи с этим вместо условия нормируемости решений уравнения (6) мы вводим более жесткое требование сходимости возникающих рядов, которое мы будем называть условием конечности амплитуд. Матричные элементы любого из названных операторов O , связывающие неприводимые представления $\tau = (\pm 1/2, l_1)$ и $\tau' = (1/2, l_1 + n')$ или $\tau'' = (-1/2, l_1 + n'')$, где n' и n'' – целые числа, имеют при $l_1 \rightarrow +\infty$ асимптотическое поведение вида l_1^β , где β – некоторая константа. Учитывая это и асимптотику при $l_1 \rightarrow +\infty$ компонент векторов поля ψ_{M0} и ψ_{Mp} , которая приводится в настоящей работе, можно убедиться в том, что при любом фиксированном значении M или все ряды, соответствующие перечисленным токам, сходятся, или все расходятся. Поэтому условие конечности амплитуд мы формулируем для любого значения p в виде соотношения

$$|(\psi_{M0}, R\psi_{Mp})| < +\infty \quad (7)$$

или

$$(\psi_{M'0}, R\psi_{Mp}) = a(p)\delta(M' - M), \quad (8)$$

где $a(p)$ – некоторое ненулевое число. Те и только те векторы поля ψ_{M0} , которые удовлетворяют уравнению (6) и соотношению (7) или (8), мы будем называть векторами состояния частицы с массой M , являющейся точкой соответственно дискретной или непрерывной части спектра масс.

Используя нижеследующую формулу (19) и подходящий аналог формулы (18), нетрудно убедиться в том, что если соотношение (8) выполняется при некотором значении $p = p_0$, то оно не может выполняться при $p > p_0$. Таким образом, в рассматриваемой теории полей класса ISFIR спектр масс не может иметь непрерывной части.

Условие конечности амплитуд (7) или (8) при $p = 0$ превращается в условие нормируемости решений уравнения (6). Отметим здесь, что условие конечности амплитуд и условие нормируемости решений приводят к одинаковым спектрам масс во всех вариантах теории, рассматриваемых далее в разделах 4–6. В некоторых вариантах, рассматриваемых в разделе 3, имеется непустой дискретный спектр масс при выполнении условия

нормируемости решений уравнения (6), в то время как требование конечности амплитуд приводит к пустому спектру масс.

Приведем нужные нам результаты из работ [1] и [2], относящиеся к рассматриваемой дважды симметричной теории полей класса ISFIR со спонтанно нарушенной вторичной симметрией.

Представление S группы $L_+^\uparrow$, по которому преобразуется поле, должно совпадать с одним из бесконечномерных представлений S^{k_1} (k_1 – полуцелое число, $k_1 \geq 3/2$):

$$S^{k_1} = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_0=-k_1+1/2}^{k_1-3/2} \oplus \left(\frac{1}{2} + n_0, k_1 + n_1 \right). \quad (9)$$

В пространстве представления S^{k_1} оператор Γ^0 задается соотношениями

$$\begin{aligned} \Gamma^0 \xi_{(l_0, l_1)lm} = & c_0 D(l_1) \sqrt{\frac{(l-l_0)(l+l_0+1)(k_1-l_0-1)(k_1+l_0)}{(l_1-l_0)(l_1-l_0-1)(l_1+l_0)(l_1+l_0+1)}} \xi_{(l_0+1, l_1)lm} + \\ & + c_0 D(l_1) \sqrt{\frac{(l-l_0+1)(l+l_0)(k_1-l_0)(k_1+l_0-1)}{(l_1-l_0+1)(l_1-l_0)(l_1+l_0-1)(l_1+l_0)}} \xi_{(l_0-1, l_1)lm} - \\ & - c_0 D(l_0) \sqrt{\frac{(l_1-l)(l_1+l+1)(l_1-k_1+1)(l_1+k_1)}{(l_1-l_0)(l_1-l_0+1)(l_1+l_0)(l_1+l_0+1)}} \xi_{(l_0, l_1+1)lm} - \\ & - c_0 D(l_0) \sqrt{\frac{(l_1-l-1)(l_1+l)(l_1-k_1)(l_1+k_1-1)}{(l_1-l_0-1)(l_1-l_0)(l_1+l_0-1)(l_1+l_0)}} \xi_{(l_0, l_1-1)lm}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\xi_{(l_0, l_1)lm}$ – вектор канонического базиса в пространстве неприводимого представления $\tau = (l_0, l_1) \in S^{k_1}$, а c_0 – произвольная действительная константа. Функция $D(j)$ от полуцелого аргумента j описывается формулой

$$D(j) = 1, \quad (11)$$

если вторичная симметрия теории порождается полярным 4-векторным представлением группы $L^\uparrow$ (следствие 1 работы [1]), и формулой

$$D(j) = (-1)^{j-1/2} j, \quad (12)$$

если вторичная симметрия теории порождается аксиальным 4-векторным представлением группы $L^\uparrow$ (следствие 2 (п.2) работы [1]).

Для оператора R в пространстве представления S^{k_1} для обоих рассматриваемых вариантов вторичной симметрии теории справедливы одни и те же соотношения:

$$R \xi_{(l_0, l_1)lm} = r(l_0, l_1) \xi_{(l_0, l_1)lm} = \left[\sum_i \lambda^i q_i(l_0, l_1) \right] \xi_{(l_0, l_1)lm}, \quad (13)$$

$$q_i(-l_0, l_1) = q_i(l_0, l_1), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & (k_1 - l_0 - 1)(k_1 + l_0) q_i(l_0 + 1, l_1) + (k_1 - l_0)(k_1 + l_0 - 1) q_i(l_0 - 1, l_1) - \\ & - (k_1 - l_1 - 1)(k_1 + l_1) q_i(l_0, l_1 + 1) - (k_1 - l_1)(k_1 + l_1 - 1) q_i(l_0, l_1 - 1) = \\ & = z_i(l_1 - l_0)(l_1 + l_0) q_i(l_0, l_1), \end{aligned} \quad (15)$$

где $z_i = 2 - H_i^B/H^F$. Величины H_i^B и H^F — это нормировочные константы векторных операторов D^μ ($D^\mu D_\mu = HE$), входящих в преобразования (2) бозонного $\varphi^i(x)$ и фермионного $\psi(x)$ полей, соответственно. Они независимы друг от друга. При некотором фиксированном значении H^F величина H_i^B и тем самым параметр z_i могут принимать любые значения. В самом деле, если преобразование вторичной симметрии (2) бозонного поля $\varphi^i(x)$ нетривиально ($D^\mu \neq 0$) и это поле комплексно (а именно такие поля рассматривались в работах [1] и [2]), то $H_i^B > 0$. Если преобразование (2) нетривиально, а бозонное поле действительно, то $H_i^B < 0$. Если же преобразование (2) бозонного поля тривиально, то $z_i = 2$, оператор $Q_i^{(0,1)00}$ кратен единичному оператору E , а наличие у этого поля ненулевого вакуумного среднего не влияет на вторичную симметрию.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с фермионными полями, преобразующимися по “нижнему” из представлений S^{k_1} (9) собственной группы Лоренца, а именно по представлению $S^{3/2}$, в разложение которого входят все те и только те конечномерные неприводимые представления, которые содержат спин $1/2$. Решение рекуррентного соотношения (15) для этого представления ($k_1 = 3/2$) было дано в работе [2] через полиномы Гегенбауэра и через гипергеометрические ряды. Оказывается, что это решение можно выразить и через элементарные функции:

$$q_i\left(-\frac{1}{2}, l_1\right) = q_i\left(\frac{1}{2}, l_1\right) = 2q_{i0} \frac{u_i^N(u_i N + N + 1) - w_i^N(w_i N + N + 1)}{N(N+1)(u_i - w_i)(2 + u_i + w_i)}, \quad (16)$$

где $N = l_1 - 1/2$, $u_i = (z_i + \sqrt{z_i^2 - 4})/2$ и $w_i = (z_i - \sqrt{z_i^2 - 4})/2$.

В соответствии с формулами (10) и (13) операторы Γ^0 и R диагональны по спиновому индексу l и по индексу проекции спина m , причем их матричные элементы не зависят от m . Поэтому каждому вектору ψ_{M0} , удовлетворяющему уравнению (6), можно поставить в соответствие определенные значения спина и его проекции. Компоненты этого вектора можно взять не зависящими от величины m . Линейно независимые решения уравнения (6) можно выбрать так, чтобы они обладали определенной P -четностью. Напомним, что $P\xi_{(\pm 1/2, l_1)lm} = (-1)^{l-1/2}\xi_{(\mp 1/2, l_1)lm}$. Если некоторый вектор $\sum_{l_1} [\chi(l_1)\xi_{(-1/2, l_1)lm} + \chi(l_1)\xi_{(1/2, l_1)lm}]$, обладающий P -четностью $(-1)^{l-1/2}$, удовлетворяет уравнению (6) при $M = M_0$ и условию (7), то вектор $\sum_{l_1} [-\chi(l_1)\xi_{(-1/2, l_1)lm} + \chi(l_1)\xi_{(1/2, l_1)lm}]$, имеющий P -четность $(-1)^{l+1/2}$, тоже удовлетворяет условию (7) и уравнению (6), но при $M = -M_0$.

В пространстве представления $S^{3/2}$ группы $L_+^\uparrow$ уравнение (6) относительно компонент $(\psi_{M0})_{(\pm 1/2, l_1)lm} \equiv \chi_{lm}(l_1)$ вектора поля, имеющего пространственную четность $(-1)^{l-1/2}$, принимает вид

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{(l_1 - l)(l_1 + l + 1)}}{2l_1 + 1} \chi_{lm}(l_1 + 1) + D\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{(l_1 - l - 1)(l_1 + l)}}{2l_1 - 1} \chi_{lm}(l_1 - 1) - \\ - \left[\frac{D(l_1)(2l_1 + 1)}{4l_1^2 - 1} - \frac{1}{2Mc_0} r(l_1) \right] \chi_{lm}(l_1) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $l_1 \geq l$, $r(l_1) \equiv r(\pm 1/2, l_1)$.

Запишем релятивистски-инвариантную билинейную форму из соотношения (7) через компоненты векторов $\chi_{lm}(l_1)$ и через матричные элементы конечных преобразований собственной группы Лоренца

$$(\psi_{M0}, R\psi_{Mp}) = \sum_{l_0=-1/2}^{1/2} \sum_{l_1=l+1}^{+\infty} (-1)^{l-1/2} \chi_{lm}^*(l_1) r(l_1) \times \\ \times \{ [e^{\alpha I^{03}}]_{(l_0, l_1)lm, (l_0, l_1)lm} \} \chi_{lm}(l_1), \quad (18)$$

где $\text{th } \alpha = p/\sqrt{M^2 c^2 + p^2}$, а I^{03} – инфинитезимальный оператор группы $L_+^\uparrow$.

Явный вид матричных элементов конечных преобразований группы $L_+^\uparrow$ для бесконечномерных унитарных неприводимых представлений, обозначаемых парой чисел (l_0, ν) , найден в работе [14]. Рассуждения и результаты этой работы имеют силу и для интересующих нас конечномерных неприводимых представлений. Чтобы сохранить точное содержание используемых нами обозначений, нужно положить $\nu = il_1$. При рассмотрении вопроса о сходимости ряда вида (18) нам достаточно знать асимптотическое поведение интересующих нас матричных элементов при $l_1 \rightarrow +\infty$. Имеем

$$[e^{\alpha I^{03}}]_{(l_0, l_1)lm, (l_0, l_1)lm} = T_0 \frac{e^{\alpha l_1}}{l_1} (1 + O(l_1^{-1})), \quad (19)$$

где величина T_0 не зависит от числа l_1 .

Ниже мы обсуждаем спектры масс в двух вариантах спонтанного нарушения вторичной симметрии: нарушение вызывается одним бозонным полем класса ISFIR (в этом случае индекс i будет повсеместно опускаться) или двумя бозонными полями. В первом варианте мы рассматриваем по отдельности три существенно разные области значений параметра z : $(-\infty, -2]$, $(-2, 2)$ и $(2, +\infty)$. Во втором варианте внимание уделяется только области $z_1 \in (2, +\infty)$, $z_2 \in (-2, 2)$.

3. ПУСТОЙ СПЕКТР МАСС В ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРА $z \in (-2, 2)$

В ситуации, когда вторичная симметрия теории нарушена спонтанно, найти решения уравнения (17) в виде элементарных или специальных функций, конечных или бесконечных рядов не удастся. Не удастся найти и аналитические формулы для спектров масс теории. Однако мы в состоянии получить ряд заключений относительно спектров масс, основываясь на асимптотическом поведении некоторых величин.

Пусть $z \in (-2, 2)$. Тогда, используя формулу (16), имеем при $l_1 \rightarrow +\infty$

$$r(l_1) = r_0 \frac{\sin \zeta l_1}{l_1} (1 + O(l_1^{-1})), \quad (20)$$

где $\zeta \in (0, \pi)$, а r_0 – константа. Отсюда и из уравнения (17) получаем при $l_1 \rightarrow +\infty$

$$\chi_{lm}(l_1) = A_0 (-1)^{[l_1/2]} l_1^s (1 + K(l_1) + O(l_1^{-2})) + B_0 (-1)^{[(l_1+1)/2]} l_1^{-s} (1 - K(l_1) + O(l_1^{-2})), \quad (21)$$

где

$$s = (2l + 1) \left(1 - D \left(\frac{1}{2} \right) \right), \quad K(l_1) = (-1)^{l_1+1/2} \frac{r_0}{2Mc_0 D(1/2) \sin \zeta} \cdot \frac{\cos \zeta l_1}{l_1}, \quad (22)$$

$[a]$ — целая часть числа a , а величины A_0 и B_0 не зависят от l_1 .

Основываясь на этой асимптотике, нетрудно установить, что при $\alpha \neq 0$ члены ряда (18) растут при $l_1 \rightarrow +\infty$ независимо от того, равна ли величина A_0 нулю или нет при тех или иных значениях M . Следовательно, если $z \in (-2, 2)$, то ни при каких значениях величины M решение уравнения (17) не может удовлетворять условию конечности амплитуд (7), т.е. спектр масс пуст.

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЕКТРОВ МАСС В ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРА $z \in (-\infty, -2]$

Так как в области $z \in (-\infty, -2)$ справедливы неравенства $w < -1$ и $-1 < u < 0$, то из равенства (16) и уравнения (17) получаем при $l_1 \rightarrow +\infty$

$$r(l_1) = r_0 \frac{w^{l_1+1/2}}{l_1 + 1/2} (1 + O(l_1^{-1})), \quad (23)$$

$$\chi_{lm}(l_1) = A_0 G(l_1) (1 + O(l_1^{-1})) + B_0 G^{-1}(l_1) (1 + O(l_1^{-1})), \quad (24)$$

где

$$G(l_1) = \frac{v^{l_1-1/2} w^{(4l_1^2-1)/8}}{(l_1 - 1/2)!}, \quad v = -\frac{r_0}{Mc_0 D(1/2)}. \quad (25)$$

Если при некоторых значениях M величина A_0 не равна нулю, то, очевидно, условие (7) не может выполняться. Если же $A_0 = 0$ при каком-то значении M , то члены ряда (18) при $l_1 \rightarrow +\infty$ имеют асимптотическое поведение порядка $(l_1 + 1/2)! (l_1 - 1/2)! \times v^{-2l_1} u^{(4l_1^2-1)/4} e^{\alpha l_1}$. Отношение такого члена ряда к предшествующему ему члену в пределе $l_1 \rightarrow +\infty$ равно нулю. Следовательно, при обсуждаемом значении M рассматриваемый ряд (18) сходится, что эквивалентно выполнению условия (7).

Итак, для всех значений параметра z из области $z \in (-\infty, -2)$ и для обоих вариантов теории, выражаемых соотношениями (11) и (12), спектр масс дискретен, если он не пуст.

Аналогичное утверждение справедливо и при $z = -2$. В этом легко убедиться, приняв во внимание, что в этом случае $r(l_1) = r_0 (-1)^{l_1+1/2} l_1$ и имеет место аналог соотношения (24), в котором нужно положить $G(l_1) = v^{l_1-1/2} (-1)^{(4l_1^2-1)/8} (l_1 - 1/2)!$.

Докажем теперь, что в области $z \in (-\infty, -2]$ множество всех масс теории ограничено снизу некоторым положительным числом. Для этого достаточно указать такое число $\mu_0 > 0$, что для множества значений M , которые удовлетворяют ограничению $|M| \leq \mu_0$, компоненты поля $\chi_{lm}(l_1)$ не являются сколь угодно малыми при достаточно больших значениях l_1 .

Используя формулу (16), устанавливаем, что в области $z \leq -2$ величина $|r(l_1)|$ монотонно растет с ростом l_1 , а функция полуцелого аргумента $r(l_1)$ является знакопеременной: $r(l_1 + 1)/r(l_1) < 0$. Пусть $\mu_1 = |r(3/2)/c_0|$ и $|M| \leq \mu_1/2$. Тогда для обоих вариантов функции $D(j)$ ((11) и (12)) и для всех допустимых значений l и l_1 величина $D(l_1)(l + 1/2)/(l_1^2 - 1/4) - r(l_1)/Mc_0$ по модулю больше единицы и изменяет свой знак при изменении l_1 на 1. Это вместе с уравнением (17) дает требуемое неравенство $|\chi_{lm}(l_1 + 1)| > |\chi_{lm}(l_1)|$.

Для удобства мы будем в дальнейшем использовать то или иное соотношение между нормировочными константами, получая тем самым разные единицы массы. Если $r(3/2)/(2c_0 D(1/2)) = \pm 1$ (знаки плюс и минус относятся соответственно к соотношениям (11) и (12), они выбраны так, чтобы низшие уровни частиц со спином $1/2$ обладали пространственной четностью $+1$), то введем обозначение $M_c = |M|$. Любое количество низших значений массы M_c можно найти с помощью численных методов. При проведении численных расчетов в соответствии с доказанным выше подлежит рассмотрению только область $M_c > 0.5$. Чтобы найти все точки спектра в интересующих нас областях величины M_c и параметра z при заданном спине l , нам достаточно ограничиться поиском таких точек M_c , в которых при некотором фиксированном значении z величина A_0 из формулы (24) обращается в нуль, но не имеет минимума или максимума. Тогда, очевидно, в любых малых окрестностях указанных точек спектра масс при достаточно больших значениях l_1 величина $\chi_{lm}(l_1)$ изменяет свой знак. Это служит нам алгоритмом численного решения задачи о массах. Анализируя зависимость тех или иных двух соседних точек спектра масс от параметра z , мы можем установить, существует ли такое значение z_0 , при стремлении к которому с одной из сторон эти точки становятся сколь угодно близкими друг к другу, не появляясь по другую сторону от z_0 . Если такое число z_0 существует, то предельное значение двух указанных точек будет тем значением массы M_c , при котором величина A_0 имеет нулевое значение и экстремум.

На рис. 1 и 2 для случаев, отвечающих соответственно соотношениям (11) и (12), изображена зависимость от параметра z масс состояний со спинами $1/2, 3/2, 5/2$ и $7/2$.

Отметим вначале некоторые характеристики спектра масс теории с двойной симметрией, порождаемой аксиальным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца (ей отвечает соотношение (12)). Во-первых, спектр масс является непустым, если пространственная четность частиц со спином l равна $(-1)^{l-1/2}$, и пустым, если четность равна $(-1)^{l+1/2}$. Во-вторых, среди массовых линий имеются такие пары, которые обрываются, сливаясь в некоторых своих общих предельных точках при $z_0 < -2$, и имеются такие одиночные линии, которые существуют во всей области $z \in (-\infty, -2]$. В-третьих, для всех z , по крайней мере из области $(-\infty, -2.1)$, уровни спектра масс имеют одинаковое упорядочение, связанное со спином. Оно такое, как, например, при $z = -2.645$, когда низшие массы M_c (спин и четность l^P) равны: $1.982(1/2)^+$, $3.209(3/2)^-$, $3.687(1/2)^+$, $5.470(5/2)^+$, $6.143(3/2)^-$, $6.964(1/2)^+$, $9.709(7/2)^-$, $10.72(5/2)^+$, $11.91(3/2)^-$, $13.35(1/2)^+$, $17.82(9/2)^+$, $19.38(7/2)^-$. Массы низших уровней с тем или иным спином растут с ростом спина несколько быстрее геометрической прогрессии. Последовательность нескольких взятых подряд масс уровней с одним и тем же спином близ-

Рис. 1. Зависимость массовых уровней от параметра z при $z < -2$ в теории с двойной симметрией, порождаемой полярным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца.

как геометрической прогрессии. Поэтому, хотя в приведенном примере отношение масс низших уровней со спином и четностью $(3/2)^-$ и $(1/2)^+$ равно отношению масс резонанса $N(1520)$ и нуклона, положение уровней с $l^P = (5/2)^+$, $(7/2)^-$, $(9/2)^+$ и т.д. сильно отличается от положения соответствующих нуклонных резонансов [15]. В-четвертых, для значений параметра, близких к $z = -2$, упорядочение уровней спектра масс, связанное со спином, изменяется вместе с изменением z . Так, при $z = -2$ низшие уровни $M_c(l^P)$ таковы: $9.506(5/2)^+$, $12.14(9/2)^+$, $12.55(3/2)^-$, $13.25(5/2)^+$, $15.77(13/2)^+$, $16.03(19/2)^-$, $17.45(21/2)^+$.

Из характеристик спектра масс теории с двойной симметрией, порождаемой полярным 4-векторным представлением группы $L^\dagger$ (ей отвечает соотношение (11)), выделим следующие. Во-первых, частицы при любом значении спина обладают одной и той же пространственной четностью $+1$. Во-вторых, множество всех массовых линий разбивается на такие пары, которые, сливаясь, обрываются при $z_0 < -2$. В-третьих, массы низших уровней с двумя последовательными спинами, если они существуют для данного z из рассматриваемой области, отличаются друг от друга по крайней мере на порядок, что явно не соответствует картине с барионными резонансами.

Рис. 2. Зависимость массовых уровней от параметра z при $z < -2$ в теории с двойной симметрией, порождаемой аксиальным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца.

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЕКТРОВ МАСС В ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРА $z \in (2, +\infty)$

Так как в области $z \in (2, +\infty)$ выполняются неравенства $u > 1$ и $0 < w < 1$, то справедливы формулы (23)–(25) и следующие за ними рассуждения о выполнении условия (7), если в этих формулах и рассуждениях заменить w на u и u на w . Отсюда вытекает заключение, что для всех значений $z \in (2, +\infty)$ в обоих вариантах теории, отражаемых соотношениями (11) и (12), спектр масс дискретен, если он не пуст.

Из соотношения (16) получаем, что в области $z > 2$ величина $r(l_1)/r(3/2)$ является положительной и монотонно растущей с ростом l_1 . Этот факт и уравнение (17) при $l_1 > l$ дают неравенство $|\chi_{lm}(l_1)| > (1 + 1/(l_1 - l))|\chi_{lm}(l)|$ для всех l и для всех значений M из области $|M| \leq \mu_1/3$, где $\mu_1 = |r(3/2)/c_0|$. Следовательно, в указанной области M ряд (18) расходится, условие (7) не выполняется, точки спектра масс отсутствуют, т.е. спектр масс ограничен снизу.

На рис. 3 и 4, отвечающих формулам (11) и (12), соответственно, изображена зависимость низших уровней масс от параметра z для спинов $1/2$, $3/2$, $5/2$ и $7/2$, каждому из которых сопоставляются пространственные четности $+1$ и -1 . В обоих вариантах теории при $z \rightarrow 2 + 0$ массы M_c на всех линиях стремятся к единице. При любом значении

$z > 2$ массы нескольких низших уровней с последовательными спинами l и с четностями $(-1)^{l-1/2}$ образуют приближенно геометрическую прогрессию. Подобная закономерность имеет место и для масс нескольких последовательных уровней с одними и теми же спином и четностью. Из-за этого нельзя обеспечить сколь-нибудь удовлетворительного количественного согласия между низшими уровнями теории с одним параметром z и уровнями нуклонных резонансов. Существенное различие двух вариантов теории состоит в порядке взаимных расположений низших уровней с двумя последовательными значениями спина и той или другой четностью. Чтобы проиллюстрировать все это, ниже будут приведены числовые примеры, в которых отношение масс низших уровней с $l^P = (3/2)^-$ и $l^P = (1/2)^+$, даваемых рассматриваемой теорией, то же, что и для резонанса $N(1520)$ и нуклона.

Рис. 3. Зависимость массовых уровней от параметра z при $z > 2$ в теории с двойной симметрией, порождаемой полярным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца.

Отметим несколько характеристик спектра масс для варианта теории с соотношением (11). Во-первых, упорядочение уровней масс, связанное со спином и четностью, одинаково для всех значений параметра z из области $(2, +\infty)$. Оно таково, как, например, при $z = 2.441$, когда наименьшие массы M_c и соответствующие спин и четность l^P равны: 1.595(1/2)⁺, 2.328(1/2)⁻, 2.582(3/2)⁻, 3.699(1/2)⁺, 3.700(3/2)⁺, 4.346(5/2)⁺, 5.609(1/2)⁻, 6.111(5/2)⁻, 6.158(3/2)⁻, 7.522(7/2)⁻, 9.272(1/2)⁺, 9.174(3/2)⁺. Во-

Рис. 4. Зависимость массовых уровней от параметра z при $z > 2$ в теории с двойной симметрией, порождаемой аксиальным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца.

вторых, некоторые уровни масс с различными l^P мало отличаются друг от друга в значительной окрестности точки $z = 2$. Такая малость различия имеет место для $(n+1)$ -го уровня с $l^P = (1/2)^+$ и n -го уровня с $l^P = (3/2)^+$, для $(n+1)$ -го уровня с $l^P = (3/2)^-$ и n -го уровня с $l^P = (5/2)^-$, для $(n+1)$ -го уровня с $l^P = (5/2)^+$ и n -го уровня с $l^P = (7/2)^+$ ($n \geq 1$) и т.д.

Для варианта теории с соотношением (12) общее упорядочение уровней, связанное со спином и четностью, может быть неодинаковым для разных значений параметра z . Упорядочение же низших уровней с теми или иными l^P одинаково для всех $z > 2$. Это упорядочение такое, как в следующем примере, где приводятся все уровни с $M_c < 4$, вычисленные при $z = 2.261$: $1.108(1/2)^+$, $1.272(3/2)^+$, $1.521(1/2)^-$, $1.567(5/2)^+$, $1.794(3/2)^-$, $2.041(7/2)^+$, $2.119(1/2)^+$, $2.272(5/2)^-$, $2.573(3/2)^+$, $2.769(9/2)^+$, $2.999(1/2)^-$, $3.027(7/2)^-$, $3.342(5/2)^+$, $3.747(3/2)^-$, $3.876(11/2)^+$.

Итак, дважды симметричная теория с одним параметром z , связанным со спонтанным нарушением вторичной симметрии, в целом дает следующую качественную картину для спектров масс. При любых значениях z не существует непрерывной части спектра масс. Если при некотором z спектр масс не пуст, то массовые уровни ограничены снизу положительной величиной. В области параметра $z > 2$ каждому значению спина и

четности соответствует счетное множество масс, простирающихся до бесконечности, а наименьшие значения уровней масс с тем или иным спином растут с ростом спина. Удовлетворительного количественного согласия с уровнями нуклонных резонансов теория с одним параметром z не дает.

6. СОПОСТАВЛЕНИЕ СПЕКТРА МАСС ТЕОРИИ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ z_i С УРОВНЯМИ НУКЛОННЫХ РЕЗОНАНСОВ

Общая ситуация со спектрами масс теории, в которой имеется два бозонных поля класса ISFIR с ненулевыми вакуумными средними своих скалярных (относительно группы $L^\uparrow$) компонент, достаточно богата различными вариантами. Мы уделим некоторое внимание только одному варианту, который предназначается для пробного количественного сопоставления теоретического спектра масс с уровнями нуклонных резонансов и описывается ниже.

Будем рассматривать теорию с двойной симметрией, порождаемой полярным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца (ей отвечает соотношение (11)). При наличии двух параметров z_i величину $r(l_1)$ из уравнения (17) можно записать в виде

$$r(l_1) = f_0 \left(\frac{q_1(1/2, l_1)}{q_{10}} + f_2 \frac{q_2(1/2, l_1)}{q_{20}} \right), \quad (26)$$

где $q_i(1/2, l_1)$ зависит от z_i и дается формулой (16). Очевидно, что в такой теории помимо нормировочной константы f_0/c_0 имеются три свободных параметра: z_1 , z_2 и f_2 . Выберем следующие ограничения на них: $z_1 > 2$, $|z_2| < 2$, $|f_2| < 1$. В заданной области параметров с ростом l_1 величина $|q_1(1/2, l_1)|$ монотонно растет, а $q_2(1/2, l_1)$ осциллирует с уменьшающейся амплитудой. Величины $r(l_1)$ и $f_0 q_1(1/2, l_1)/q_{10}$ имеют одинаковый знак при всех l_1 и могут заметно отличаться друг от друга только при малых значениях l_1 . На асимптотику величин $r(l_1)$ и $\chi_{lm}(l_1)$ при $l_1 \rightarrow +\infty$ параметр z_2 не влияет. Справедливы формулы (23)–(25), если заменить в них w на u_1 , и справедливы вытекающие из этих формул заключения о спектрах масс. Поэтому в рассматриваемом варианте теории с двумя параметрами z_1 и z_2 по сравнению с вариантом теории с одним параметром z_1 могут существенно изменить свое положение только уровни спектра масс с низшими значениями спина l .

Отметим теперь крайне важное обстоятельство, присущее рассматриваемой теории бесконечнокомпонентных полей. Пусть основному фермионному и основному бозонному уровням теории отвечают частицы F со спином $1/2$ и B со спином 0 , соответственно, и пусть в теории имеется возбужденный фермионный уровень, которому отвечает частица F^* со спином l . Рассмотрим амплитуду $\mathcal{M}$ распада $F^* \rightarrow FB$ в системе покоя резонанса F^* , которая описывается лагранжианом (3). Так как в этой системе отсчета частицы F и B имеют ненулевые скорости, то сопоставляемые им бесконечнокомпонентные поля класса ISFIR имеют ненулевые компоненты со всеми полуцелыми и со всеми целыми спинами, соответственно. Поэтому амплитуда $\mathcal{M}$ имеет ненулевые слагаемые, в которых компоненты полей F^* , F и B описываются следующими наборами спинов: $\{l_{F^*}, l_F, l_B\}$: $\{l, l, 0\}$, $\{l, l-1, 1\}$, $\{l, l, 1\}$, $\{l, l+1, 1\}$, $\{l, l-2, 2\}$, $\dots$, $\{l, l+2, 2\}$, $\dots$. Оценить величину вклада того или иного спина l' фермиона F и спина l'' бозона B в амплитуду

Теория		Эксперименты [15]			
l^P	Масса (МэВ)	l^P	Резонанс	Масса (МэВ)	Статус
$(1/2)^+$	939	$(1/2)^+$	N	939	****
$(1/2)^+$	1481	$(1/2)^+$	$N(1440)$	1430–1470 ^{БВ}	****
$(1/2)^-$	1487	$(1/2)^-$	$N(1535)$	1495–1515	****
$(3/2)^-$	1508	$(3/2)^-$	$N(1520)$	1505–1515	****
$(3/2)^+$	1661	$(1/2)^-$	$N(1650)$	1640–1680	****
		$(5/2)^-$	$N(1675)$	1655–1665	****
		$(3/2)^+$	$N(1720)$	1650–1750	****
		$(5/2)^+$	$N(1680)$	1665–1675	****
$(5/2)^+$	1675	$(3/2)^-$	$N(1700)$	1630–1730	***
		$(1/2)^+$	$N(1710)$	1670–1770	***
		$(3/2)^+$	$N(1900)$	$\approx 1900^{\text{БВ}}$	**
$(5/2)^-$	1892	$(7/2)^+$	$N(1990)$	1870–1930	**
$(1/2)^-$	1923	$(7/2)^-$	$N(2190)$	1950–2150	****
$(7/2)^-$	1940	$(5/2)^+$	$N(2000)$	$\approx 2000^{\text{БВ}}$	**
$(3/2)^-$	1995	$(3/2)^-$	$N(2080)$	1980–2120	**
$(1/2)^+$	2004	$(1/2)^+$	$N(2100)$	2080–2160	*
$(5/2)^+$	2144	$(1/2)^-$	$N(2090)$	2080–2220	*
$(3/2)^+$	2140	$(5/2)^-$	$N(2200)$	2040–2160	**
$(7/2)^+$	2179	$(9/2)^-$	$N(2250)$	2080–2200	****
		$(9/2)^+$	$N(2220)$	2100–2240	****
$(9/2)^+$	2244				
...	...				
$(11/2)^-$	2547	$(11/2)^-$	$N(2600)$	2550–2750 ^{БВ}	***
...	...				
$(13/2)^+$	2919	$(13/2)^+$	$N(2700)$	$\approx 2700^{\text{БВ}}$	*

$\mathcal{M}$ можно только тогда, когда известны векторы состояний частиц F^* , F и B в их системах покоя. Так как экспериментальные суждения о спине резонанса составляются на основании парциально-волнового анализа, который построен на представлениях группы трехмерных вращений, а не на представлениях группы Лоренца, то сказанное выше может находить свое отражение в заключении экспериментатора о существовании группы из нескольких резонансов, имеющих одну и ту же массу и различающихся между собой только спином. Тем самым при сопоставлении теоретического спектра масс с экспериментальным мы должны обращать особое внимание на подобные группы резонансов и принимать решение о количестве отвечающих им теоретических уровней.

Простейшее предполагаемое соответствие между рассматриваемым вариантом теории и экспериментальной картиной нуклонных резонансов отражено в таблице. Ему от-

вечает следующий выбор нормировочной константы и свободных параметров: $f_0/c_0 = -939/2.4686$ МэВ, $z_1 = 2.036$, $z_2 = 0.14$, $f_2 = -0.6724$. Параметры z_2 и f_2 подбирались так, чтобы массы низших уровней с $l^P = (3/2)^-$ и $l^P = (5/2)^+$ равнялись соответственно 1508 и 1675 МэВ. Параметр $z_1 = 2.036$ определяет состояния частиц с большими спинами. В качестве экспериментальных масс почти всех резонансов мы берем положение полюсов. Массы Брейта–Вигнера (отмеченные в таблице верхним индексом БВ) взяты, во-первых, для тех нескольких резонансов, чье положение полюсов не приводится в работе [15], и, во-вторых, для резонанса Ропера $N(1440)$, так как в окрестности 1440 МэВ найдено два полюса, $1370 - 114i$ и $1360 - 120i$, параметры которых сильно отличаются от обычных $M = 1470$ МэВ и $\Gamma = 545$ МэВ [16].

Пробное сопоставление спектров масс рассматриваемой теории с уровнями ненуклонных резонансов еще не проводилось. Оно требует в частности разделения Λ -резонансов на синглетные и октетные, а Σ - и Ξ -резонансов на октетные и декуплетные относительно группы внутренней симметрии $SU(3)$. Для описания Δ -резонансов, по-видимому, следует использовать представление $S^{5/2}$ группы $L_+^\uparrow$, описываемое формулой (11), где $k_1 = 5/2$. В этом случае низший массовый уровень будет иметь спин $3/2$. Анализ спектров масс бозонных полей класса ISFIR в любых вариантах дважды симметричной теории станет возможным лишь после нахождения структуры лагранжиана четырехчастичного взаимодействия таких полей между собой и вытекающего из нее следствия спонтанного нарушения вторичной симметрии.

Благодарности. Я очень признателен Э. Э. Боосу, В. И. Саврину и Н. П. Юдину за полезные обсуждения и поддержку моей работы.

Список литературы

- [1] Л. М. Сладь. ТМФ. 2001. Т. 129. С. 68.
- [2] Л. М. Сладь. ТМФ. 2002. Т. 133. С. 54.
- [3] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом. ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 703.
- [4] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958.
- [5] L. M. Slad. Mod. Phys. Lett. A. 2000. V. 15. P. 379.
- [6] M. Gell-Mann, M. Levy. Nuovo Cimento. 1960. V. 16. P. 705.
- [7] S. Coleman, J. Mandula. Phys. Rev. 1967. V. 159. P. 1251.
- [8] Y. Nambu. Suppl. Progr. Theor. Phys. 1966. V. 37–38. P. 368; A. O. Barut, H. Kleinert. Phys. Rev. 1967. V. 157. P. 1180; C. Fronsdal. Phys. Rev. 1968. V. 171. P. 1811; G. Bisiacchi, P. Budini, G. Calucci. Phys. Rev. 1968. V. 172. P. 1508; Н. Н. Боголюбов, А. А. Лозунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [9] В. Л. Гинзбург, И. Е. Тамм. ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 227.
- [10] H. Yukawa. Phys. Rev. 1950. V. 77. P. 219.
- [11] Ю. М. Широков. ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 748.
- [12] М. А. Марков. ДАН. 1955. Т. 101. С. 51.
- [13] А. А. Комар, Л. М. Сладь. ТМФ. 1969. Т. 1. С. 50.
- [14] S. Ström. Arkiv Fysik. 1965. V. 29. P. 467.
- [15] K. Hagiwara et al. (Particle Data Group). Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 010001.
- [16] R. E. Cutkosky, S. Wang. Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 235.

Поступила в редакцию 13.IV.2004 г.