Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Степаньянц, Исследование проблемы аномалий в $N = 1$ суперсимметричной электродинамике, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 1, 37–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1767>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:32:44

© 2005 г.

К. В. Степаньянц*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ АНОМАЛИЙ В $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Показано, что с помощью уравнений Швингера–Дайсона и тождеств Уорда в $N = 1$ суперсимметричной электродинамике, регуляризованной высшими производными, можно вычислить ряд вкладов в двухточечную функцию Грина калибровочного поля и β -функцию во всех порядках теории возмущений. Полученные результаты применяются для исследования проблемы аномалий в рассматриваемой теории.

Ключевые слова: суперсимметрия, регуляризация, высшие ковариантные производные, проблема аномалий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование квантовых поправок в суперсимметричных теориях представляет собой интересную, а во многих случаях и весьма нетривиальную задачу. В этой связи напомним, например, о так называемой “проблеме аномалий”. Она связана с тем, что в суперсимметричных теориях аксиальная аномалия и аномалия следа тензора энергии-импульса являются компонентами одного кирального супермультиплета [1]. При этом в соответствии с теоремой Адлера–Бардина [2], [3] аксиальная аномалия является чисто однопетлевой, тогда как аномалия следа должна быть пропорциональна β -функции [4] во всех порядках теории возмущений. Поэтому можно предположить, что в суперсимметричных теориях β -функция должна полностью определяться однопетлевым приближением [5]. Однако явные вычисления по теории возмущений показали, что в $N = 1$ суперсимметричных теориях при использовании регуляризации размерной редукцией [6] существуют вклады высших петель в β -функцию [7]. Тем самым получается некоторое противоречие, которое получило в литературе название “проблема аномалий”.

Различные на первый взгляд способы решения проблемы аномалий были предложены в работах [8] и [9]. Тем не менее результаты ни той, ни другой работы не были подтверждены конкретными вычислениями до тех пор, пока для регуляризации использо-

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: stepan@phys.msu.ru

валась размерная редукция. Причина этого была найдена в работе [10] и заключается в математической противоречивости размерной редукции [11]. (Заметим, что в отличие от размерной редукции размерная регуляризация [12] не является математически противоречивой, но не сохраняет суперсимметрию, из-за чего ее применение в суперсимметричных теориях крайне неудобно.) Вычисления, выполненные с использованием непротиворечивой регуляризации с помощью высших производных [13] в двухпетлевом [14], [15] и трехпетлевом [16] приближениях для $N = 1$ суперсимметричной электродинамики, показали, что в этом случае проблема аномалий не возникает. Как показано в этих работах, аномалия масштабирования в суперсимметричных теориях приводит к тому, что β -функция, определенная как производная перенормированной константы связи по $\ln \mu$, и функция Гелл-Манна–Лоу оказываются различными. Первая из них пропорциональна аномалии следа, а вторая имеет поправки во всех порядках теории возмущений и в рассматриваемом приближении совпадает с точной β -функцией Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (НШВЗ), которая для $N = 1$ суперсимметричной электродинамики имеет вид

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi}(1 - \gamma(\alpha)), \quad (1.1)$$

где $\gamma(\alpha)$ – аномальная размерность суперполя материи. Впервые точная β -функция была построена в работе [17] на основе исследования структуры инстантонных вкладов.

Заметим, что использование регуляризации высшими производными позволяет соединить между собой различные формальные решения проблемы аномалий, которые предлагались в литературе.

Тем не менее исследование суперсимметричной электродинамики до сих пор было ограничено рамками трехпетлевого приближения, тогда как было бы интересно выяснить, можно ли провести явные вычисления точно во всех порядках теории возмущений. В данной работе мы исследуем вопрос о том, можно ли получить результат во всех порядках теории возмущений, используя уравнения Швингера–Дайсона и тождества Уорда.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 напоминаются основные сведения об $N = 1$ суперсимметричной электродинамике и ее регуляризации с помощью высших производных. Уравнения Швингера–Дайсона для рассматриваемой теории построены в разделе 3, а тождества Уорда и их решения приводятся в разделе 4. Подстановка решений тождеств Уорда в уравнение Швингера–Дайсона для двухточечной функции Грина калибровочного поля осуществляется в разделе 5. При этом оказывается, что таким образом можно почти полностью вычислить эту функцию Грина в пределе $p \rightarrow 0$. Сделав определенное предположение о структуре недостающих вкладов, можно построить эту функцию полностью (раздел 6), причем расходимости в двухточечной функции Грина будут присутствовать только в однопетлевом приближении, а функция Гелл-Манна–Лоу совпадает с точной β -функцией НШВЗ. В разделе 7 приводятся обобщенные полученные результаты.

2. $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ЕЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

$N = 1$ суперсимметричная электродинамика в суперпространстве описывается следующим действием:

$$S_0 = \frac{1}{4e^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}) + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta m \tilde{\phi} \phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} m \tilde{\phi}^* \phi^*. \quad (2.1)$$

При этом ϕ и $\tilde{\phi}$ — киральные суперполя материи с массой m , а V — вещественное скалярное суперполе, которое в качестве одной из компонент содержит калибровочное поле A_μ . Суперполе W_a представляет собой суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля и в абелевом случае определяется как

$$W_a = \frac{1}{16} \bar{D}(1 - \gamma_5) D[(1 + \gamma_5) D_a V], \quad (2.2)$$

где $D = \partial/\partial\bar{\theta} - i\gamma^\mu \theta \partial_\mu$ — суперсимметричная ковариантная производная.

Для того чтобы регуляризовать модель (2.1), можно добавить к ее действию слагаемое с высшими производными:

$$S_0 \rightarrow S = S_0 + S_\Lambda = \frac{1}{4e^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) W_b + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}) + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta m \tilde{\phi} \phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} m \tilde{\phi}^* \phi^*. \quad (2.3)$$

Важно отметить, что в абелевом случае суперполе W^a является калибровочно инвариантным, благодаря чему в регуляризующем слагаемом стоят обычные, а не ковариантные производные.

Квантование модели (2.3) может быть выполнено стандартным образом. Для этого удобно использовать технику суперграфов, подробно описанную в книге [18], и фиксировать калибровочную инвариантность добавлением следующих слагаемых:

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{64e^2} \int d^4x d^4\theta \left(V D^2 \bar{D}^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) V + V \bar{D}^2 D^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) V \right), \quad (2.4)$$

где

$$D^2 \equiv \frac{1}{2} \bar{D}(1 + \gamma_5) D, \quad \bar{D}^2 \equiv \frac{1}{2} \bar{D}(1 - \gamma_5) D. \quad (2.5)$$

После добавления таких членов квадратичная по суперполю V часть действия будет иметь наиболее простой вид:

$$S_{\text{gauge}} + S_{\text{gf}} = \frac{1}{4e^2} \int d^4x d^4\theta V \partial^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) V. \quad (2.6)$$

В рассматриваемом здесь абелевом случае диаграммы, содержащие духовые петли, отсутствуют.

Хорошо известно (см., например, [14]), что введение слагаемого с высшими производными не устраняет расходимости в однопетлевых диаграммах. Для их регуляризации необходимо вставить в производящий функционал детерминанты полей Паули–Вилларса [3].

В силу суперсимметричной калибровочной инвариантности

$$V \rightarrow V - \frac{1}{2}(A + A^+), \quad \phi \rightarrow e^A \phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow e^{-A} \tilde{\phi}, \quad (2.7)$$

где A – произвольное киральное скалярное суперполе, перенормированное действие может быть записано в виде

$$\begin{aligned} S_{\text{ren}} = & \frac{1}{4e^2} Z_3 \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) W_b + \\ & + Z \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}) + \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta m \tilde{\phi} \phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} m \tilde{\phi}^* \phi^*, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где учтено, что в силу теоремы о неперенормировке [18] в теории возмущений отсутствует перенормировка массового слагаемого. Поэтому производящий функционал можно записать в виде

$$Z = \int DV D\phi D\tilde{\phi} \prod_i (\det PV(V, M_i))^{c_i} e^{i(S_{\text{ren}} + S_{\text{gf}} + S_S + S_{\phi_0})}, \quad (2.9)$$

где перенормированное действие S_{ren} дается формулой (2.8), действие для членов, фиксирующих калибровку, – формулой (2.4) (в ней удобно заменить e на e_0 , что мы сделаем здесь и далее), детерминанты Паули–Вилларса определяются как

$$(\det PV(V, M))^{-1} = \int D\Phi D\tilde{\Phi} e^{iS_{\text{PV}}}, \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\text{PV}} \equiv & Z \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\Phi^* e^{2V} \Phi + \tilde{\Phi}^* e^{-2V} \tilde{\Phi}) + \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta M \tilde{\Phi} \Phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} M \tilde{\Phi}^* \Phi^*, \end{aligned} \quad (2.11)$$

а коэффициенты c_i удовлетворяют условиям

$$\sum_i c_i = 1, \quad \sum_i c_i M_i^2 = 0. \quad (2.12)$$

Далее мы будем предполагать, что $M_i = a_i \Lambda$, где a_i – некоторые постоянные. Вставка детерминантов Паули–Вилларса позволяет сократить остаточные расходимости во всех однопетлевых диаграммах, в том числе в диаграммах, содержащих контрчленные вставки.

Члены с источниками записываются в виде

$$S_S = \int d^4x d^4\theta JV + \int d^4x d^2\theta (j\phi + \tilde{j}\tilde{\phi}) + \int d^4x d^2\bar{\theta} (j^*\phi^* + \tilde{j}^*\tilde{\phi}^*). \quad (2.13)$$

Кроме того, в производящий функционал (2.9) мы вводим выражение

$$S_{\phi_0} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi_0^* e^{2V} \phi + \phi^* e^{2V} \phi_0 + \tilde{\phi}_0^* e^{-2V} \tilde{\phi} + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}_0), \quad (2.14)$$

где $\phi_0, \phi_0^*, \tilde{\phi}_0$ и $\tilde{\phi}_0^*$ – некоторые скалярные суперполя, которые не являются киральными или антикиральными и представляют собой некоторые параметры. Вообще говоря, вводить слагаемое S_{ϕ_0} в производящий функционал не обязательно, однако присутствие этих параметров потребует нам в дальнейшем при исследовании уравнений Швингера–Дайсона.

В наших обозначениях производящий функционал для связанных функций Грина записывается в виде $W = -i \ln Z$, а эффективное действие получается с помощью преобразования Лежандра:

$$\Gamma = W - \int d^4x d^4\theta JV - \int d^4x d^2\theta (j\phi + \tilde{j}\tilde{\phi}) - \int d^4x d^2\bar{\theta} (j^*\phi^* + \tilde{j}^*\tilde{\phi}^*), \quad (2.15)$$

причем источники J, j и $\tilde{j}$ должны быть выражены через поля V, ϕ и $\tilde{\phi}$ с помощью уравнений

$$V = \frac{\delta W}{\delta J}, \quad \phi = \frac{\delta W}{\delta j}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\delta W}{\delta \tilde{j}}. \quad (2.16)$$

3. УРАВНЕНИЯ ШВИНГЕРА–ДАЙСОНА ДЛЯ $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Попытаемся вычислить двухточечную функцию Грина калибровочного поля. При этом вначале для простоты будем полагать в формуле (2.8) константу перенормировки Z равной единице, что соответствует учету всех диаграмм, которые не содержат контрчленные вставки на линиях суперполей материи. В дальнейшем мы увидим, что при $Z \neq 1$ двухточечная функция Грина калибровочного поля может быть легко получена на основании соответствующего результата при $Z = 1$.

Вначале нам потребуется записать уравнения Швингера–Дайсона для рассматриваемой модели ($Z = 1$). Для этого мы разделим действие на две части:

$$S = S_2 + S_I,$$

где

$$S_2 \equiv \frac{1}{4e_0^2} \int d^4x d^4\theta V \partial^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) V + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* \phi + \tilde{\phi}^* \tilde{\phi}) + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta m \tilde{\phi} \phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} m \tilde{\phi}^* \phi^* \quad (3.1)$$

– квадратичная часть действия (с учетом членов, фиксирующих калибровку), а

$$S_I \equiv \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* (e^{2V} - 1) \phi + \tilde{\phi}^* (e^{-2V} - 1) \tilde{\phi}) \quad (3.2)$$

– взаимодействие.

Тогда, полагая поля ϕ_0, ϕ_0^* и пр. равными нулю, производящий функционал (2.9) можно переписать следующим образом:

$$Z[J, j]|_{\phi_0=0} = \prod_i \left(\det PV \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, M_i \right) \right)^{c_i} \exp \left(i S_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right] \right) \times \\ \times \int DV D\phi e^{i S_2(V, \phi) + i S_S} \Big|_{\phi_0=0}, \quad (3.3)$$

где из всей совокупности суперполей материи мы явно выписали только поле ϕ для краткости обозначений. Далее по тем же соображениям мы также не будем явно выписывать условие $\phi_0 = 0$.

Интеграл, остающийся в этом выражении, является гауссовым и может быть легко вычислен:

$$Z[J, j] = \prod_i \left(\det PV \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, M_i \right) \right)^{c_i} \exp \left(i S_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right] \right) Z_0, \quad (3.4)$$

где

$$Z_0 = \exp \left\{ i \int d^4 x d^4 \theta \left(-J \frac{e_0^2}{\partial^2 (1 + \partial^{2n} / \Lambda^{2n})} J + j^* \frac{1}{\partial^2 + m^2} j + \tilde{j}^* \frac{1}{\partial^2 + m^2} \tilde{j} + \right. \right. \\ \left. \left. + j \frac{m}{\partial^2 + m^2} \frac{D^2}{4\partial^2} \tilde{j} + j^* \frac{m}{\partial^2 + m^2} \frac{\bar{D}^2}{4\partial^2} \tilde{j}^* \right) \right\}. \quad (3.5)$$

Продифференцируем теперь это выражение по J_x (индекс x здесь и далее будет обозначать аргумент функции):

$$\frac{\delta Z}{\delta J_x} = - \prod_i \left(\det PV \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, M_i \right) \right)^{c_i} \exp \left(i S_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right] \right) \frac{2i e_0^2}{\partial^2 (1 + \partial^{2n} / \Lambda^{2n})} J_x Z_0 = \\ = - \frac{2i e_0^2}{\partial^2 (1 + \partial^{2n} / \Lambda^{2n})} \times \\ \times \left(J_x + \sum_i c_i \frac{\delta}{\delta V_x} \ln \det PV \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, M_i \right) + \frac{\delta S_I}{\delta V_x} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right] \right) Z, \quad (3.6)$$

причем из формулы (3.2) следует, что

$$\frac{\delta S_I}{\delta V_x} [V, \phi] = \frac{1}{2} (\phi_x^* e^{2V_x} \phi_x - \tilde{\phi}_x^* e^{-2V_x} \tilde{\phi}_x). \quad (3.7)$$

Принимая во внимание, что $Z = e^{iW}$, переписываем это равенство в терминах функционала W следующим образом:

$$\frac{\delta W}{\delta J_x} = - \frac{2e_0^2}{\partial^2 (1 + \partial^{2n} / \Lambda^{2n})} \left(J_x + \sum_i c_i \frac{\delta}{\delta V_x} \ln \det PV \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} + \frac{\delta W}{\delta J}, M_i \right) + \right. \\ \left. + \frac{\delta S_I}{\delta V_x} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} + \frac{\delta W}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} + \frac{\delta W}{\delta j} \right] \right). \quad (3.8)$$

Переходя, наконец, к эффективному действию Γ , получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta V_x} = & \frac{1}{2e_0^2} \partial^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) V_x + \sum_i c_i \frac{\delta}{\delta V_x} \ln \det PV \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} + V, M_i \right) + \\ & + \frac{\delta S_I}{\delta V_x} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} + V, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} + \phi \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

При этом производные по источникам должны быть выражены через производные по полям. Например, принимая во внимание, что

$$\frac{\delta \phi_x}{\delta \phi_y} = -\frac{1}{2} \overline{D}^2 \delta_{xy}^8, \quad \frac{\delta \phi_x^*}{\delta \phi_y^*} = -\frac{1}{2} D^2 \delta_{xy}^8, \quad (3.10)$$

где $\delta_{xy}^8 \equiv \delta^4(x-y) \delta^4(\theta_x - \theta_y)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta j_x^*} = & \int d^8 z \left(\frac{\delta \phi_z}{\delta j_x^*} \frac{D^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \phi_z} + \frac{\delta \phi_z^*}{\delta j_x^*} \frac{\overline{D}^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \phi_z^*} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta \tilde{\phi}_z}{\delta j_x^*} \frac{D^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_z} + \frac{\delta \tilde{\phi}_z^*}{\delta j_x^*} \frac{\overline{D}^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_z^*} + \frac{\delta V_z}{\delta j_x^*} \frac{\delta}{\delta V_z} \right) = \\ = & \int d^8 z \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_z \delta \phi_x^*} \right)^{-1} \frac{D^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \phi_z} + \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_z^* \delta \phi_x} \right)^{-1} \frac{\overline{D}^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \phi_z^*} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_z \delta \phi_x^*} \right)^{-1} \frac{D^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_z} + \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_z^* \delta \phi_x} \right)^{-1} \frac{\overline{D}^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_z^*} + \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_z \delta \phi_x^*} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta V_z} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\int d^8 z \equiv \int d^4 z d^4 \theta_z.$$

При этом важно заметить, что если положить все поля равными нулю, то в силу непрерывности линий суперполей материи нетривиальный вклад дадут только первое и четвертое слагаемые (а в случае $m = 0$ нетривиальный вклад дает только первое слагаемое).

Подставим в равенство (3.9) явное выражение для $\delta S_I / \delta V_x$, даваемое формулой (3.7), затем продифференцируем результат по V_y и положим все поля равными нулю. Получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_x \delta V_y} \right|_{V, \phi=0} = & \frac{1}{2e_0^2} \partial^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) \delta_{xy}^8 + \sum_i c_i \frac{\delta^2}{\delta V_x \delta V_y} \ln \det PV \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} + V, M_i \right) + \\ & + \frac{\delta}{\delta V_y} \int d^8 x_1 \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_1} \right)^{-1} \frac{D_1^2}{16i\partial^2} \frac{\delta}{\delta \phi_1} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x + \\ & + \frac{\delta}{\delta V_y} \int d^8 x_1 \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \tilde{\phi}_1^*} \right)^{-1} \frac{\overline{D}_1^2}{16i\partial^2} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_1^*} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x - \\ & - \frac{\delta}{\delta V_y} \int d^8 x_1 \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_x \delta \phi_1} \right)^{-1} \frac{D^2}{16i\partial^2} \frac{\delta}{\delta \phi_1} \exp \left(-\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} - 2V_x \right) \tilde{\phi}_x - \\ & - \frac{\delta}{\delta V_y} \int d^8 x_1 \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_x \delta \phi_1^*} \right)^{-1} \frac{\overline{D}^2}{16i\partial^2} \frac{\delta}{\delta \phi_1^*} \exp \left(-\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} - 2V_x \right) \tilde{\phi}_x \Big|_{V, \phi=0}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Диаграммы Фейнмана, определяющие β -функцию $N = 1$ суперсимметричной электродинамики.

С использованием правила Лейбница это выражение может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_x \delta V_y} \right|_{V, \phi=0} &= \frac{1}{2e_0^2} \partial^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) \delta_{xy}^8 + \sum_i c_i \frac{\delta^2}{\delta V_x \delta V_y} \ln \det PV \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} + V, M_i \right) + \\
 &+ \int d^8 x_1 \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_1} \right)^{-1} \frac{D_1^2}{16i \partial^2} \frac{\delta}{\delta V_y} \frac{\delta}{\delta \phi_1} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x - \\
 &- \int d^8 x_1 d^8 x_2 d^8 x_3 \left\{ \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_2} \right)^{-1} \frac{D_2^2}{8 \partial^2} \frac{\overline{D}_3^2}{8 \partial^2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_y \delta \phi_2 \delta \phi_3^*} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_3^* \delta \phi_1} \right)^{-1} + \right. \\
 &+ \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_2^*} \right)^{-1} \frac{\overline{D}_2^2}{8 \partial^2} \frac{D_3^2}{8 \partial^2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_y \delta \phi_2^* \delta \phi_3} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_3 \delta \phi_1} \right)^{-1} + \\
 &+ \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_2} \right)^{-1} \frac{D_2^2}{8 \partial^2} \frac{D_3^2}{8 \partial^2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_y \delta \phi_2 \delta \phi_3^*} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_3 \delta \phi_1} \right)^{-1} + \\
 &+ \left. \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_2^*} \right)^{-1} \frac{\overline{D}_2^2}{8 \partial^2} \frac{\overline{D}_3^2}{8 \partial^2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_y \delta \phi_2^* \delta \phi_3} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_3^* \delta \phi_1} \right)^{-1} \right\} \times \\
 &\times \frac{D_1^2}{16i \partial_1^2} \frac{\delta}{\delta \phi_1} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x + \\
 &+ \text{другие аналогичные слагаемые} \Bigg|_{V, \phi=0}. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Это и есть уравнение Швингера–Дайсона в рассматриваемой теории. Более наглядно можно представить его графически в виде суммы двух диаграмм, показанных на рисунке. При этом слагаемые, которые содержат только интегрирование по $d^8 x_1$, соответствуют второй диаграмме на этом рисунке, а слагаемые, содержащие интегрирование по $d^8 x_1 d^8 x_2 d^8 x_3$, – первой диаграмме. Двойные линии обозначают точный пропагатор, большой круг – эффективную вершину, а два смежных круга – эффективную вершину, состоящую из одночастично неприводимых диаграмм, в которых одна из внешних линий прикреплена к самому левому краю.

Вычисление вкладов детерминантов Паули–Вилларса производится аналогичным образом. Удобно ввести обозначение

$$Z_{PV}[V, j_{PV}, M_i] \equiv \int D\Phi D\tilde{\Phi} e^{iS_{PV} + iS_{S_{PV}} + iS_{\Phi_0}}, \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned} S_{S_{PV}} &= \int d^4x d^2\theta (j_{PV}\Phi + \tilde{j}_{PV}\tilde{\Phi}) + \int d^4x d^2\bar{\theta} (j_{PV}^*\Phi^* + \tilde{j}_{PV}^*\tilde{\Phi}^*), \\ S_{\Phi_0} &= \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\Phi_0^* e^{2V} \Phi + \Phi^* e^{2V} \Phi_0 + \tilde{\Phi}_0^* e^{-2V} \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^* e^{-2V} \tilde{\Phi}_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тогда в соответствии с формулой (2.10) необходимые нам детерминанты могут быть записаны в виде

$$(\det PV(V, M_i))^{-1} = Z_{PV}[V, j_{PV}, M_i] \Big|_{\Phi_0, j_{PV}=0}. \quad (3.16)$$

Кроме того, определим функционалы

$$\begin{aligned} W_{PV}[V, j_{PV}, M_i] &\equiv -i \ln Z_{PV}[V, j_{PV}, M_i], \\ \Gamma_{PV}[V, \Phi, M_i] &= W_{PV} - \int d^4x d^2\theta (j_{PV}\Phi + \tilde{j}_{PV}\tilde{\Phi}) - \int d^4x d^2\bar{\theta} (j_{PV}^*\Phi^* + \tilde{j}_{PV}^*\tilde{\Phi}^*), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где поля Φ и $\tilde{\Phi}$ связаны с источниками j_{PV} и $\tilde{j}_{PV}$ соотношениями

$$\Phi = \frac{\delta W_{PV}}{\delta j_{PV}}, \quad \tilde{\Phi} = \frac{\delta W_{PV}}{\delta \tilde{j}_{PV}}. \quad (3.18)$$

Дифференцируя формулу (3.14) по V_x , получаем, что

$$\frac{\delta Z_{PV}}{\delta V_x} = -\frac{i}{2} \left(\frac{\delta}{\delta j_{x\,PV}^*} e^{2V_x} \frac{\delta}{\delta j_{x\,PV}} - \frac{\delta}{\delta \tilde{j}_{x\,PV}^*} e^{-2V_x} \frac{\delta}{\delta \tilde{j}_{x\,PV}} \right) Z_{PV}. \quad (3.19)$$

Деля это выражение на Z_{PV} и полагая поля Φ и $\tilde{\Phi}$ равными нулю, получаем, что

$$\left. \frac{\delta W_{PV}}{\delta V_x} \right|_{\Phi=0} = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta j_{x\,PV}^*} e^{2V_x} \frac{\delta W_{PV}}{\delta j_{x\,PV}} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \tilde{j}_{x\,PV}^*} e^{-2V_x} \frac{\delta W_{PV}}{\delta \tilde{j}_{x\,PV}} \Big|_{\Phi=0}. \quad (3.20)$$

В терминах Γ_{PV} это равенство можно записать в виде

$$\left. \frac{\delta \Gamma_{PV}}{\delta V_x} \right|_{\Phi=0} = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta j_{x\,PV}^*} e^{2V_x} \Phi_x + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \tilde{j}_{x\,PV}^*} e^{-2V_x} \tilde{\Phi}_x \Big|_{\Phi=0}. \quad (3.21)$$

Переходя в этой формуле от дифференцирования по источникам к дифференцированию по полям, получаем, что выражение для

$$\frac{\delta^2}{\delta V_x \delta V_y} \ln \det PV \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} + V, M_i \right) \Big|_{V, \Phi=0}$$

с точностью до замен $\phi \rightarrow \Phi$, $\tilde{\phi} \rightarrow \tilde{\Phi}$, $\phi^* \rightarrow \Phi^*$ и $\tilde{\phi}^* \rightarrow \tilde{\Phi}^*$ будет совпадать с суммой четырех последних слагаемых в формуле (3.12). Поэтому мы заключаем, что структура членов, получающихся из детерминантов Паули–Вилларса, фактически идентична структуре остальных слагаемых, и вычисление этих членов производится полностью аналогично.

Также нам потребуются уравнения Швингера–Дайсона несколько иного типа. Для их получения продифференцируем производящий функционал по полю ϕ_0^* . Тогда

$$\frac{\delta Z}{\delta \phi_{0z}^*} = \frac{1}{4} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_z}\right) \frac{\delta Z}{\delta j_z}. \quad (3.22)$$

Деля это равенство на Z , получаем, что

$$\frac{\delta W}{\delta \phi_{0z}^*} = \frac{1}{4} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} + 2 \frac{\delta W}{\delta J_z}\right) \frac{\delta W}{\delta j_z}. \quad (3.23)$$

Поскольку поле ϕ_0^* является просто параметром в эффективном действии, то мы приходим к тождеству

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{0z}^*} = \frac{\delta W}{\delta \phi_{0z}^*} = \frac{1}{4} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} + 2V_z\right) \phi_z. \quad (3.24)$$

Дифференцируя это равенство и полагая затем поля равными нулю, получим следующие равенства, которые будут необходимы нам для дальнейшей работы:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_y \delta \phi_{0z}^*} &= \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta \phi_y} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} + 2V_z\right) \phi_z, \\ \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_y^* \delta \phi_{0z}^*} &= \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_y^*} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} + 2V_z\right) \phi_z, \\ \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \phi_{0z}^*} &= \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta V_x} \frac{\delta}{\delta \phi_y} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} + 2V_z\right) \phi_z, \\ \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \tilde{\phi}_y^* \delta \phi_{0z}^*} &= \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta V_x} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_y^*} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} + 2V_z\right) \phi_z. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Свяжем теперь эти величины с обычными функциями Грина. Для этого можно воспользоваться уравнениями Швингера–Дайсона, которые получаются аналогично описанным ранее (при дифференцировании Z по j^* и $\tilde{j}$) и имеют вид

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2)\phi_x^* &= \frac{D_x^2}{2} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_x} + \frac{\overline{D}_x^2}{8} \left(\left[\exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x\right) - 1 \right] \phi_x^* \right) \right) + \\ &\quad + 2m \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_x^*} + \frac{D_x^2}{8} \left(\left[\exp\left(-\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} - 2V_x\right) - 1 \right] \tilde{\phi}_x \right) \right), \\ (\partial^2 + m^2)\tilde{\phi}_x &= \frac{\overline{D}_x^2}{2} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_x^*} + \frac{D_x^2}{8} \left(\left[\exp\left(-\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} - 2V_x\right) - 1 \right] \tilde{\phi}_x \right) \right) + \\ &\quad + 2m \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_x} + \frac{\overline{D}_x^2}{8} \left(\left[\exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x\right) - 1 \right] \phi_x^* \right) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Дифференцируя последние равенства по ϕ_y^* , а затем полагая все поля равными нулю, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} -m^2 D_x^2 \delta_{xy}^8 &= D_x^2 \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_y^* \delta \phi_x} + \frac{\delta}{\delta \phi_y^*} \frac{\overline{D}_x^2}{8} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x^* \right) + \\ &\quad + 4m \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_y^* \delta \phi_x^*} + \frac{D_x^2}{8} \frac{\delta}{\delta \phi_y^*} \exp \left(-\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} - 2V_x \right) \tilde{\phi}_x \right), \\ 0 &= \overline{D}_x^2 \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_y^* \delta \phi_x^*} + \frac{\delta}{\delta \phi_y^*} \frac{D_x^2}{8} \exp \left(-\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} - 2V_x \right) \tilde{\phi}_x \right) + \\ &\quad + 4m \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_y^* \delta \phi_x} + \frac{\overline{D}_x^2}{8} \frac{\delta}{\delta \phi_y^*} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x^* \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из этих уравнений после несложных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi_1} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x &= \frac{\overline{D}_x^2}{2\partial^2} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_1 \delta \phi_x^*}, \\ \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_1} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x &= \frac{\overline{D}_x^2}{2\partial^2} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_1^* \delta \phi_x^*} + \frac{m}{4} D_x^2 \delta_{1x}^8 \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

При этом, принимая во внимание, что вариационная производная по киральному суперполю вновь является киральным суперполем, и используя размерные соображения, получаем, что двухточечные функции Грина для суперполей материи записываются в следующем явном виде:

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_y} = \frac{D_x^2 \overline{D}_x^2}{16} G(\partial^2) \delta_{xy}^8, \quad \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x \delta \tilde{\phi}_y} = -\frac{\overline{D}_x^2}{4} m J(\partial^2) \delta_{xy}^8. \quad (3.29)$$

Заметим, что соответствующие обратные величины, которые определяются из условий

$$\begin{aligned} \int d^8 y \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_y} \right)^{-1} \frac{D_y^2}{8\partial^2} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_y \delta \phi_z^*} + \int d^8 y \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \tilde{\phi}_y} \right)^{-1} \frac{\overline{D}_y^2}{8\partial^2} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_y^* \delta \phi_z^*} &= -\frac{D_x^2}{2} \delta_{xz}^8, \\ \int d^8 y \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_y} \right)^{-1} \frac{D_y^2}{8\partial^2} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_y \delta \tilde{\phi}_z} + \int d^8 y \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \tilde{\phi}_y} \right)^{-1} \frac{\overline{D}_y^2}{8\partial^2} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_y^* \delta \tilde{\phi}_z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

оказываются равными

$$\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^* \delta \phi_y} \right)^{-1} = -\frac{G D_x^2 \overline{D}_x^2}{4(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{xy}^8, \quad \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x \delta \tilde{\phi}_y} \right)^{-1} = -\frac{m J \overline{D}_x^2}{\partial^2 G^2 + m^2 J^2} \delta_{xy}^8. \quad (3.31)$$

Тем не менее в выражение (3.13) также входят величины

$$\frac{\delta}{\delta V_y} \frac{\delta}{\delta \phi_1} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x, \quad \frac{\delta}{\delta V_y} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_1} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x \right) \phi_x. \quad (3.32)$$

Для того чтобы вычислить эти выражения в пределе, когда импульс калибровочного поля V стремится к нулю, нам потребуются суперсимметричные тождества Уорда.

При этом необходимо заметить, что из уравнений Швингера–Дайсона (3.26) по аналогии с тождествами (3.28) несложно получить, что

$$-\frac{D_x^2}{2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_y \delta \phi_1 \delta \phi_{0x}^*} = -\frac{D_x^2}{8} \frac{\delta}{\delta V_y} \frac{\delta}{\delta \phi_1} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x\right) \phi_x = \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_y \delta \phi_1 \delta \phi_x^*}, \quad (3.33)$$

$$-\frac{D_x^2}{2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_y \delta \tilde{\phi}_1^* \delta \phi_{0x}^*} = -\frac{D_x^2}{8} \frac{\delta}{\delta V_y} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_1^*} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} + 2V_x\right) \phi_x = \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_y \delta \tilde{\phi}_1^* \delta \phi_x^*}. \quad (3.34)$$

4. ТОЖДЕСТВА УОРДА ДЛЯ $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Тождества Уорда для суперсимметричной электродинамики получаются стандартным образом [3]: совершаем замену переменных (2.7) в производящем функционале (2.9), дифференцируем результат по A в пределе $A \rightarrow 0$, затем переходим от производящего функционала Z к функционалу Γ . В результате этой операции получим тождество

$$\begin{aligned} & \left(\overline{D}_x^2 + D_x^2 \right) \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta V_x} + \frac{1}{2e_0^2} \partial^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) V_x \right) - \\ & - \overline{D}_x^2 \left(2\phi_0 \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_0} - 2\tilde{\phi}_0 \frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_0} + \frac{1}{4} \phi_x \frac{D_x^2}{\partial^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_x} - \frac{1}{4} \tilde{\phi}_x \frac{D_x^2}{\partial^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_x} \right) - \\ & - D_x^2 \left(2\phi_0^* \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_0^*} - 2\tilde{\phi}_0^* \frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_0^*} + \frac{1}{4} \phi_x^* \frac{\overline{D}_x^2}{\partial^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_x^*} - \frac{1}{4} \tilde{\phi}_x^* \frac{\overline{D}_x^2}{\partial^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_x^*} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

в котором поля пока еще не полагаются равными нулю. Дифференцируя это равенство по ϕ_y и ϕ_{0z}^* , а затем полагая все поля равными нулю, получаем тождество Уорда для трехточечной функции Грина в виде

$$(\overline{D}_x^2 + D_x^2) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \phi_{0z}^*} = 2\overline{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x \delta \phi_{0z}^*} + 2D_x^2 \left(\delta_{xz}^8 \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_y \delta \phi_{0x}^*} \right), \quad (4.2)$$

где было принято во внимание, что вариационная производная по киральному суперполю вновь является киральным суперполем.

Решением тождества Уорда в пределе $p \rightarrow 0$ является функция

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \phi_{0z}^*} \right|_{p=0} &= \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta V_x} \frac{\delta}{\delta \phi_y} \exp\left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} + 2V_z\right) \phi_z \Big|_{p=0} = \\ &= -2\partial^2 \Pi_{1/2} (\overline{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \delta_{xz}^8) F(q^2) + \frac{1}{8} D^a C_{ab} \overline{D}_x^2 (\overline{D}_x^2 \delta_{xy}^8 D_x^b \delta_{xz}^8) f(q^2) - \\ &- \frac{1}{16} q^\mu G'(q^2) \overline{D} \gamma^\mu \gamma_5 D_x (\overline{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \delta_{xz}^8) - \frac{1}{4} \overline{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \delta_{xz}^8 G(q^2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\Pi_{1/2} = -\frac{1}{16\partial^2} D^a \overline{D}^2 C_{ab} D^b = -\frac{1}{16\partial^2} D^a D^2 C_{ab} D^b \quad (4.4)$$

– суперсимметричный поперечный проектор, а $F(q^2)$ и $f(q^2)$ представляют собой некоторые функции импульса поля материи q , которые не могут быть определены из тождества Уорда. Используя формулу (3.33), также получаем, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \phi_z^*} \right|_{p=0} &= \partial^2 \Pi_{1/2 x} (\bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 D_x^2 \delta_{xz}^8) F(q^2) + \\ &+ \frac{1}{32} q^\mu G'(q^2) \bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D_x (\bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 D_x^2 \delta_{xz}^8) + \frac{1}{8} \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 D_x^2 \delta_{xz}^8 G(q^2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогичным образом, дифференцируя выражение (4.1) по ϕ_y и $\tilde{\phi}_{0z}$, мы получаем тождество Уорда

$$(D_x^2 + \bar{D}_x^2) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \tilde{\phi}_{0z}} = -\bar{D}_x^2 \left(\bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \frac{D_x^2}{8 \partial^2} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x \delta \tilde{\phi}_{0z}} + 2 \delta_{xz}^8 \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_{0x} \delta \phi_y} \right). \quad (4.6)$$

Принимая во внимание, что в силу формул (3.28) и (3.29) имеет место равенство

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_{0x} \delta \phi_y} = \frac{m}{32 \partial^2} (J(\partial^2) - 1) \bar{D}_y^2 D_y^2 \delta_{xy}^8, \quad (4.7)$$

можно переписать рассматриваемое тождество Уорда в следующем виде:

$$\begin{aligned} (D_x^2 + \bar{D}_x^2) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \tilde{\phi}_{0z}} &= \\ &= \frac{m}{16} \left[\bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \frac{\bar{D}_x^2 D_x^2}{\partial^2} (J(\partial^2) - 1) \delta_{xz}^8 - \bar{D}_x^2 \left(\delta_{xz}^8 \frac{D_x^2 \bar{D}_x^2}{\partial^2} (J(\partial^2) - 1) \delta_{xy}^8 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Его решение в пределе $p \rightarrow 0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \tilde{\phi}_{0z}} \right|_{p=0} &= \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta V_x} \frac{\delta}{\delta \phi_y} \exp \left(\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} + 2V_z \right) \tilde{\phi}_z^* \Big|_{p=0} = \\ &= -\frac{m}{2} \partial^2 \Pi_{1/2 x} (\bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 D_x^2 \delta_{xz}^8 - D_x^2 \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \delta_{xz}^8) H(q^2) + \frac{m}{32} D^a C_{ab} D_x^2 \times \\ &\times (D_x^2 \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 D_x^b \delta_{xz}^8) h(q^2) + \frac{m}{16} J'(q^2) (\bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 D_x^2 \delta_{xz}^8 - D_x^2 \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \delta_{xz}^8) + \\ &+ \frac{m}{16} \left(\frac{J'(q^2)}{q^2} - \frac{J(q^2) - 1}{q^4} \right) \left(D_x^2 \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \frac{\bar{D}_x^2 D_x^2}{16} \delta_{xz}^8 + D_x^2 \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 q^2 \delta_{xz}^8 \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $H(q^2)$ и $h(q^2)$ – две функции, которые также не могут быть определены из тождества Уорда. При этом было учтено, что результат должен быть кирален по y и антисимметричен относительно перестановки $y \leftrightarrow z$ после применения оператора D_z^2 . Действительно, в этом случае из формулы (3.34) получаем, что

$$(D_x^2 + \bar{D}_x^2) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \tilde{\phi}_z} = \frac{m}{2} [\bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \bar{D}_x^2 J(\partial^2) \delta_{xz}^8 - \bar{D}_x^2 \delta_{xz}^8 \bar{D}_x^2 J(\partial^2) \delta_{xy}^8]. \quad (4.10)$$

Решение этого уравнения в пределе $p \rightarrow 0$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \tilde{\phi}_z} \right|_{p=0} &= -\frac{\bar{D}_z^2}{2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x \delta \phi_y \delta \tilde{\phi}_{0z}} \Big|_{p=0} = \\ &= \frac{m}{4} \partial^2 \Pi_{1/2 x} (\bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 D_x^2 \bar{D}_x^2 \delta_{xz}^8 - D_x^2 \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \bar{D}_x^2 \delta_{xz}^8) H(q^2) - \\ &- \frac{m}{32} J'(q^2) (\bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 D_x^2 \bar{D}_x^2 \delta_{xz}^8 - D_x^2 \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8 \bar{D}_x^2 \delta_{xz}^8). \end{aligned} \quad (4.11)$$

5. ДВУХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ

Подставим теперь полученные выше выражения в формулу для двухточечной функции Грина калибровочного поля (3.13). Напомним еще раз, что вначале мы производим вычисление без учета диаграмм с контрчленными вставками на линиях суперполей материи. Тогда в силу суперсимметричной калибровочной инвариантности квантовые поправки к эффективному действию, соответствующие двухточечной функции Грина калибровочного поля, можно записать в виде

$$\Gamma_V^{(2)} = -\frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V(-p) \partial^2 \Pi_{1/2} V(p) d_0^{-1} \left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p} \right), \quad (5.1)$$

где d_0 – некоторая функция, которая может быть определена из формулы (3.13), поскольку, как несложно убедиться,

$$\begin{aligned} \Pi_{1/2} \int d^4 x d^4 y \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_x \delta V_y} \Big|_{V, \phi=0} e^{i p_\mu x^\mu + i q_\mu y^\mu} = \\ = \frac{1}{8\pi} (2\pi)^4 \delta^4(p+q) p^2 \Pi_{1/2} \delta^4(\theta_x - \theta_y) d_0^{-1} \left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для нахождения функции d_0 мы сначала продифференцируем выражение (3.13) по $\ln \Lambda$, а затем положим в нем $p = 0$. При этом мы должны обязательно учитывать зависимость $e_0 = e_0(\Lambda)$, которая возникает при учете диаграмм с контрчленными вставками на линиях калибровочного суперполя V . Заметим, что благодаря использованию регуляризации высшими производными мы можем просто дифференцировать подынтегральное выражение. Дифференцирование по $\ln \Lambda$ необходимо для того, чтобы получить при $p = 0$ конечное выражение. (Существование конечного предела при $p \rightarrow 0$ будет доказано ниже.)

После дифференцирования формулы (3.13) по $\ln \Lambda$ вклад двухточечной функции Грина калибровочного поля в эффективное действие (без учета членов, фиксирующих калибровку) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Gamma_V^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int d^8 x d^8 y V_x V_y \left((T_{xy}^{(1)} + T_{xy}^{(2)}) - \right. \\ \left. - \sum_i c_i (T_{xy}^{(1)PV}(M_i) + T_{xy}^{(2)PV}(M_i)) \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где через $T_{xy}^{(1)}$ обозначена сумма слагаемых, которые соответствуют первой диаграмме на рисунке, через $T_{xy}^{(2)}$ – сумма диаграмм, соответствующих второй диаграмме на рисунке, а $T_{xy}^{(1)PV}(M_i)$ и $T_{xy}^{(2)PV}(M_i)$ представляют собой аналогичные вклады диаграмм с полями Паули–Вилларса.

После подстановки вершинных функций из формул (4.3), (4.5), (4.9), (4.11) и пропагаторов из формул (3.31), поворота Вика и несложных преобразований, использующих

алгебру ковариантных производных, получаем, что в импульсном представлении первая диаграмма записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int d^8 x d^8 y V_x V_y \left(T_{xy}^{(1)} - \sum_i c_i T_{xy}^{(1)PV} (M_i) \right) = \\ = \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ V \partial^2 \Pi_{1/2} V \left[\frac{8GF}{q^2 G^2 + m^2 J^2} - \frac{m^2 J J'}{2q^2 (q^2 G^2 + m^2 J^2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{d}{dq^2} \left(\ln(q^2 G^2 + m^2 J^2) + \frac{m^2 J}{q^2 G^2 + m^2 J^2} \right) \right] + V^2 \frac{G^2}{q^2 G^2 + m^2 J^2} \right\}, \quad (5.4) \end{aligned}$$

а вторая равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int d^8 x d^8 y V_x V_y \left(T_{xy}^{(2)} - \sum_i c_i T_{xy}^{(2)PV} (M_i) \right) = \\ = \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ V \partial^2 \Pi_{1/2} V \left[-\frac{8GF}{q^2 G^2 + m^2 J^2} - \frac{m^2 J J'}{2q^2 (q^2 G^2 + m^2 J^2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m^2 J (J-1)}{2q^4 (q^2 G^2 + m^2 J^2)} - \frac{8Gf + 8m^2 Jh}{q^2 G^2 + m^2 J^2} \right] - V^2 \frac{G^2}{q^2 G^2 + m^2 J^2} \right\}. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Складывая результаты, получаем, что

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \Gamma_V^{(2)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V(-p) \partial^2 \Pi_{1/2} V(p) I, \quad (5.6)$$

где через I обозначен следующий евклидов интеграл:

$$\begin{aligned} I = \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{2q^2} \frac{d}{dq^2} \left(\ln(q^2 G^2 + m^2 J^2) + \frac{m^2 J}{q^2 G^2 + m^2 J^2} \right) - \right. \\ - \frac{m^2 J (2q^2 J' - (J-1))}{2q^4 (q^2 G^2 + m^2 J^2)} - \frac{8Gf + 8m^2 Jh}{q^2 G^2 + m^2 J^2} - \\ - \sum_i c_i \frac{1}{2q^2} \frac{d}{dq^2} \left(\ln(q^2 G_{PV}^2 + M_i^2 J_{PV}^2) + \frac{M_i^2 J_{PV}}{q^2 G_{PV}^2 + M_i^2 J_{PV}^2} \right) + \\ \left. + \sum_i c_i \left(\frac{M_i^2 J (2q^2 J' - (J-1))}{2q^4 (q^2 G^2 + M_i^2 J^2)} + \frac{8Gf + 8M_i^2 Jh}{q^2 G^2 + M_i^2 J^2} \right) \right\}. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что все неинвариантные члены, которые пропорциональны V^2 , а также члены, содержащие неизвестные нам функции F и H , полностью сокращаются. Тем не менее в окончательном результате остаются произвольные функции f и h , которые не могут быть определены из тождеств Уорда. (В двухпетлевом приближении эти функции равны нулю и отличны от нуля только в трех петлях.)

Из формулы (5.4) видно, что для первой диаграммы на рисунке во всех порядках теории возмущений получается точный результат. В трехпетлевом приближении он был проверен явно. Для второй диаграммы в силу формулы (5.5) остается произвол в выборе функций f и h , которые, однако, возможно удастся определить из каких-либо других

соображений, поскольку явные трехпетлевые вычисления, выполненные в работе [16], позволяют сделать следующее предположение о структуре результата:

$$I = \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2q^2} \frac{d}{dq^2} \left\{ (\ln(q^2 G^2 + m^2 J^2) + X(q^2, m^2)) - \sum_i c_i (\ln(q^2 G_{\text{PV}}^2 + M_i^2 J_{\text{PV}}^2) + X(q^2, M_i^2)) \right\}, \quad (5.8)$$

где $X(q^2, m^2)$ — некоторая функция, которая равна конечной не зависящей от масс постоянной при $q = 0$ и равна нулю в пределе $q \rightarrow \infty$. Если считать, что это предположение правильно, то интеграл по импульсу q сводится к интегралу от полной производной и может быть взят аналитически. Это будет сделано в следующем разделе.

6. РЕНОРМГРУППОВЫЕ ФУНКЦИИ В $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Будем считать, что предположение (5.8) является верным. Выясним, к каким следствиям оно приводит. Для этого перейдем к четырехмерным сферическим координатам и возьмем интеграл (5.8):

$$I = \frac{1}{32\pi^2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left\{ (\ln(q^2 G^2 + m^2 J^2) + X(q^2, m^2)) - \sum_i c_i (\ln(q^2 G_{\text{PV}}^2 + M_i^2 J_{\text{PV}}^2) + X(q^2, M_i^2)) \right\} \Big|_0^\infty. \quad (6.1)$$

В пределе $q \rightarrow \infty$ из-за наличия регуляризации высшими производными функции $G(q)$, $J(q)$, $G_{\text{PV}}(q)$ и $J_{\text{PV}}(q)$ будут стремиться к единице, поскольку все квантовые поправки к классическим значениям будут исчезать в этом пределе. Действительно, при наличии высших производных все интегралы сходятся при конечном Λ , а импульс q присутствует в знаменателях интегралов, определяющих квантовые поправки. Например,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n}) k^2 (k + q)^2} = 0. \quad (6.2)$$

Поэтому с учетом того, что $\sum_i c_i = 1$, подстановка при $q \rightarrow \infty$ в формуле (6.1) оказывается равной нулю.

Далее мы будем рассматривать по отдельности безмассовый и массивный случаи.

6.1. Безмассовый случай. Заметим, что функция J_{PV} в пределе $q \rightarrow 0$ стремится к некоторой конечной постоянной, не зависящей от масс или Λ , поскольку интегралы, которые ее определяют, являются сходящимися (даже в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$), безразмерными и не содержащими инфракрасных расходимостей. Отсюда получаем

$$I = -\frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \ln G^2 - \sum_i c_i \ln(M_i^2 J_{\text{PV}}^2) \right\} \Big|_{q=0} = \frac{1}{16\pi^2} \left(1 - \frac{d \ln G}{d \ln \Lambda} \right) \Big|_{q=0}. \quad (6.3)$$

Докажем теперь, что такой предел существует, поскольку результат, вообще говоря, может оказаться расходящимся при $q \rightarrow 0$. Прежде всего будем предполагать, что из

функции $G(\alpha_0, q/\Lambda)$ удалены все слагаемые, которые стремятся к нулю при $\Lambda \rightarrow \infty$ (например, пропорциональные $(q/\Lambda)^k$, где k – положительная постоянная). Очевидно, что удаление таких членов никак не изменит ренормгрупповые функции. Поскольку в этом случае величина ZG является конечной по определению константы перенормировки Z и не зависящей от Λ , то

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \ln G\left(\alpha_0\left(\alpha, \frac{\Lambda}{\mu}\right), \frac{\Lambda}{p}\right)\Big|_{p=0} = \\ = -\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \ln Z\left(\alpha_0\left(\alpha, \frac{\Lambda}{\mu}\right), \frac{\Lambda}{p}\right)\Big|_{p=0} = -\gamma\left(\alpha_0\left(\alpha, \frac{\Lambda}{\mu}\right)\right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Аномальная размерность $\gamma(\alpha_0)$ является конечной величиной при $\Lambda < \infty$, благодаря чему предел (6.3) существует во всех порядках теории возмущений.

Из формул (5.1), (5.6) и (6.3) мы получаем, что

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} d_0^{-1}\left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p}\right)\Big|_{p=0} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\ln \frac{\Lambda}{p} - G\left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p}\right) \right)\Big|_{p=0}, \quad (6.5)$$

откуда функция d_0 может быть определена с точностью до произвольной постоянной, возникающей при интегрировании, поскольку она является полиномом по $\ln \Lambda/p$. Поэтому в силу формулы (5.1) без учета диаграмм с контрчленными вставками на линиях суперполей материи вклад двухточечной функции Грина калибровочного суперполя в эффективное действие равен

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V(-p) \partial^2 \Pi_{1/2} V(p) \left[-\frac{1}{4e_0^2} - \frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{p} - \ln G\left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p}\right) \right) + \text{const} \right]. \quad (6.6)$$

Однако необходимо также учесть диаграммы с контрчленными вставками. Поскольку при наличии полей Паули–Вилларса расходимости в теории отсутствуют при конечном Λ , то можно производить масштабирование $\phi \rightarrow Z^{-1/2}\phi$, $\tilde{\phi} \rightarrow Z^{-1/2}\tilde{\phi}$. При этом необходимо проводить и одновременное масштабирование полей Паули–Вилларса $\Phi \rightarrow Z^{-1/2}\Phi$, $\tilde{\Phi} \rightarrow Z^{-1/2}\tilde{\Phi}$ для того, чтобы не возникали расходимости в диаграммах с контрчленными вставками (или, что эквивалентно, не появлялся аномальный вклад меры в функциональном интеграле). Несложно понять, что такое масштабирование фактически сводится к замене $m \rightarrow m/Z$, $M_i \rightarrow M_i/Z$. Проводя такую замену в формуле (6.3) и принимая во внимание, что при $Z = 1$ результат дается формулой (6.6), получаем, что при $Z \neq 0$

$$\Gamma_V^{(2)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V(-p) \partial^2 \Pi_{1/2} V(p) \left[-\frac{1}{4e_0^2} - \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{p} + \frac{1}{16\pi^2} \ln(ZG) + \text{const} \right]. \quad (6.7)$$

Поскольку величина ZG является конечной по определению константы перенормировки Z , то для того чтобы это выражение было конечным, необходимо скомпенсировать только однопетлевую расходимость. Для этого голый заряд представляется в виде

$$\frac{1}{e^2} Z_3\left(e, \frac{\Lambda}{\mu}\right) = \frac{1}{e_0^2} = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{4\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \text{const}. \quad (6.8)$$

Поэтому окончательное выражение для эффективного действия (без членов, фиксирующих калибровку) в безмассовом случае может быть записано в виде

$$\Gamma_V^{(2)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} W_a(-p) C^{ab} W_b(p) \left[\frac{1}{4e^2} + \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{p} - \frac{1}{16\pi^2} \ln(ZG) + \text{const} \right]. \quad (6.9)$$

Дифференцируя формулу (6.8) по $\ln \mu$ при фиксированном значении голой константы связи e_0 , получаем, что β -функция, определенная формулой

$$\beta = \frac{d}{d \ln \mu} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right), \quad (6.10)$$

оказывается равной

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi}. \quad (6.11)$$

Этот результат полностью согласуется со структурой супермультиплета аномалий, которая как раз и требует, чтобы данная β -функция была бы однопетлевой.

Кроме того, можно определить β -функцию Гелл-Манна–Лоу следующим образом. Если

$$\Gamma_V^{(2)} = \frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} W_a(-p) C^{ab} W_b(p) d^{-1} \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right) \quad (6.12)$$

(в отличие от формулы (5.1) в это выражение включаются вклады диаграмм с контрчленными вставками), то положим по определению

$$\tilde{\beta}(d(\alpha, x)) \equiv - \frac{\partial}{\partial \ln x} d(\alpha, x) \Big|_{x=1}. \quad (6.13)$$

При этом в соответствии с формулой (6.9)

$$d^{-1} \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\mu}{p} - \frac{1}{\pi} \ln(ZG) + \text{const}. \quad (6.14)$$

Дифференцируя это выражение по $\ln \mu$, получаем, что

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi} (1 - \tilde{\gamma}(\alpha)), \quad \tilde{\gamma} \equiv \frac{\partial}{\partial \ln x} \ln(ZG), \quad (6.15)$$

где было принято во внимание, что произведение ZG зависит от α и $x \equiv \mu/p$. При этом видно, что в отличие от β величина $\tilde{\beta}$ имеет поправки во всех порядках теории возмущений.

6.2. Массивный случай. В массивном случае мы сразу проведем учет диаграмм с контрчленными вставками на линиях суперполей материи. Поэтому

$$\begin{aligned} I = & -\frac{1}{32\pi^2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left\{ \left(\ln \left(q^2 G^2 + \frac{m^2 J^2}{Z^2} \right) + X \left(q^2, \frac{m}{Z} \right) \right) - \right. \\ & \left. - \sum_i c_i \left(\ln \left(q^2 G_{\text{PV}}^2 + \frac{M_i^2 J_{\text{PV}}^2}{Z^2} \right) + X \left(q^2, \frac{M_i}{Z} \right) \right) \right\} \Big|_{q=0} = \frac{1}{16\pi^2}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где, например, $G = G(q, m/Z, M_i/Z)$, если $G(q, m, M_i)$ – результат вычисления диаграмм без контрчленных вставок на линиях суперполей материи и т.п. Тогда из формулы (5.6) мы получаем, что

$$\Gamma_V^{(2)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V(-p) \partial^2 \Pi_{1/2} V(p) \left[-\frac{1}{4e_0^2} - \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{p} + \text{конечные члены} \right]. \quad (6.17)$$

Поскольку, как и ранее, расходимость в этом выражении (при фиксированном e_0) присутствует только в однопетлевом приближении, то и в массивном случае голый заряд представляется в виде (6.8), а β -функция (6.10) дается формулой (6.11). Этот результат также полностью согласуется со структурой супермультиплета аномалий и теоремой Адлера–Бардина.

Заметим, что в массивном случае нет необходимости обсуждать вопрос о функции Гелл-Манна–Лоу, поскольку при определении этой функции массы считаются пренебрежимо малыми и исходная массивная теория фактически заменяется на безмассовую.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в $N = 1$ суперсимметричной электродинамике с помощью уравнений Швингера–Дайсона и тождеств Уорда был вычислен ряд вкладов в двухточечную функцию Грина калибровочного поля в пределе $p \rightarrow 0$. К сожалению, полностью определить ее из тождеств Уорда не удастся, однако наиболее сложные с технической точки зрения диаграммы удастся вычислить полностью.

Тем не менее, основываясь на результатах явных трехпетлевых вычислений, можно сделать предположение о структуре членов, которые не определяются из тождеств Уорда. В этом случае удастся найти β -функцию и функцию Гелл-Манна–Лоу точно во всех порядках теории возмущений. При этом получаемые результаты позволяют дать простое и ясное решение проблемы аномалий в $N = 1$ суперсимметричной электродинамике, которое, в частности, соединяет между собой различные решения проблемы аномалий, известные в литературе [16]. Напомним кратко его основные положения.

Аномалия следа и аномалия тензора энергии-импульса принадлежат одному супермультиплету, благодаря чему β -функция (6.10) в силу теоремы Адлера–Бардина¹⁾ должна быть чисто однопетлевой и определяться формулой (6.11). Именно такой результат и получается при использовании регуляризации высшими производными как для безмассовой, так и для массивной теории. Поэтому полученные результаты полностью согласуются со структурой супермультиплета аномалий.

Тем не менее функция Гелл-Манна–Лоу, которая определяется по поперечной части двухточечной функции Грина калибровочного поля, имеет поправки во всех порядках теории возмущений и совпадает с точной β -функцией НШВЗ. Заметим при этом, что определять функцию Гелл-Манна–Лоу имеет смысл только для безмассовой теории, поскольку при ее построении необходимо пренебрегать зависимостью эффективного действия от массы.

Две β -функции, определенные различными способами, оказываются различными, поскольку производящий функционал (2.9) оказывается зависящим от точки нормировки

¹⁾ При использовании высших производных эта теорема справедлива, тогда как при использовании размерной редукции она, по-видимому, не имеет места [19].

μ при фиксированном значении голой константы связи e_0 [10], [16]. Дело в том, что два приведенных выше определения эквивалентны только в том случае, когда такая зависимость отсутствует. Действительно, если производящий функционал не зависит от μ , то от μ не будет зависеть и функция $d(\alpha, \Lambda/\mu)$, определенная формулой (6.12). Дифференцируя эту функцию по $\ln \mu$, мы получим

$$0 = \tilde{\beta}(d(\alpha, x)) - \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} d(\alpha, x). \quad (7.1)$$

В частности, при $x = 1$ справедливо равенство

$$\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}) = \beta(\alpha) \frac{d\tilde{\alpha}}{d\alpha}, \quad (7.2)$$

где $\tilde{\alpha} \equiv d(\alpha, 1)$. Это и означает эквивалентность двух различных определений β -функции. Однако в рассматриваемом случае производящий функционал (2.9) на самом деле зависит от точки нормировки μ при фиксированном значении e_0 . Действительно, зависимость от μ в формуле (2.9) возникает из-за зависящей от μ константы перенормировки Z . Эту зависимость можно было бы попытаться исключить при помощи замены $\phi \rightarrow Z^{-1/2}\phi$. Однако в соответствии с результатами работы [9] такая замена имеет аномальный якобиан, который содержит $\ln Z$, зависящий от μ . (В явном виде этот якобиан выписан в работах [10], [16].) Поэтому даже после замены $\phi \rightarrow Z^{-1/2}\phi$ производящий функционал (2.9) будет содержать $\ln Z$ и, следовательно, зависеть от μ . Как следствие уравнение (7.2), которое связывало бы β -функции, определенные различными способами, теперь не имеет места, и функции β и $\tilde{\beta}$ в рассматриваемом случае не являются эквивалентными.

В принципе можно определять производящий функционал так, чтобы он не зависел от точки нормировки. Два возможных способа сделать это были указаны в работе [16]. При этом β -функция (6.10) будет содержать поправки от всех порядков теории возмущений, однако аргументы, основанные на структуре супермультиплета аномалий, по тем или иным причинам разрушаются. Поэтому при использовании регуляризации высшими производными проблема аномалий автоматически не возникает.

В заключение заметим, что было бы интересно провести аналогичное исследование для суперсимметричной теории Янга–Миллса. Однако в этой теории вычисления с использованием метода высших ковариантных производных представляют большую сложность, поскольку введение в теорию слагаемого с высшими *ковариантными* производными [20] существенно усложняет форму действия. В этом случае значительно упростить ситуацию может замена высших ковариантных производных на обычные производные. При этом, конечно, будет нарушена калибровочная инвариантность, что может привести к нарушению тождеств Уорда некоторыми локальными неинвариантными слагаемыми. Тем не менее выбор специальной схемы вычитаний позволяет восстановить калибровочную инвариантность и использовать при вычислениях неинвариантные регуляризации [21]. Для абелевых суперсимметричных теорий такая схема построена в работе [22], а для неабелевых – в [23]. Поэтому вполне возможно, что применение указанной выше регуляризации к суперсимметричным теориям Янга–Миллса позволит провести аналогичные вычисления и в неабелевом случае. В настоящий момент эта работа находится в процессе выполнения.

Благодарности. Работа была поддержана грантом РФФИ № 02-01-00126.

Список литературы

- [1] *S. Ferrara, B. Zumino.* Nucl. Phys. B. 1975. V. 87. P. 207; *T. E. Clark, O. Piquet, K. Sibold.* Nucl. Phys. B. 1978. V. 143. P. 445; *O. Piquet, K. Sibold.* Nucl. Phys. B. 1982. V. 196. P. 428; P. 447.
- [2] *S. L. Adler, W. A. Bardeen.* Phys. Rev. 1969. V. 182. P. 1517.
- [3] *А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
- [4] *S. L. Adler, J. C. Collins, A. Duncan.* Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 1712.
- [5] *V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov.* Phys. Lett. B. 1985. V. 157. P. 169.
- [6] *W. Siegel.* Phys. Lett. B. 1979. V. 84. P. 193.
- [7] *O. V. Tarasov, V. A. Vladimirov.* Phys. Lett. B. 1980. V. 96. P. 94; *M. T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel.* Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 1063; *W. Caswell, D. Zanon.* Phys. Lett. B. 1980. V. 100. P. 152.
- [8] *M. Shifman, A. Vainshtein.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 277. P. 456.
- [9] *N. Arkani-Hamed, H. Mirayama.* JHEP. 2000. V. 0006. P. 030; hep-th/9707133.
- [10] *К. Степаньянц.* ТМФ. 2004. Т. 140. № 1. С. 53; hep-th/0301167.
- [11] *W. Siegel.* Phys. Lett. B. 1980. V. 94. P. 37.
- [12] *G. 't Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189.
- [13] *А. А. Славнов.* ТМФ. 1975. Т. 23. № 1. С. 3; *T. Bakeyev, A. Slavnov.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1539.
- [14] *A. Soloshenko, K. Stepanyantz.* Two-loop renormalization of $N = 1$ supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives. hep-th/0203118.
- [15] *А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц.* ТМФ. 2003. Т. 134. С. 430.
- [16] *А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц.* ТМФ. 2004. Т. 140. № 3. С. 437; hep-th/0304083.
- [17] *V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein, V. Zakharov.* Phys. Lett. B. 1985. V. 166. P. 329.
- [18] *П. Уэст.* Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1989.
- [19] *Д. И. Казаков.* Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 272.
- [20] *P. West.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 113.
- [21] *А. А. Slavnov.* Phys. Lett. B. 2001. V. 518. P. 195; *А. А. Славнов.* ТМФ. 2002. Т. 130. С. 3.
- [22] *А. А. Славнов, К. В. Степаньянц.* ТМФ. 2003. Т. 135. С. 265.
- [23] *А. А. Славнов, К. В. Степаньянц.* ТМФ. 2003. Т. 139. С. 179.

Поступила в редакцию 24.V.2004 г.