Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Ташпулатов, Одномагнитные системы в изотропной примесной негейзенберговской ферромагнитной модели, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 1, 83–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:27:31

ОДНОМАГНОННЫЕ СИСТЕМЫ В ИЗОТРОПНОЙ ПРИМЕСНОЙ НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается одномагнонная система в изотропной примесной негейзенберговской модели с произвольным значением спина. Исследуются спектр и локализованные примесные состояния этой системы на ν -мерной целочисленной решетке Z^ν . Показано, что система имеет не более трех типов локализованных примесных состояний (без учета кратности вырождений их энергии). Найдены области существования этих состояний и вычислены кратности вырождений их энергии.

Ключевые слова: примесные состояния, решетка, взаимодействия, операторы рождения и уничтожения.

Применение пленок в различных областях физики и техники обуславливает значительный интерес к изучению локализованных примесных состояний (ЛПС) магнетиков.

ЛПС в ферромагнетике Гейзенберга с ферромагнитной и антиферромагнитной примесью изучались во многих работах (см., например, [1]), в которых подробно рассматривались случаи линейной или кубической решетки. Было показано, что в линейном случае существуют два типа ЛПС, а в случае кубической решетки – три типа ЛПС.

В работе [2] рассматривался случай ν -мерной решетки и было доказано, что в ν -мерном случае система имеет не более трех типов ЛПС (без учета кратности вырождений их энергии). Показано, что с изменением значений параметров гамильтониана количество ЛПС системы изменяется. Найдены их области существования. Оказывается, что в этом случае ЛПС системы этих трех типов соответственно невырождены, ν и $(\nu - 1)$ -кратно вырождены.

В теоретических исследованиях магнитоупорядоченных систем и при интерпретации экспериментальных фактов, полученных для этих систем, обычно исходили из гейзенберговского обменного гамильтониана (для произвольного значения спина s)

$$H_1 = J \sum_{m,\tau} (\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau}), \quad (1)$$

*Институт ядерной физики АН РУз, Ташкент, Узбекистан. E-mail: toshpul@inp.uz

где J – параметр билинейного обменного взаимодействия между атомами ближайших соседей, $\mathbf{S}_m$ – оператор атомного спина величины s в m -м узле ν -мерной решетки Z^ν , а суммирование по индексу τ обозначает суммирование по ближайшим соседям.

В действительности для произвольного значения спина s изотропный спиновый обменный гамильтониан имеет вид [3]

$$H = \sum_{m,\tau} \sum_{n=1}^{2s} J_n (\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau})^n, \quad (2)$$

где J_n – параметры мультипольных обменных взаимодействий между атомами ближайших соседей. Гамильтониан (2) совпадает с гамильтонианом (1) только при $s = 1/2$, а при $s > 1/2$ появляются члены, содержащие более высокие степени $(\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau})$, которые необходимо учитывать при исследовании магнетиков со значением спина $s > 1/2$. Гамильтониан (2) называется негейзенберговским.

В течении многих десятилетий модель Гейзенберга была основой, на которой развивалась теория магнетизма. Следует отметить, что число магнетиков, близких к идеальным гейзенберговским, не так уж велико. Для магнетиков со значением спина $s > 1/2$ модель Гейзенберга недостаточно хорошо описывает их свойства. Магнитные свойства негейзенберговских магнетиков сильно отличаются от свойств гейзенберговских магнетиков, а расчет обмена высших порядков по спину несравнимо сложнее гейзенберговского.

В данной работе рассматриваются одномагнитные состояния в изотропной примесной негейзенберговской ферромагнитной модели с произвольным значением спина s . Найдены изменение количества ЛПС, их энергии, кратности вырождений этих энергий, области их существования с изменением значений параметров гамильтониана. Насколько нам известно, спектр и ЛПС одномагнитных систем в негейзенберговской изотропной примесной ферромагнитной модели с произвольным значением спина s с учетом мультипольных обменных взаимодействий в литературе не обсуждались.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = - \sum_{m,\tau} \sum_{n=1}^{2s} J_n (\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m+\tau})^n - \sum_{\tau} \sum_{n=1}^{2s} (J_n^0 - J_n) (\mathbf{S}_0 \mathbf{S}_{\tau})^n. \quad (3)$$

Здесь $J_n > 0$ – параметры мультипольного обменного взаимодействия между ближайшими атомами решетки, J_n^0 – параметры мультипольного обменного взаимодействия между атомами и примесями, $\tau = \pm e_j$, где e_j – единичные орты, $j = 1, 2, \dots, \nu$, т.е. суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям, $\mathbf{S}_m = (S_m^x; S_m^y; S_m^z)$ – оператор атомного спина величины s в узле m . Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm i S_m^y$, где S_m^- и S_m^+ – соответственно операторы рождения и уничтожения магнона в узле m .

Гамильтониан (3) действует в симметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями

$S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = s \varphi_0$, $\|\varphi_0\| = 1$. Вектор $S_m^- \varphi_0$ описывает состояние системы одного магнона, находящегося в узле m , со значением спина s . Векторы $\{S_m^- \varphi_0\}$ образуют ортонормальную систему. Замыкание пространства, натянутого на эти векторы, обозначим через $\mathcal{H}_1$, оно евклидово относительно естественного скалярного произведения и называется пространством одномагнонных состояний. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пространство $\mathcal{H}_1$ инвариантно относительно оператора H . Оператор $H_1 = H/\mathcal{H}_1$ является ограниченным самосопряженным оператором, который порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}_1$, действующий в пространстве $l_2(Z^\nu)$ по формуле*

$$\begin{aligned} (\overline{H}_1 f)(p) = & \sum_{k=1}^{2s} (-1)^{k+1} J_k s^k \sum_{\tau} 2^{k-1} [2f(p) - f(p+\tau) - f(p-\tau)] + \\ & + \sum_{k=1}^{2s} (-1)^{k+1} (J_k^0 - J_k) (2s)^k \sum_{\tau} (f(\tau) - f(0)) (\delta_{p,\tau} - \delta_{p,0}), \quad p \in Z^\nu, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера, а суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям. Сам оператор H_1 действует на вектор

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_p f(p) S_p^- \varphi_0, \quad \psi \in \mathcal{H}_1,$$

по формуле

$$H_1 \psi = \sum_p (\overline{H}_1 f)(p) \frac{1}{\sqrt{2s}} S_p^- \varphi_0. \quad (5)$$

Предложение 1 доказывается с использованием известных коммутационных соотношений между операторами S_m^+ , S_p^- и S_q^z .

ЛЕММА 1. *Спектры операторов H_1 и $\overline{H}_1$ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как операторы H_1 и $\overline{H}_1$ являются ограниченными самосопряженными операторами, то, если $\lambda \in \sigma(H_1)$, из критерия Вейля [4] следует существование последовательности $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ такой, что $\|\psi_n\| = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(H_1 - \lambda)\psi_n\| = 0$. Положим $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_p f_n(p) S_p^- \varphi_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(H_1 - \lambda)\psi_n\|^2 &= ((H_1 - \lambda)\psi_n, (H_1 - \lambda)\psi_n) = \\ &= \sum_p \|(\overline{H}_1 - \lambda)f_n(p)\|^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2s}} S_p^- \varphi_0, \frac{1}{\sqrt{2s}} S_p^- \varphi_0 \right) = \\ &= \|(\overline{H}_1 - \lambda)F_n\|^2 \cdot \left(\frac{1}{2s} S_p^+ S_p^- \varphi_0, \varphi_0 \right) = \\ &= \|(\overline{H}_1 - \lambda)F_n\|^2 \left(\frac{1}{2s} \cdot 2s \varphi_0, \varphi_0 \right) = \|(\overline{H}_1 - \lambda)F_n\|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Здесь $F_n = \sum_p f_n(p)$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma(\overline{H}_1)$. Следовательно, $\sigma(H_1) \subset \sigma(\overline{H}_1)$. Обратно, пусть $\bar{\lambda} \in \sigma(\overline{H}_1)$, тогда в силу того же критерия Вейля существует последовательность $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $\|F_n\| = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\overline{H}_1 - \bar{\lambda})F_n\| = 0$. Полагая

$$F_n = \sum_p f_n(p), \quad \|F_n\| = \left(\sum_p |f_n(p)|^2 \right)^{1/2},$$

имеем, что $\|\psi_n\| = \|F_n\| = 1$ и $\|(\overline{H}_1 - \bar{\lambda})F_n\| = \|(H_1 - \bar{\lambda})\psi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $\bar{\lambda} \in \sigma(H_1)$, т.е. $\sigma(\overline{H}_1) \subset \sigma(H_1)$. Эти два включения дают равенство $\sigma(H_1) = \sigma(\overline{H}_1)$.

Видно, что если вектор (5) есть собственная функция оператора H_1 с собственным значением $z \notin G_\nu$, то вектор $F = \sum_p f(p)$ является собственной функцией для оператора $\overline{H}_1$ с тем же собственным значением $z \notin G_\nu$, и это собственное значение имеет одну и ту же кратность. Поэтому для исследования спектра оператора H_1 достаточно исследовать спектр оператора $\overline{H}_1$, действующего в $l_2(Z^\nu)$ по формуле (4).

Спектр и ЛПС оператора H_1 легко изучить в его квазиимпульсном представлении. Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F}: l_2(Z^\nu) \rightarrow L_2(T^\nu).$$

Здесь T^ν — ν -мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$: $\lambda(T^\nu) = 1$.

Пусть

$$\mathcal{F}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_1 \equiv L_2(T^\nu).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Преобразование Фурье переводит оператор $\overline{H}_1$ в оператор $\tilde{H}_1 = \mathcal{F}\overline{H}_1\mathcal{F}^{-1}$, который действует в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_1$ по формуле

$$(\tilde{H}_1 f)(x) = p(s)h(x)f(x) + q(s) \int_{T^\nu} h_1(x, t)f(t) dt, \quad (6)$$

где

$$h(x) = \nu - \sum_{i=1}^{\nu} \cos x_i, \quad h_1(x, t) = \nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(x_i - t_i) - \cos x_i - \cos t_i].$$

Здесь

$$p(s) = -2 \sum_{k=1}^{2s} (-2s)^k J_k, \quad q(s) = -2 \sum_{k=1}^{2s} (-2s)^k (J_k^0 - J_k).$$

Предложение 2 доказывается непосредственным применением преобразования Фурье к (4).

Ясно, что непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ не зависит от функции $q(s)h_1(x, t)$ и заполняет весь отрезок $G_\nu = [m_\nu; M_\nu]$, где

$$m_\nu = \min_{x \in T^\nu} p(s)h(x), \quad M_\nu = \max_{x \in T^\nu} p(s)h(x).$$

Собственная функция $\varphi \in L_2(T^\nu)$ оператора $\tilde{H}_1$, отвечающая собственному значению $z \notin G_\nu$, называется ЛПС оператора $\tilde{H}_1$, а величина z — энергией этого состояния.

Рассмотрим оператор $K_\nu(z)$, действующий в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_1$ по формуле

$$(K_\nu(z)f)(x) = \int_{T^\nu} \frac{h_1(x; t)}{p(s)h(t) - z} f(t) dt, \quad x, t \in T^\nu.$$

Он является вполне непрерывным оператором в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_1$ для значений $z \notin G_\nu$.

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_\nu(z) = & \left(1 + q(s) \int_{T^\nu} \frac{(1 - \cos t_1)(\nu - \sum_{i=1}^\nu \cos t_i) dt}{p(s)h(t) - z}\right) \times \\ & \times \left(1 + q(s) \int_{T^\nu} \frac{\sin^2 t_1 dt}{p(s)h(t) - z}\right)^\nu \times \\ & \times \left(1 + \frac{q(s)}{2} \int_{T^\nu} \frac{(\cos t_1 - \cos t_2)^2 dt}{p(s)h(t) - z}\right)^{\nu-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $dt = dt_1 dt_2 \dots dt_\nu$.

ЛЕММА 2. Число $z_0 \notin G_\nu$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_\nu(z)$, т. е. $\Delta_\nu(z_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае уравнение для собственных значений является интегральным уравнением с вырожденным ядром. Поэтому оно эквивалентно системе линейных однородных уравнений. Известно, что система линейных однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда детерминант системы равен нулю, а детерминант системы есть функция $\Delta_\nu(z)$.

Обозначим через Ω множество значений всех пар $\omega = (p(s), q(s))$ и при $\nu = 1$ введем следующие его подмножества:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\omega : p(s) > 0, -p(s) \leq q(s) < 0\}, & A_2 &= \{\omega : p(s) > 0, q(s) > -p(s)\}, \\ A_3 &= \{\omega : p(s) < 0, q(s) > p(s)\}, & A_4 &= \{\omega : p(s) > 0, p(s) < q(s)\}, \\ A_5 &= \{\omega : p(s) > 0, 0 < q(s) \leq p(s)\}, & A_6 &= \{\omega : p(s) < 0, q(s) \geq p(s)\}, \\ A_7 &= \{\omega : p(s) < 0, 0 < q(s) < -p(s)\}, & A_8 &= \{\omega : p(s) < 0, q(s) > -p(s)\}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{[p(s) + q(s)][p(s) - 3q(s) + \sqrt{D}]}{4q(s)}, \\ z_2 &= \frac{[p(s) + q(s)]^2}{2q(s)}, \\ z_3 &= -\frac{[p(s) + q(s)][p(s) - 3q(s) - \sqrt{D}]}{4q(s)}, \end{aligned}$$

где $D = [p(s) + q(s)][p(s) + 9q(s)]$.

Следующая теорема описывает изменение энергетического спектра оператора $\tilde{H}_1$ в одномерном случае.

ТЕОРЕМА 1. А. Если $\omega \in A_2 \cup A_3$ ($\omega \in A_4 \cup A_8$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два ЛПС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 (z_2 и z_3), причем $z_1 < z_2$ ($z_2 < z_3$) и $z_i < m_1$, $i = 1, 2$ ($z_j > M_1$, $j = 2, 3$).

Б. Если $\omega \in A_6$ ($\omega \in A_5$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное ЛПС φ со значением энергии $z = z_1$ ($z = z_3$), причем $z_1 < m_1$ ($z_3 > M_1$).

В. Если $\omega \in A_1 \cup A_7$, то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет ЛПС.

Приведем набросок доказательства теоремы 1. В одномерном случае уравнение $\Delta_1(z) = 0$ эквивалентно совокупности уравнений

$$1 + q(s) \int_T \frac{(1 - \cos t)^2 dt}{p(s)h(t) - z} = 0 \quad (8)$$

и

$$1 + q(s) \int_T \frac{\sin^2 t dt}{p(s)h(t) - z} = 0. \quad (9)$$

Вычисляя значения интегралов в (8) и (9) в квадратурах для значений $z < m_1$ ($z > M_1$), получаем два алгебраических уравнения. Исследуя полученные уравнения для значений $z < m_1$ ($z > M_1$) и учитывая условия существования решений, немедленно получаем доказательство теоремы 1.

В случае размерности $\nu = 2$ введем следующие множества значений пар ω :

$$Q_1 = \{\omega : p(s) > 0, -p(s) \leq q(s) < 0\}, \quad Q_2 = \{\omega : p(s) < 0, 0 < q(s) \leq -p(s)\},$$

$$Q_3 = \left\{ \omega : p(s) > 0, -\frac{100}{27}p(s) \leq q(s) < -p(s) \right\},$$

$$Q_4 = \left\{ \omega : p(s) < 0, \frac{25}{9}p(s) \leq q(s) < 0 \right\},$$

$$Q_5 = \left\{ \omega : p(s) > 0, 0 < q(s) < \frac{25}{9}p(s) \right\},$$

$$Q_6 = \left\{ \omega : p(s) < 0, -p(s) \leq q(s) < -\frac{25}{9}p(s) \right\},$$

$$Q_7 = \left\{ \omega : p(s) > 0, -\frac{100}{27}p(s) \leq q(s) < -p(s) \right\},$$

$$Q_8 = \left\{ \omega : p(s) < 0, \frac{100}{27}p(s) \leq q(s) < \frac{25}{9}p(s) \right\},$$

$$Q_9 = \left\{ \omega : p(s) > 0, \frac{25}{9}p(s) \leq q(s) < \frac{100}{27}p(s) \right\},$$

$$Q_{10} = \left\{ \omega : p(s) < 0, -\frac{25}{9}p(s) \leq q(s) < -\frac{100}{27}p(s) \right\},$$

$$Q_{11} = \left\{ \omega : p(s) > 0, -\frac{25}{9}p(s) < q(s) \right\}, \quad Q_{12} = \left\{ \omega : p(s) < 0, \frac{100}{27}p(s) < q(s) \right\},$$

$$Q_{13} = \left\{ \omega : p(s) > 0, \frac{100}{27}p(s) \leq q(s) \right\}, \quad Q_{14} = \left\{ \omega : p(s) < 0, -\frac{100}{27}p(s) < q(s) \right\}.$$

Следующая теорема описывает изменение энергетического спектра оператора $\tilde{H}_1$ в двухмерном случае.

ТЕОРЕМА 2. А. Если $\omega \in Q_1 \cup Q_2$, то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет ЛПС.

Б. Если $\omega \in Q_3 \cup Q_4$ ($\omega \in Q_5 \cup Q_6$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное ЛПС φ со значением энергии z_1 (z_2), причем $z_1 < m_2$ ($z_2 > M_2$). Уровень этой энергии невырожден.

В. Если $\omega \in Q_7 \cup Q_8$ ($\omega \in Q_9 \cup Q_{10}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два ЛПС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 , $z_i < m_2$, $i = 1, 2$ (z_3 и z_4 , $z_j > M_2$, $j = 3, 4$), и уровень этих энергий невырожден.

Г. Если $\omega \in Q_{11} \cup Q_{12}$ ($\omega \in Q_{13} \cup Q_{14}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет три ЛПС φ_1 , φ_2 и φ_3 со значениями энергии, соответственно равными z_1 , z_2 , z_3 (z_4 , z_5 , z_6), причем $z_i < m_2$, $i = 1, 2, 3$ ($z_j > M_2$, $j = 4, 5, 6$). Энергетические уровни z_1 и z_3 (z_4 и z_6) невырождены, а уровень z_2 (z_5) двукратно вырожден.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \int_{T^2} \frac{(1 - \cos t_1)(2 - \cos t_1 - \cos t_2)}{p(s)h(t) - z} dt, \\ \psi(z) &= \int_{T^2} \frac{\sin^2 t_1 dt}{p(s)h(t) - z}, \quad \theta(z) = \int_{T^2} \frac{(\cos t_1 - \cos t_2)^2 dt}{p(s)h(t) - z}\end{aligned}$$

являются возрастающими функциями z при $z \notin [m_2; M_2]$. Можно точно вычислить значения этих функций в точках $z = m_2$ и $z = M_2$. При $z < m_2$ и $p(s) > 0$ функция $\varphi(z)$ возрастает от 0 до $1/p(s)$, функция $\psi(z)$ возрастает от 0 до $9/(25p(s))$, а функция $\theta(z)$ возрастает от 0 до $27/(50p(s))$. При $z > M_2$ и $p(s) > 0$ эти функции также возрастают от $-\infty$ до 0, от $-9/(25p(s))$ до 0 и от $-27/(50p(s))$ до 0, соответственно. Если $p(s) < 0$ и $z < m_2$, то эти функции возрастают от 0 до ∞ , от 0 до $-9/(25p(s))$ и от 0 до $-27/(50p(s))$, соответственно. При $p(s) < 0$ и $z > M_2$ функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\theta(z)$ возрастают от $1/p(s)$ до 0, от $9/(25p(s))$ до 0 и от $27/(50p(s))$ до 0, соответственно. Исследуя уравнение $\Delta_2(z) = 0$ вне области непрерывного спектра, немедленно получаем утверждение теоремы.

В случае $\nu = 3$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}a &= \int_{T^3} \frac{\sin^2 t_1 dt_1 dt_2 dt_3}{3 - \cos t_1 - \cos t_2 - \cos t_3} = \int_{T^3} \frac{\sin^2 t_1 dt_1 dt_2 dt_3}{3 + \cos t_1 + \cos t_2 + \cos t_3}, \\ b &= \int_{T^3} \frac{(\cos t_1 - \cos t_2)^2 dt_1 dt_2 dt_3}{3 - \cos t_1 - \cos t_2 - \cos t_3} = \int_{T^3} \frac{(\cos t_1 - \cos t_2)^2 dt_1 dt_2 dt_3}{3 + \cos t_1 + \cos t_2 + \cos t_3}.\end{aligned}$$

Видно, что $0 < a < b < 1$ и $2a < b$. Теперь для случая $\nu = 3$ введем следующие подмножества Ω :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \left\{ \omega : p(s) > 0, -p(s) < q(s) < 0 \right\}, & Q_2 &= \left\{ \omega : p(s) > 0, 0 < q(s) < \frac{p(s)}{3} \right\}, \\
Q_3 &= \left\{ \omega : p(s) < 0, \frac{p(s)}{3} < q(s) < 0 \right\}, & Q_4 &= \left\{ \omega : p(s) < 0, 0 < q(s) < -p(s) \right\}, \\
Q_5 &= \left\{ \omega : p(s) > 0, -\frac{2p(s)}{b} < q(s) \leq -p(s) \right\}, \\
Q_6 &= \left\{ \omega : p(s) < 0, \frac{2p(s)}{b} < q(s) \leq \frac{p(s)}{3} \right\}, \\
Q_7 &= \left\{ \omega : p(s) > 0, \frac{p(s)}{3} < q(s) \leq \frac{2p(s)}{b} \right\}, \\
Q_8 &= \left\{ \omega : p(s) < 0, -p(s) < q(s) \leq -\frac{2p(s)}{b} \right\}, \\
Q_9 &= \left\{ \omega : p(s) > 0, -\frac{p(s)}{a} \leq q(s) < -\frac{2p(s)}{b} \right\}, \\
Q_{10} &= \left\{ \omega : p(s) < 0, \frac{p(s)}{a} < q(s) \leq \frac{2p(s)}{b} \right\}, \\
Q_{11} &= \left\{ \omega : p(s) > 0, \frac{2p(s)}{b} \leq q(s) < \frac{p(s)}{a} \right\}, \\
Q_{12} &= \left\{ \omega : p(s) < 0, -\frac{2p(s)}{b} \leq q(s) < -\frac{p(s)}{a} \right\}, \\
Q_{13} &= \left\{ \omega : p(s) > 0, -\frac{p(s)}{a} \leq q(s) \right\}, & Q_{14} &= \left\{ \omega : p(s) < 0, \frac{p(s)}{a} \leq q(s) \right\}, \\
Q_{15} &= \left\{ \omega : p(s) > 0, \frac{p(s)}{a} \leq q(s) \right\}, & Q_{16} &= \left\{ \omega : p(s) < 0, -\frac{p(s)}{a} \leq q(s) \right\}.
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. А. Пусть $\omega \in Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$. Тогда оператор $\tilde{H}_1$ не имеет ЛПС.

Б. Пусть $\omega \in Q_5 \cup Q_6$ ($\omega \in Q_7 \cup Q_8$). Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное ЛПС φ со значением энергии $z < m_3$ ($z > M_3$). Уровень этой энергии невырожден.

В. Пусть $\omega \in Q_9 \cup Q_{10}$ ($\omega \in Q_{11} \cup Q_{12}$). Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет два ЛПС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 (z_3 и z_4), причем $z_i < m_3$, $i = 1, 2$ ($z_j > M_3$, $j = 3, 4$). Кроме того, энергетический уровень z_1 (z_3) невырожден, а уровень z_2 (z_4) двукратно вырожден.

Г. Пусть $\omega \in Q_{13} \cup Q_{14}$ ($\omega \in Q_{15} \cup Q_{16}$). Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно три ЛПС φ_1 , φ_2 и φ_3 со значениями энергии, соответственно равными z_1 , z_2 , z_3 (z_4 , z_5 , z_6). Причем $z_i < m_3$, $i = 1, 2, 3$ ($z_j > M_3$, $j = 4, 5, 6$). Кроме того, уровень z_1 (z_4) невырожден, уровень z_2 (z_5) двукратно вырожден, а уровень z_3 (z_6) трехкратно вырожден.

Теорема 3 доказывается на основании монотонности функций

$$\varphi(z) = \int_{T^3} \frac{(1 - \cos t_1)(3 - \cos t_1 - \cos t_2 - \cos t_3) dt}{p(s)h(t) - z},$$

$$\psi(z) = \int_{T^3} \frac{\sin^2 t_1 dt}{p(s)h(t) - z}, \quad \theta(z) = \int_{T^3} \frac{(\cos t_1 - \cos t_2)^2 dt}{p(s)h(t) - z}$$

при значениях $z \notin [m_3; M_3]$. Далее воспользуемся значением интегралов Ватсона [5]. При этом необходимо учесть, что в рассматриваемом случае мера нормирована.

Аналогично можно доказать, что в ν -мерной решетке система имеет не более трех типов ЛПС (без учета кратности вырождений их энергетических уровней) со значениями энергии $z_i \notin [m_\nu; M_\nu]$. Кроме того, при $i = 1, 2, 3$ эти энергетические уровни соответственно невырождены, ν , $(\nu - 1)$ -кратно вырождены. Можно найти и область существования этих ЛПС.

Теперь рассмотрим случай $p(s) \equiv 0$.

Если $p(s) \equiv 0$ и $J_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots, 2s$, то функция $\Delta_\nu(z)$ принимает вид

$$\Delta_\nu(z) = \det A \cdot \det B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 \end{pmatrix}$$

— матрица порядка $(\nu + 1) \times (\nu + 1)$, диагональная матрица порядка $\nu \times \nu$, соответственно. Здесь $a_1 = 1 - \nu q(s)/z$, $a_2 = q(s)/(2z)$, $b_1 = q(s)/z$, $b_2 = 1 - q(s)/(2z)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p(s) \equiv 0$ и $J_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots, 2s$. Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два ЛПС (без учета кратности вырождений их энергии) φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными $z_1 = q(s)/2$, $z_2 = (2\nu + 1)q(s)/2$. При этом энергетический уровень z_1 $(2\nu - 1)$ -кратно вырожден, а уровень z_2 невырожден.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение $\Delta_\nu(z) = 0$ эквивалентно совокупности уравнений

$$b_2^{2\nu-1} = 0 \tag{10}$$

и

$$a_1 b_2 - \nu a_2 b_1 = 0. \tag{11}$$

Уравнение (10) имеет корень $z = q(s)/2$, и ясно, что его кратность равна $2\nu - 1$, а уравнение (11) имеет решение $z = z_2$. Следовательно, для произвольных значений ν система обладает не более чем тремя типами ЛПС.

Полученные результаты показывают, что в случае негейзенберговской изотропной примесной ферромагнитной модели при $p(s) \equiv 0$ спектр и ЛПС одномагнитных систем качественно отличаются от соответствующих характеристик изотропной примесной ферромагнитной модели Гейзенберга. Вообще говоря, в случае негейзенберговской изотропной примесной ферромагнитной модели одномагнитных систем имеется не более чем 2ν ЛПС (с учетом кратности вырождений их энергии).

Благодарности. Автор выражает свою благодарность профессору В.И. Чилину за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Ю. А. Изюмов, М. В. Медведев. ЖЭТФ. 1965. Т. 48. № 2. С. 574; В. В. Ганн, Л. Г. Зазунов. ФТТ. 1973. Т. 15. № 2. С. 3535; Y.-L. Wang, H. Callen. Phys. Rev. 1967. V. 160. № 2. P. 358; T. Oguchi, I. Ono. J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. № 1. P. 32; T. Wolfram, J. Callaway. Phys. Rev. 1963. V. 130. № 6. P. 2207; I. Ono, Y. Endo. Phys. Rev. Lett. A. 1972. V. 41. № 5. P. 440.
- [2] С. М. Ташпулатов. ТМФ. 2001. Т. 126. № 3. С. 482.
- [3] E. Schrödinger. Proc. Roy. Irish. Acad. A. 1941. V. 48. P. 39.
- [4] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [5] В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, О. П. Петраковский. ФТТ. 1988. Т. 30. № 10. С. 3044.

Поступила в редакцию 19.VI.2003 г.,
после доработки 7.VI.2004 г.