Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Горский, Спировые цепочки и дуальность между теорией струн и калибровочными теориями, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 179–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1775>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 10:41:35

© 2005 г.

А. С. Горский*

СПИНОВЫЕ ЦЕПОЧКИ И ДУАЛЬНОСТЬ МЕЖДУ ТЕОРИЕЙ СТРУН И КАЛИБРОВОЧНЫМИ ТЕОРИЯМИ

Обсуждается струнная картина, скрывающаяся за интегрируемыми спинowymi цепочками, которые описывают уравнения эволюции в теории Янга–Миллса. Показано, что однопетлевая поправка к оператору дилатации в $N = 4$ теории может быть выражена в терминах двухточечных корреляционных функций на двумерной мировой поверхности струны. Соответствие между интегрируемыми системами Неймана и спинowymi цепочками дает основание считать, что переход к конечным значениям констант связи в калибровочной теории соответствует дискретизации мировой поверхности. Наша гипотеза заключается в том, что модель струнных битов для дискретизованной мировой поверхности отвечает представлению интегрируемых спинowych цепочек через разделенные переменные.

Ключевые слова: спиновые цепочки, дуальность, теория струн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Явная реализация дуальности между струнами и калибровочными теориями остается вызовом для исследователей в течение последних десятилетий, прошедших с того момента, когда она была сформулирована в исходном виде [1]. Важным результатом [2], достигнутым в $N = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (ЯМ), является прямое отображение между модами замкнутой струны в фоновой метрике $AdS_5 \times S_5$ и операторами калибровочной теории [3]. Аномальные размерности операторов калибровочной теории при этом отождествляются с энергиями соответствующих возбуждений струны. Тем не менее до полного решения этой задачи все еще далеко даже в наиболее симметричном случае $N = 4$ суперсимметрии. Главным препятствием остается отсутствие каких-либо указаний на то, как вычислять аномальные размерности операторов калибровочной теории в случае конечных величин констант связи, что эквивалентно струнной картине, возникающей в режиме слабой связи калибровочной теории. В случае сильной связи оказывается справедливым квазиклассическое струнное

* Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: gorsky@heron.itep.ru

описание по Намбу и Гото в фоновой метрике типа анти-де Ситтера, что приводит, например, к явным предсказаниям для наблюдаемых типа вильсоновских петель [4]. Напротив, в режиме слабой связи задача оказывается более сложной, поскольку струна при этом должна рассматриваться с точки зрения квантовой механики. Это означает, что необходимо учитывать полный спектр струнных мод. Таким образом, промежуточной целью оказывается построение динамики замкнутых струн, которая описывала бы режимы как сильной, так и слабой связи, и получение в рамках программы дуальности между калибровочными полями и струнами полного соответствия между многочастичными конформными операторами общего вида и струнными модами.

Другой подход к вычислению аномальных размерностей операторов калибровочной теории связан с открытыми струнами. В нем наблюдаемые вильсоновских петель вычисляются для некоторых специальных контуров. Метод вычисления вильсоновских петель в квантовой хромодинамике, изначально сформулированный в работе [1], был пересмотрен в недавней работе [5] с точки зрения скрытой в нем струнной картины. Вычисления вильсоновских петель в режиме сильной связи дают точное соответствие с вычислениями в замкнутых струнах [6]. В работе [5] на основе отображения в топологическую теорию было указано, что соответствующая струна в режиме слабой связи должна иметь нулевое натяжение, что отвечало исходным ожиданиям. В частности, аномалия типа излома (каспа), задающая производящую функцию для аномальных размерностей операторов на световом конусе, имеющих большой спин и твист, равный двум, [7], была связана в режиме слабой связи с амплитудой двумерной теории ЯМ на диске, допускающей струнное представление.

Вообще говоря, операторы смешиваются в процессе эволюции вдоль потока ренормализационной группы (РГ), следовательно, для того чтобы построить аномальные размерности мультипликативно перенормируемых операторов, надо диагонализировать оператор дилатации, который допускает представление в виде матрицы бесконечного или конечного размера в гильбертовом пространстве калибровочной теории. Оказалось, что оператор дилатации, рассмотренный в работе [8] на уровне одной петли, совпадает с гамильтонианом конечномерной интегрируемой системы. На самом деле явление скрытой интегрируемости потоков РГ при больших N представляется вполне общим, по крайней мере на уровне одной петли. Оно было обнаружено для операторов с меньшими твистами на световом конусе [9] и для квазиартонных операторов произвольных твистов в секторе $SL(2, \mathbb{R})$ [5], операторов с большим зарядом R в $N = 4$ суперсимметричной теории ЯМ [10], равно как и для эволюции в пределе Редже [11]. Более точно, оказалось, что операторы дилатации в приближении одной петли в этих случаях могут быть отождествлены с гамильтонианами спиновых цепочек, отвечающих соответствующим группам $SL(2, \mathbb{R})$, $SO(6)$ и $SL(2, \mathbb{C})$. Недавно была сформулирована [12] объединяющая спиновая цепочка на супергруппе $SU(2, 2|4)$, ответственная за эволюцию $N = 4$ суперсимметричных операторов. Интегрируемость многочастичной системы предполагает существование высших интегралов движения, находящихся в инволюции по отношению к оператору дилатации. Таким образом, аномальная размерность оператора,

имеющего N составляющих, зависит в общем случае от $(N - 2)$ скрытых квантовых чисел. Другой важный вопрос, поднятый в работах [13] (см. также работу [14], содержащую исходное обсуждение данного вопроса), связан с ролью нелокальных интегралов движения.

Необходимо найти подходящее место для этих интегрируемых систем в рамках подхода дуальности между калибровочными теориями и струнами. В работе [15] утверждалось, что скрытая интегрируемость могла бы быть ключевым свойством для струнного описания режима слабой связи в калибровочной теории. Но при этом такие наиболее общие характеристики интегрируемых систем, как существование огромного числа локальных и нелокальных интегралов движения, возникновение римановых поверхностей в качестве спектральных кривых, возможность разделения переменных и т.д., должны были бы найти отражение в струнном описании. Естественная гипотеза о том, где может возникнуть интегрируемая конечномерная система, связана с дискретизацией мировой поверхности струны. Такая идея появилась довольно давно в контексте модели “струнных битов” в калибровке светового конуса [16].

В данной работе исследуется возможность струнного происхождения указанных интегрируемых систем. Сначала будут рассмотрены различные представления аномалии типа каспа, задающие аномальные размерности операторов на световом конусе с большими спинами относительно группы $SL(2, \mathbb{R})$. В работе [5] утверждалось, что эта аномалия может быть представлена в терминах пропагатора частицы на многообразии группы $SL(2, \mathbb{R})$ или в виде статистической суммы двумерной $SL(2, \mathbb{R})$ теории ЯМ на диске. Мы покажем, что имеет место еще одно представление, связанное с описанием в терминах мировой поверхности двухточечной корреляционной функции в теории массивной свободной двумерной скалярной частицы. Так как аномалия типа каспа задает аномальные размерности только для операторов с большим спином, мы, кроме того, будем искать сходные двухточечные представления в двумерной теории для операторов произвольных спинов. Будет показано, что такие представления могут быть получены из той же скалярной теории после преобразования вращения, приводящего к риндлеровскому пространству Гильберта для теории на мировой поверхности. Другой аргумент связан с обобщением движения частицы на многообразии группы $SL(2, \mathbb{R})$ или, что эквивалентно, на пространстве AdS_3 , на движение струны на том же многообразии.

Кроме вычисления аномальных размерностей с помощью аномалии типа каспа, мы также попробуем выяснить происхождение спиновых цепочек. Естественным объектом, возникающим при описании спиновых цепочек, задающих эволюцию операторов на световом конусе, оказывается точно решаемая $(2 + 1)$ -мерная гравитация [17]. В случае отрицательной космологической постоянной она описывается теорией Черна–Саймонса (ЧС) с группой $SL(2, \mathbb{C})$, в то время как в плоском пространстве описание дается с помощью калибровочной группы $ISO(2, 1)$. Модули плоских связностей, параметризующие фазовое пространство теории ЧС, при этом отображаются в модули комплексных структур поверхностей фиксированного времени в гамильтоновом описании трехмерной гравитации. Спировые цепочки получаются, если добавить вильсоновские линии, пред-

ставляющие точечные частицы, и рассмотреть пространство модулей плоских связностей поверхностей с проколами [18]. Тогда монодромии связностей вокруг отмеченных точек можно связать с локальными операторами Лакса спиновой цепочки. Отметим, что это соответствие между статистическими моделями и узлами, образуемыми вильсоновскими петлями, имеет длинную историю, восходящую к работам [19]. Чтобы построить двухчастичный гамильтониан для цепочки высших спинов, следует использовать гамильтоново представление динамики двухчастичных состояний, взаимодействующих с квантовой гравитацией в трехмерном пространстве. Оказывается, что соответствующий гамильтониан совпадает с гамильтонианом, описывающим эволюцию двухчастичных операторов конформной теории поля.

Это вычисление позволяет находить однопетлевые вклады в аномальные размерности, и представляется в высшей степени желательным получить описание в терминах спиновых цепочек в режиме сильной связи. Наше продвижение в этом направлении использует соотношение между двумя интегрируемыми конечномерными системами. Именно, имеет место отображение между дискретизованной системой Неймана и стационарными решениями спиновых XU -цепочек [20]. Недавно было показано [21], что система Неймана описывает решение уравнений движения классической струны, движущейся вдоль S^2 -составляющей фоновой метрики. На основании соответствия с спиновой XU -цепочкой можно при этом утверждать, что спиновые цепочки возникают, если принять в расчет поправки к режиму сильной связи, связанные с дискретизацией мировой поверхности.

Так как в интегрируемых системах имеет место естественная процедура разделения переменных, то вполне осмысленным представляется вопрос о ее месте в струнной теории и в общем контексте потоков РГ. Геометрическое представление начинается с рассмотрения классических спиновых цепочек, уравнения движения которых допускают решения в терминах семейств римановых поверхностей, инвариантных относительно потоков РГ. Это приводит к тому, что существует взаимно однозначное соответствие между операторами и римановыми поверхностями, модули которых задаются аномальными размерностями этих операторов, с одной стороны, и высшими интегралами движения, с другой [15]. Мы утверждаем, что естественным струнным партнером для разделенных переменных спиновых цепочек может служить модель струнных битов в калибровке светового конуса.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 обсуждаются представления для аномальных размерностей операторов большого $SL(2, \mathbb{R})$ -спина, вытекающее из аномалии типа каспа, и представление для случая конечного спина, вытекающее из двухчастичной корреляционной функции в теории свободного массивного скалярного поля на мировой поверхности при подходящем выборе пространства Гильберта. В разделе 3 обсуждается интерпретация локальных операторов Лакса спиновых цепочек и соответствующих гамильтонианов в терминах теории ЧС с некомпактной группой и теории трехмерной гравитации. Соответствие между системой Неймана и спиновыми цепочками используется в разделе 4, чтобы показать, что случай конечной константы

связи в калибровочной теории приводит к дискретизации мировой поверхности. Раздел 5 посвящен описанию возможной струнной интерпретации процедуры разделения переменных, хорошо известной в интегрируемых теориях. Заключение и некоторые открытые проблемы содержатся в разделе 6.

2. АНОМАЛИЯ ТИПА КАСПА И ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ

В этом разделе строятся двумерные представления для аномальных размерностей ведущих операторов твистов на световом конусе. Поскольку аномальные размерности операторов в размерности четыре можно извлечь из их двухточечных корреляционных функций, представляется желательным научиться получать эти функции из соответствующих двухточечных функций в размерности два. Для этого построим соответствующую теорию на мировой поверхности в размерности два. При этом следует выделять случай операторов с большими $SL(2, \mathbb{R})$ -спинами, который может быть описан в рамках некоторого квазиклассического приближения, и случай операторов общего спина. Мы покажем, что переход от случая больших спинов к произвольным спинам соответствует выбору гильбертова пространства в двумерной теории на мировой поверхности.

Начнем с воспроизведения вычисления с помощью аномалии типа каспа аномальных размерностей операторов с большим спином. Для этого напомним вычисление в рамках теории возмущений среднего от вильсоновской петли с изломом (каспом). Аномалия типа каспа получается при интегрировании по вставке глюонного пропагатора между двумя кривыми. В струнной картине эти кривые задают границу мирового листа открытой струны.

В низшем порядке разложения по константе связи среднее от вильсоновской кривой задается выражением

$$W = \left\langle P \exp i \oint_{\wedge} dx_{\mu} A^{\mu}(x) \right\rangle = 1 + \frac{(ig)^2}{2} t^a t^a \int_C dx_{\mu} \int_C dy_{\nu} D^{\mu\nu}(x-y) + O(g^4), \quad (1)$$

где $D_{\mu\nu}(x-y)\delta^{ab} = \langle 0 | T A_{\mu}^a(x) A_{\nu}^b(y) | 0 \rangle$ — глюонный пропагатор, а $t^a t^a = N_c$ — оператор Казимира в присоединенном представлении группы $SU(N_c)$. Чтобы вычислить аномалию типа каспа, выберем контур интегрирования C с изломом, что даст

$$W(v \cdot v') = 1 - \frac{\alpha_s N_c}{\pi} (w(v \cdot v') - w(1)) + O(\alpha_s^2), \quad (2)$$

где v_{μ} и v'_{μ} суть касательные векторы к контуру интегрирования вблизи излома, $v^2 = v'^2 = 1$, $v \cdot v' = \text{ch } \theta$, $w(1) = w(v \cdot v) = w(v' \cdot v')$ и

$$w(v \cdot v') = \int_{-\infty}^0 ds \int_0^{\infty} dt \frac{v \cdot v'}{(vs - v't)^2}, \quad (3)$$

где s и t суть собственные времена. При вычислении старших поправок по α_s следует принимать во внимание, что вильсоновская петля обладает свойством неабелева экспоненцирования,

$$\ln W = \sum_k \frac{\alpha_s N_c}{\pi} w_k, \quad (4)$$

где веса w_k получают вклады из диаграмм вплоть до k -го порядка по α_s с максимальной неабелевой структурой и, таким образом, $w_1 = w(v \cdot v') - w(1)$. Явное интегрирование дает $w(v \cdot v') = \theta \operatorname{cth} \theta \ln(\mu r_{\max})$, где $r_{\min} \sim 1/\mu$ и $r_{\max}$ — масштабы ультрафиолетового и инфракрасного обрезаний, соответственно.

В работе [5] было показано, что аномалия типа каспа на уровне одной петли может быть представлена как амплитуда перехода для частицы на многообразии группы $SL(2, \mathbb{R})$. В самом деле, можно провести процедуру квантования с использованием четырехмерных (евклидовых) полярных координат $r^2 = x_\mu^2$ и $v_\mu = x_\mu/r$. Тогда вклад низшего порядка в аномалию типа каспа при радиальном квантовании принимает факторизованный вид:

$$w(v \cdot v') = -\frac{1}{2}(\langle -v' | 1/L^2 | v \rangle + 1) \int d \ln r, \quad (5)$$

где

$$L^2 = \frac{1}{8} l^{\mu\nu} l_{\mu\nu}, \quad l_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad (6)$$

и v обозначает точку на (гипер)сфере $SO(3, 1)/SO(3)$, задаваемую единичным вектором v_μ . Таким образом, в режиме слабой связи аномальная размерность, обусловленная каспом, принимает вид

$$\Gamma_{\text{cusp}}(\theta; \alpha_s) = -\frac{\alpha_s N_c}{2\pi}(\langle -v' | 1/L^2 | v \rangle - \langle v | 1/L^2 | v \rangle) + O(\alpha_s^2). \quad (7)$$

Известно, что динамика частицы на групповом многообразии может быть соотнесена с помощью некоторого преобразования T -дуальности с амплитудами двумерной теории ЯМ с той же самой группой. Поэтому можно эквивалентно интерпретировать аномалию типа каспа как статистическую сумму $SL(2, \mathbb{R})$ теории ЯМ на диске, проинтегрированную по площади τ [5]:

$$\Gamma_{\text{cusp}}(\theta; \alpha_s) = -\frac{\alpha_s N_c}{2\pi} \int_0^\infty d\tau (\mathcal{Z}[U; 2\tau] - \mathcal{Z}[\mathbf{1}; 2\tau]), \quad (8)$$

где U представляет собой голономию вдоль границы диска, связанную с θ соотношением $\operatorname{tr} U(\theta) = 2 \operatorname{ch} \theta$.

Аномальную размерность операторов с большим спином S можно получить из аномалии типа каспа, если произвести следующую подстановку при больших θ [7]:

$$e^\theta = iS, \quad (9)$$

что сводится к аналитическому продолжению по конусной переменной, если рассмотреть вильсоновский контур, имеющий форму буквы П, у которого верхняя часть контура близка к световому конусу.

Покажем, что аномалия типа каспа может быть сформулирована во вторично квантованной картине на двумерной мировой поверхности как двухточечная корреляционная функция. Для этого рассмотрим двумерную теорию поля на мировой поверхности с уравнением движения

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi + m^2\phi = 0, \quad (10)$$

решение которого допускает следующее разложение по модам:

$$\phi(x, t) = \int \frac{d\beta}{2\pi} (a^*(\beta)e^{-im(x \operatorname{sh} \beta - t \operatorname{ch} \beta)} + a(\beta)e^{im(x \operatorname{sh} \beta - t \operatorname{ch} \beta)}). \quad (11)$$

В области пространства-времени $x > |t| > 0$ удобно ввести координаты Риндлера:

$$x = r \operatorname{ch} \theta, \quad t = r \operatorname{sh} \theta, \quad -\infty < \theta < +\infty, \quad 0 < r < +\infty. \quad (12)$$

Произведем теперь следующее преобразование Лапласа по отношению к радиальной координате:

$$\lambda_\theta(\alpha) = \int dr e^{imr \operatorname{sh} \alpha} \left(-\frac{\partial_\theta}{r} + im \operatorname{ch} \alpha \right) \phi(r, \theta). \quad (13)$$

Тогда коммутационные соотношения для поля, преобразованного по Лапласу, примут вид $[\lambda(\alpha_1), \lambda(\alpha_2)] = i\hbar \operatorname{th}((\alpha_1 - \alpha_2)/2)$, а гильбертово пространство при этом будет натянуто на векторы $a(\beta_n) \dots a(\beta_1)|\operatorname{vac}\rangle$, где состояние вакуума задается соотношениями

$$a(\beta)|\operatorname{vac}\rangle = 0, \quad \langle \operatorname{vac}|a^+(\beta) = 0. \quad (14)$$

Можно ввести двухточечную корреляционную функцию

$$F(\alpha_1 - \alpha_2) = \langle \operatorname{vac}|\lambda(\alpha_1)\lambda(\alpha_2)|\operatorname{vac}\rangle, \quad (15)$$

при этом явное вычисление дает следующий ответ [22]:

$$F(\alpha - i\pi) = -\frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{cth}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \text{сингулярные члены}. \quad (16)$$

В разности $F(\alpha - i\pi) - F(0)$ сингулярные члены сокращаются, и эта разность совпадает с аномалией типа каспа в соответствии с интерпретацией, предложенной в работе [5] в первично квантованной картине.

Однако аномалия типа каспа задает аномальные размерности только для операторов с большими $SL(2, \mathbb{R})$ -спинами S , при этом $\gamma_S \propto \ln S$, что отражает асимптотическое поведение функции $\psi(S)$ при больших S , где $\psi(x) = d \ln \Gamma(x)/dx$. Поэтому естественной

представляется задача такой модификации двухчастичной корреляционной функции, которая обеспечила бы правильное ее поведение при произвольном спине. Замечательным образом ответ оказывается прост: достаточно произвести вращение в гильбертовом пространстве теории от канонического вакуума пространства Минковского к риндлеровскому вакууму, отвечающему теории на полубесконечной прямой $x > 0$, $t = 0$. Наиболее важным обстоятельством при этом является то, что в квантовой гравитации гильбертово пространство зависит от выбора системы координат; это свойство, например, приводит к эффекту Унру для ускоряющегося наблюдателя. Подходящее представление указанного пространства выглядит следующим образом. Рассмотрим расширенное решение уравнения Клейна–Гордона

$$\pi\phi(r, \theta) = \int dk K_{ik}(r) [b_k e^{-ik\theta} + b_k^+ e^{ik\theta}], \quad (17)$$

где $K_{ik}(r)$ – функции Макдональда, а осцилляторы соотносятся с функциями $\lambda(\alpha)$ следующим образом:

$$\lambda(\alpha + i\pi/2) = i \int dk \frac{b_k e^{ik\alpha}}{\text{sh } \pi k}. \quad (18)$$

Таким образом, новые осцилляторы будут иметь следующие коммутационные соотношения: $[b_k, b_{k'}] = \text{sh}(\pi k) \delta(k + k')$, а риндлеровский вакуум будет задаваться соотношениями $b_k |0\rangle = \langle 0| b_{-k} = 0$, $k > 0$. Заметим, что вакуум пространства Минковского при этом можно интерпретировать как некоторое когерентное состояние над парой краевых риндлеровских вакуумов:

$$|0\rangle_{\text{Min}} = \prod_k \exp(e^{-2\pi\omega_k} a_{R-,k}^+ a_{R+,k}^+) |0\rangle_{\text{Rind}}, \quad (19)$$

где $a_{R\pm,k}^+$ – операторы рождения над правым (левым) краевым риндлеровским вакуумом. Двухточечная корреляционная функция, вычисленная над риндлеровским вакуумом, имеет вид [22]

$$\langle 0 | \lambda(\alpha_1) \lambda(\alpha_2) | 0 \rangle = \pi \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{i\alpha}{2\pi} \right) + \text{const}. \quad (20)$$

После подстановки $i\alpha/2\pi = J$, сходной с подстановкой (9), получим правильную аномальную размерность для оператора с твистом, равным двум. Поэтому полный дилатационный оператор на уровне одной петли в $N = 4$ суперсимметричной теории ЯМ, найденный в работе [12],

$$D = \sum_k H_{k,k+1}, \quad H_{k,k+1} = \sum_j h(j) P_{k,k+1|j}, \quad (21)$$

где $h(j)$ – номера гармоник, а оператор $P_{k,k+1|j}$ проецирует гильбертово пространство системы двух частиц на фиксированное представление группы $PSU(2, 2|4)$, может быть действительно представлен в виде двухточечной корреляционной функции двумерной теории.

3. ПОЛУЧЕНИЕ СПИНОВЫХ ЦЕПОЧЕК ИЗ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В работе [5] было показано, что аномалия типа каспа может быть интерпретирована в терминах наблюдаемых двумерной теории Баталина–Фрадкина с группой $SL(2, \mathbb{R})$, что эквивалентно дилатонной гравитации Джакива–Тейтельбома. Обсудим в этом разделе некоторое обобщение этого наблюдения и покажем, что основные составляющие техники спиновых цепочек, такие как операторы Лакса и двухчастичные гамильтонианы, следующие из фундаментальной R -матрицы, могут быть заданы в рамках теории гравитации.

Будем использовать общий метод получения интегрируемых моделей из специальных наблюдаемых теории ЧС. Ключевая идея состоит в том, что, рассматривая наблюдаемые на нескольких вильсоновских кривых, можно вывести трансфер-матрицу вершиноподобной интегрируемой модели. Будем рассматривать теорию ЧС с некомпактной группой, отвечающей теории гравитации [23]. Такие теории проявляли себя в контексте теории трехмерной гравитации по крайней мере двояко. Во-первых, теория гравитации на пространстве AdS_3 описывается теорией ЧС с калибровочной группой $SL(2, \mathbb{C})$. Во-вторых, струнная теория на пространстве AdS_3 с фоновой формой Невье–Шварца эквивалентна модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена (ВЗНВ) с группой $SL(2, \mathbb{R})$. Именно к этой теории теория ЧС с группой $SL(2, \mathbb{R})$ редуцируется на границе в соответствии со стандартным соответствием между моделями ЧС и ВЗНВ. Некомпактная группа $SL(2, \mathbb{R})$ при этом играет роль коллинеарной конформной группы, задающей перенормировку операторов на световом конусе.

Напомним сначала, как фундаментальные и вспомогательные трансфер-матрицы спиновых цепочек с произвольными спинами возникают из формализма R -матрицы (см., например, работу [24]), а потом покажем, как такие же объекты возникают из теории трехмерной гравитации. Отправной точкой будет универсальная $\mathcal{R}$ -матрица, которая дает оператор Лакса при переходе к конкретному представлению

$$L_{n,m}(\lambda - \mu) = (\rho(n, \lambda) \otimes \rho(m, \mu))\mathcal{R} = R_{n,m}(\lambda - \mu),$$

где $\rho(n, \lambda)$ следует рассматривать как представление алгебры янгианов для XXX-модели или как квантовую аффинную алгебру для XXZ-модели. Эти алгебры играют роль алгебр наблюдаемых для соответствующих динамических систем. Соответствующая проекция уравнения Янга–Бакстера на тройку представлений имеет вид

$$R_{s_1, s_2}(\lambda - \mu)R_{1/2, s_2}(\sigma - \mu)R_{1/2, s_1}(\sigma - \lambda) = R_{s_1, s_2}(\lambda - \sigma)R_{1/2, s_2}(\sigma - \mu)R_{s_2, s_1}(\mu - \lambda). \quad (22)$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай $n = m = s$; при этом соответствующий оператор Лакса L_F называется фундаментальным.

Решение уравнения Янга–Бакстера будем искать в виде $R_{s_1, s_2} = P_{s_1, s_2}r((S, T), \lambda)$, где P_{s_1, s_2} — оператор перестановки между двумя $(2s + 1)$ -мерными пространствами, а

(S, T) – оператор Казимира второго порядка. Уравнение (22) при этом принимает вид

$$(\lambda S_a + (T \times S)_a) r(\lambda) = r(\lambda) (\lambda T_a + (T \times S)_a) \quad (23)$$

и может быть сведено к функциональному уравнению

$$(\lambda + iJ) r(\lambda, J - 1) = r(\lambda, J) (-\lambda + iJ), \quad (24)$$

имеющему решение

$$r(J, \lambda) = \frac{\Gamma(J + 1 + i\lambda)}{\Gamma(J + 1 - i\lambda)}. \quad (25)$$

Из произведения локальных фундаментальных операторов Лакса $L_{i,F}$ теперь можно получить фундаментальную трансфер-матрицу $T_F(\lambda)$, удовлетворяющую коммутационным соотношениям $[T_F(\lambda), T_F(\mu)] = 0$. Более того, вследствие уравнения Янга–Бакстера фундаментальная трансфер-матрица T_F коммутирует со вспомогательной трансфер-матрицей T_a , полученной из представления матрицы $R_{1/2,s}$: $[T_F(\lambda), T_a(\mu)] = 0$. Гамильтониан спиновой цепочки, описывающий аномальные размерности, можно получить из фундаментальной трансфер-матрицы:

$$H = i \frac{d}{d\lambda} \ln T_F(\lambda) |_{\lambda=0}. \quad (26)$$

Обсудим теперь, как фундаментальная и вспомогательная трансфер-матрицы возникают в теории ЧС. Начнем с вывода вспомогательной трансфер-матрицы [18] и рассмотрим $SL(2, \mathbb{R})$ теорию ЧС с добавленной вильсоновской петлей. Монодромии вокруг отмеченных точек имеют вид

$$M_i = P \exp \int_{\Gamma_i} A, \quad (27)$$

где Γ_i – контур, обходящий вокруг i -й отмеченной точки. Введем монодромию плоских связностей со спектральным параметром $M_i(\lambda) = M_i + \lambda I$, где I – единичная матрица. Матрица монодромий калибровочно-эквивалентна локальному L -оператору спиновой XXZ -цепочки: $M_i = K_{i-1}(L_+(i) + \lambda L_-(i)) K_i^{-1}$, где матрица L_i удовлетворяет стандартным квадратичным R -матричным соотношениям и допускает разложение $L_i = L_+(i) L_-(i)^{-1}$, а $K_i = L_-(1) \dots L_-(i-1)$. Таким образом, $M_i = K_i L_i K_i^{-1}$, и следы матриц монодромий для $M_i(\lambda)$ и $L_i(\lambda)$ совпадают [18]. Это означает, что мы получили желаемую матрицу монодромии для спиновой цепочки. Отметим, что спиновые цепочки возникают на струнной мировой поверхности, а не на пространстве конфигураций (target space), что отвечает нашим ожиданиям. Поскольку параметр анизотропии зависит от уровня k стандартным образом, в квазиклассическом пределе $k \rightarrow \infty$ возникает спиновая цепочка XXX -модели. Подчеркнем, что представление спиновой цепочки в виде возмущенной теории ЧС приводит к искомой струнной картине, основанной на

компактной группе, отвечающей операторам в геометрии сферы S_5 . В самом деле, в работе [23] было доказано, что теория ЧС с компактной группой допускает струнное описание, в котором номер уровня k задает натяжение открытой струны.

Выше было показано, что оператор Лакса для спиновой пары $(1/2, s)$ можно получить из теории ЧС. Перейдем теперь к выводу гамильтониана спиновой цепочки, исходя из фундаментальной R -матрицы для спиновой пары (s, s) . Сначала определим двухчастичный гамильтониан с точки зрения трехмерной гравитации, описываемой действием ЧС. Для этого рассмотрим систему двух частиц в трехмерной гравитации. Известно, что в трехмерной гравитации частица создает коническую сингулярность, а потому следует ожидать, что соответствующий гамильтониан должен описывать движение пробной частицы на конусе, развертка угла при вершине которого должна задаваться полной энергией.

В работе [25] утверждалось, что в формализме второго порядка Арновитта, Дезера и Мизнера для теории трехмерной гравитации, взаимодействующей с точечными частицами, гамильтонова связь в калибровке максимального слоения может быть представлена как уравнение Лиувилля с источниками

$$\Delta\phi = -e^\phi - 4\pi \sum_n \delta(z - z_n)(\mu_n - 1) + 4\pi \sum_a \delta(z - z_a), \quad (28)$$

где μ_n — массы частиц, z_n — координаты частиц, а z_a — так называемые явные сингулярности.

Можно показать, что явные сингулярности отсутствуют в случае двух частиц, при этом движение частиц становится гамильтоновым с гамильтонианом $H = \ln Pz + \ln \bar{P}\bar{z}$, где z — относительная координата частиц, P — сопряженный импульс. Этот гамильтониан совпадает в классическом пределе с гамильтонианом спиновой цепочки с двумя узлами.

4. СПИНОВЫЕ ЦЕПОЧКИ В РЕЖИМЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Поясним теперь, как спиновые цепочки возникают в режиме сильной связи. Напомним, что в этом режиме струна допускает классическое описание, и именно энергия классической струны задает аномальные размерности соответствующего оператора калибровочной теории, который в режиме сильной связи масштабно преобразуется как $\sqrt{\lambda}$, где $\lambda = g^2 N$. Частные решения классических уравнений движения струны в фоновом поле $\text{AdS}_5 \times S_5$ отвечают некоторым операторам $N = 4$ калибровочной теории. Известны различные полезные представления, параметризующие движения классических струн. В частности, в работах [21] была рассмотрена следующая параметризация общего движения струны на S_5 :

$$X_1 + iX_2 = x_1(\sigma)e^{\omega_1\tau}, \quad X_3 + iX_4 = x_2(\sigma)e^{\omega_2\tau}, \quad X_5 + iX_6 = x_3(\sigma)e^{\omega_3\tau}, \quad (29)$$

где координаты X_i параметризуют движение на части геометрии, отвечающей сфере S_5 . Это движение соответствует струне, вращающейся на сфере S_5 с тремя угловыми

моментами ω_i , $i = 1, 2, 3$. При подстановке этого представления в уравнения движения они сводятся к конечномерной интегрируемой системе Неймана, энергия которой задает аномальные размерности операторов с ненулевым R -зарядом [21].

Известно, что спиновые цепочки должны возникать, если принять во внимание квантовые поправки к классическим решениям. Покажем, что такие поправки приводят к дискретизации мировой поверхности. Ключевое наблюдение состоит в том, что существует отображение, связывающее дискретизованную систему Неймана и спиновые цепочки типа XYZ [20]. Это отображение формулируется следующим образом. Стационарные решения классических уравнений движения XYZ -цепочки совпадают с эволюцией системы Неймана относительно дискретного времени. А именно, рассмотрим стационарное уравнение спиновой XYZ -цепочки с классическим гамильтонианом

$$H = \sum_i (S_i, JS_{i+1}), \quad (30)$$

$$S_{i+1} + S_{i-1} = 2(S_{i-1}, J^{-1}S_i)(J^{-1}S_i)^{-2}J^{-1}S_i. \quad (31)$$

Решения этого уравнения имеют вид [20]

$$S_k^n = \beta_k J_n \frac{\theta(k\vec{U} + \vec{\rho})}{\theta(\vec{\rho})}, \quad (32)$$

где $\vec{U}$ – вектор b -периодов дифференциала Абеля третьего рода Ω , нормированного условиями $\oint_{a_i} \Omega = 0$, а параметры β_i задаются нормировочными условиями $S_i^2 = 1$. Дифференциалы заданы на римановой поверхности, представляющей собой спектральную кривую динамической системы Неймана.

В эволюции относительно дискретного времени предполагается, что имеют место динамические отображения, соответствующие конечным сдвигам точек на спектральной кривой, замещающим непрерывное движение в канонической системе Неймана. Значение переменной x_i , представляющей собой степень свободы системы, на k -м интервале времени отождествляется с величиной i -й спиновой переменной на k -м узле цепочки S_k^i . С точки зрения теории струн переменная времени системы Неймана соответствует координате вдоль замкнутой струны, а потому дискретизация времени отвечает дискретизации струнной мировой поверхности, и вместо струны при этом мы имеем набор спиновых степеней свободы S_k^i .

Следует сделать несколько замечаний. Во-первых, удивительно, что род спектральных кривых может совпадать для двух столь разных моделей. На первый взгляд система Неймана имеет спектральную кривую рода два, в то время как спиновая цепочка имеет спектральную кривую старшего рода, зависящего от числа узлов решетки. Однако надо принять во внимание то, что рассматриваются именно стационарные решения уравнений движения спиновой цепочки. Для таких стационарных решений род кривой уменьшается и становится равным роду кривой соответствующей системы Неймана. Сходные

редукции родов кривых для стационарных решений наблюдались недавно в работе [26], хотя и в другом контексте. Во-вторых, важно отметить, что гамильтониан дискретизованной системы Неймана можно отождествить с неглавным интегралом движения спиновой цепочки

$$H_3 = (JS_n)^2 + (JS_{n+1})^2 - (S_n, JS_{n+1})^2, \quad (33)$$

который переходит в стандартный гамильтониан системы Неймана в непрерывном пределе. Наконец, для того чтобы найти число узлов спиновой цепочки, можно рассмотреть решение классических уравнений движения и определить период по отношению к дискретной переменной k , который задается величиной U . Прямое вычисление показывает, что длина цепочки задается величиной R -заряда для спиновой цепочки $SO(6)$. Сходным образом струна на дискретизованной мировой поверхности в секторе $SL(2, \mathbb{R})$ сводится к XXX -цепочке длина которой пропорциональна числу участвующих партонов. Таким образом, видно, что спиновые цепочки связаны с квазиклассическим движением струны после дискретизации мировой поверхности. Число узлов спиновой цепочки задается классическим движением струны.

5. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ И МОДЕЛЬ СТРУННЫХ БИТОВ

Режим слабой связи в калибровочной теории отвечает режиму сильной связи в σ -модели. Один из подходов к описанию режима сильной связи состоит в дискретизации мировой поверхности, а потому эта процедура представляется естественной и для рассматриваемой задачи. В предыдущем разделе было показано, что дискретизация естественным образом возникает в интегрируемых системах при конечной величине константы связи. Соответствующая модель на дискретизованной мировой поверхности известна как модель струнных битов [16]. Она определяется для струны в калибровке светового конуса, а число битов соответствует расщеплению полного импульса P_+ на фракции. Обсудим теперь, как модель струнных битов может возникать из вычислений в рамках теории возмущений, и обсудим предположение, что отдельный бит можно идентифицировать с переменной разделения для некоторой спиновой цепочки.

Начнем с классической картины. Модель струнных битов предполагает, что фазовое пространство струны может быть представлено как M^n/S^n в случае n битов, где M — пространство состояний, а S^n — группа перестановок n элементов. Например, в геометрии плоских волн число битов совпадает с R -зарядом J [27], который в свою очередь совпадает в секторе $SL(2, \mathbb{R})$ с числом партонов, участвующих в многочастичных процессах. Главное обстоятельство состоит в том, что, для того чтобы биты воссоздавали правильную мировую поверхность струны как целого, их классическое движение должно быть в высшей степени скоррелированным, т.е., несмотря на взаимодействие между битами, все они имеют сходный характер классического движения.

Сравним общие свойства модели струнных битов и процедуры разделения переменных в интегрируемых системах. Разделение переменных в произвольной интегрируе-

мой системе с n степенями свободы можно интерпретировать как каноническое преобразование, приводящее фазовое пространство к виду M^n/S^n , где двумерное комплексное многообразие M зависит от рассматриваемой модели. Более пристальный взгляд показывает, что симметрическая степень должна быть заменена на гильбертову схему $\text{Hilb}^n M$ [28]. Искомая “когерентность” классического движения проявляется следующим образом. Можно задать спектральную кривую интегрируемой системы уравнением $\det(T(\lambda) - \eta) = 0$, где $T(\lambda)$ – трансфер-матрица, действующая во вспомогательном пространстве, явный вид которой зависит от модели. Тогда n разделенных переменных движутся классически по римановой поверхности старшего рода подобно движению n битов, для которых риманова поверхность представляет собой мировую поверхность. Заметим, что процедура разделения переменных на языке бран соответствует реализации системы в терминах D0-бран [28].

Так как мы ищем спектр аномальных размерностей, именно квантовый спектр спиновых цепочек представляет наибольший интерес. На квантовом уровне уравнение спектральной кривой становится оператором, действующим на функцию $Q(x)$, зависящую от одной переменной разделения. Эта функция $Q(x)$ в теории интегрируемых систем известна как функция Бакстера. Тогда, грубо говоря, волновая функция становится произведением n Q -функций, зависящих от переменных разделения x_i . Этот подход имеет много общего с переходом от первичного квантования ко вторичному. А именно, дисперсионное соотношение свободной частицы $p^2 - m^2 = 0$ становится уравнением для полевого оператора $(-\partial^2 - m^2)\Phi(x) = 0$. При рассмотрении перехода к модели струнных битов классическая спектральная кривая спиновой цепочки играет роль дисперсионного соотношения, в то время как уравнение Бакстера отвечает некоторому полемому уравнению. Можно предположить, что решение $Q(x)$ уравнения Бакстера отвечает “волновой функции” отдельного бита. Если функция $Q(x)$ отдельного бита имеет полиномиальный вид, то корни многочлена удовлетворяют уравнениям анзаца Бете.

Сделаем несколько замечаний относительно рассматриваемых систем спиновых цепочек. Уравнение Бакстера в секторе $SL(2, \mathbb{R})$ имеет вид

$$\text{tr } T_F(\lambda)Q(\lambda) = \Delta_+(\lambda)Q(\lambda + i) + \Delta_-(\lambda)Q(\lambda - i), \quad (34)$$

где Δ_+ и Δ_- – соответствующие элементы T_{11} и T_{22} матрицы монодромии. Важно отметить, что спектр двухчастичного гамильтониана $H_1 = \sum H_{k,k+1}$, где $H_{k,k+1} = \psi(J_{k,k+1}) - \psi(2s)$, который задает спектр аномальных размерностей, может быть полностью выражен в терминах единственной функции Бакстера $Q(\lambda)$:

$$E(H_n) = i \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{Q(\lambda + i)}{Q(\lambda - i)} \Big|_{\lambda=0}. \quad (35)$$

Отметим, что еще одно важное представление двухчастичного гамильтониана задается интегральным оператором [29]:

$$\begin{aligned} H_{k,k+1} \Psi(x_k, x_{k+1}) = & \int_0^1 dz \frac{(1-z)^{2s-1}}{z} [\Psi((1-z)x_k + zx_{k+1}, x_{k+1}) + \\ & + \Psi(x_k, (1-z)x_{k+1} + zx_k) - \Psi(x_k, x_{k+1})]. \end{aligned} \quad (36)$$

Именно такой гамильтониан возникает при прямых вычислениях диаграмм Фейнмана. Напомним, что в секторе $SL(2, \mathbb{R})$ величины x_i представляют собой фракции светоподобного импульса P_+ .

Сделаем еще одно замечание. При общем подходе функция $Q(\lambda)$ может рассматриваться как собственная функция оператора Бакстера $\hat{Q}(\lambda)$, которая коммутирует с канонической трансфер-матрицей, а потому они имеют общий набор собственных функций. Интегральное представление для оператора Бакстера имеет вид

$$\hat{Q}(\lambda)\Psi(x) = \prod_{k=1}^n \Gamma(\lambda, s) \int dz_k z_k^{s-\lambda} (1-z)^{s+\lambda} \Psi(z_k x_k + (1-z_k)x_{k-1}), \quad (37)$$

где

$$\Gamma(\lambda, s) = \frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(s+\lambda)\Gamma(s-\lambda)}. \quad (38)$$

Роль оператора Бакстера в контексте представлений алгебры Вирасоро обсуждалась в работе [30].

Число струнных битов может быть вычислено в квазиклассическом пределе. Число возможных решений классических уравнений движения отвечает числу возможных решений интегрируемых моделей. Например, движение бозонной струны в фоновой метрике S_5 отвечает цепочке спинов $SO(6)$, в то время как движение в подпространстве AdS_3 многообразия с геометрией AdS_5 отвечает спиновым цепочкам $SL(2, \mathbb{R})$. Различные классы струнных движений отвечают с точки зрения калибровочной теории нелокальным операторам, которые оказываются производящими функциями для локальных операторов. Выбирая класс решений струнных уравнений движения (вид интегрируемой системы), мы фиксируем число степеней свободы интегрируемой системы. Это число соответствует числу струнных частей, уходящих на границу фонового многообразия. Например, чтобы получить операторы вида $D^{n_1}\Psi \dots D^{n_k}\Psi$ на конусе, отвечающем цепочке с k узлами, надо рассмотреть конфигурацию струны с k “раструбами” [5].

Как наблюдалось в работе [10], состояние Бете без нулей отвечает низшему состоянию струны, число нулей решения соответствует числу различных осцилляторных возбуждений, а число комплексных нулей с фиксированной вещественной частью соответствует числу возбужденных осцилляторных состояний фиксированного уровня. Число струнных битов соответствует числу степеней свободы спиновой цепочки $SL(2, \mathbb{R})$, т.е. числу полей, участвующих в операторе конформной теории. Поэтому мы получаем модель двух битов для простейших операторов твиста два, и решение уравнения Бакстера отвечает волновой функции отдельного бита. Следующий нетривиальный пример струны из трех битов приводит к спектральной кривой с нетривиальной топологией типа тора на классическом уровне и отвечает нетривиальным состояниям типа солитонов на квантовом уровне, что является следствием того, что в этой модели эффективно возникает “связанное состояние двух битов”. В общем случае спектральная кривая в секторе $SL(2, \mathbb{R})$ представляет собой гиперэллиптическую кривую, в то время как в секторе

$SO(6)$ эта кривая есть кратное накрытие кривой рода два. Квазиклассическое квантование, предложенное в работе [15], предполагает существование скрытой S -дуальности в спектре аномальных размерностей – свойство, которое еще предстоит исследовать.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе обсуждалось происхождение спиновых цепочек в контексте ренорм-групповых свойств операторов теории ЯМ. Было показано, что аномалия типа каспа, которая представляет собой производящую функцию для аномальных размерностей операторов высших спинов теории $SL(2, \mathbb{R})$, и ее подходящие обобщения на случай конечных спинов могут быть выведены из двухточечных корреляционных функций в теории свободного массивного скалярного поля на двумерной мировой поверхности. Было также показано, как в трехмерной гравитации возникают оператор Лакса и двухчастичный гамильтониан спиновой цепочки. Оказывается, что элементы фундаментальной R -матрицы при проекции на состояния фиксированного спина могут быть выражены в терминах корреляционных функций теории на мировой поверхности, и возможно, вся необходимая информация о полном операторе дилатаций содержится в универсальной R -матрице.

Применяя соотношение между стационарными решениями уравнений движения спиновых цепочек и дискретизованными системами Неймана, мы показали, что переход к конечной константе связи в калибровочной теории сопровождается дискретизацией мировой поверхности. Точный вид этой дискретизации следует из точного решения струнного уравнения движения в фоновом поле $AdS_5 \times S_5$. Условие периодичности для координаты мирового листа приводит к возникновению конечного числа струнных битов. Вообще говоря, число струнных битов зависит от квантовых чисел струны относительно операторов преобразований изометрий фоновой метрики и от величины константы связи. В пределе больших спинов прямые вычисления в однопетлевом приближении показывают соответствие между числом битов и числом узлов спиновой решетки.

Нами также было высказано предположение, что разделение переменных спиновой цепочки находит свое струнное отражение в модели струнных битов. В самом деле, число узлов спиновой цепочки оказывается равным числу струнных битов. Наиболее важным местом в наших рассуждениях было уравнение Бакстера, представляющее собой квантовую версию уравнения спектральной кривой, и его решение, которое задает спектр квантовой модели. Мы не сомневаемся, что весьма важной задачей является дальнейшее исследование того, какую роль в теории струн играет уравнение Бакстера, которое представляет собой существенный ингредиент в исследовании представлений алгебры Вирасоро и ее дискретизаций. Весьма желательно получить точную струнную картину условий квантования из работы [15], а также связь с формализмом угловых трансфер-матриц.

Благодарности. Автор благодарен А. Белишкому, А. Герасимову и Г. Корчемскому за полезное обсуждение. Работа была частично поддержана грантом INTAS № 00-334.

Список литературы

- [1] *A. M. Polyakov.* Phys. Lett. B. 1979. V. 72. P. 247; Nucl. Phys. B. 1980. V. 164. P. 171.
- [2] *J. M. Maldacena.* Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 231; *S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov.* Phys. Lett. B. 1998. V. 428. P. 105; *E. Witten.* Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 253.
- [3] *D. Berenstein, J. M. Maldacena, H. Nastase.* JHEP. 2002. V. 0204. P. 013; hep-th/0202021; *S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 636. P. 99; hep-th/0204051; *S. Frolov, A. A. Tseytlin.* JHEP. 2003. V. 0307. P. 016; hep-th/0306130; *N. Beisert, J. A. Minahan, M. Staudacher, K. Zarembo.* JHEP. 2003. V. 0309. P. 010; hep-th/0306139; *S. Frolov, A. A. Tseytlin.* Phys. Lett. B. 2003. V. 570. P. 96; hep-th/0306143.
- [4] *S. J. Rey, J. Yee.* Eur. Phys. J. C. 1998. V. 22. P. 379; *J. M. Maldacena.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 4859; *J. K. Erickson, G. W. Semenoff, K. Zarembo.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 582. P. 155; *N. Drukker, D. J. Gross, H. Ooguri.* Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 125006.
- [5] *A. V. Belitsky, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 667. P. 3; hep-th/0304028.
- [6] *M. Kruczenski.* JHEP. 2002. V. 0212. P. 024; *Yu. M. Makeenko.* JHEP. 2003. V. 0301. P. 007.
- [7] *G. P. Korchemsky, G. Marchesini.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 406. P. 225; hep-ph/9210281.
- [8] *N. Beisert, C. Kristjansen, M. Staudacher.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 664. P. 131; hep-th/0303060.
- [9] *V. M. Braun, S. E. Derkachov, A. N. Manashov.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 2020; *V. M. Braun, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 553. P. 355; *A. V. Belitsky.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 558. P. 259; hep-ph/9903512.
- [10] *J. A. Minahan, K. Zarembo.* JHEP. 2003. V. 0303. P. 013; hep-th/0212208.
- [11] *Л. Н. Лунатов.* Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. С. 571; *L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky.* Phys. Lett. B. 1995. V. 342. P. 311.
- [12] *N. Beisert.* Nucl. Phys. B. 2004. V. 676. P. 3; hep-th/0307015; *N. Beisert, M. Staudacher.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 670. P. 439; hep-th/0307042.
- [13] *G. Mandal, N. V. Suryanarayana, S. R. Wadia.* Phys. Lett. B. 2002. V. 543. P. 81; hep-th/0206103; *I. Bena, J. Polchinski, R. Roiban.* Phys. Rev. D. 2004. V. 69. P. 046002; hep-th/0305116; *L. Dolan, C. R. Nappi, E. Witten.* JHEP. 2003. V. 0310. P. 017; hep-th/0308089.
- [14] *A. Mikhailov.* Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 13. P. 3215.
- [15] *A. Gorsky, I. I. Kogan, G. P. Korchemsky.* JHEP. 2002. V. 0205. P. 053.
- [16] *C. B. Thorn.* Phys. Lett. B. 1977. V. 70. P. 85; *R. Brower, R. Giles, C. B. Thorn.* Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 484; *R. Giles, L. D. McLerran, C. B. Thorn.* Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 2058.
- [17] *E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 311. P. 46.
- [18] *A. Y. Alekseev.* Integrability in the Hamiltonian Chern–Simons theory. hep-th/9311074.
- [19] *E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 330. P. 285; 1989. V. 322. P. 629.
- [20] *А. И. Веселов.* Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 2. С. 1; *J. Moser, A. Veselov.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 139. P. 217.
- [21] *G. Arutyunov, S. Frolov, J. Russo, A. A. Tseytlin.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 671. P. 3; hep-th/0307191; *N. Beisert, S. Frolov, M. Staudacher, A. A. Tseytlin.* JHEP. 2003. V. 0310. P. 037; hep-th/0308117.
- [22] *S. Lukyanov.* Phys. Lett. B. 1994. V. 325. P. 409; hep-th/9311189; *V. Brazhnikov, S. Lukyanov.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 512. P. 616; hep-th/9707091.

- [23] *E. Witten*. Progr. Math. 1995. V. 133. P. 637; hep-th/9207094.
- [24] *L. Faddeev*. How algebraic Bethe ansatz works for integrable models. In: Quantum Symmetries/Symétries Quantiques. Proc. Les Houches Summer School (Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995). Eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin. Amsterdam: North-Holland, 1998; hep-th/9605187.
- [25] *L. Cantini, P. Menotti, D. Seminara*. Class. Quant. Grav. 2001. V. 18. P. 2253; hep-th/0011070.
- [26] *R. Boels, J. de Boer, R. Duivenvoorden, J. Wijnhout*. JHEP. 2004. V. 0403. P. 010; hep-th/0305189.
- [27] *H. Verlinde*. JHEP. 2003. V. 0312. P. 052; hep-th/0206059; *D. Vaman, H. Verlinde*. JHEP. 2003. V. 0311. P. 041; hep-th/0209215; *A. Dhar, G. Mandal, S. R. Wadia*. String bits in small radius AdS and weakly coupled $N = 4$ super Yang–Mills theory. I. hep-th/0304062.
- [28] *A. Gorsky, N. Nekrasov, V. Rubtsov*. Commun. Math. Phys. 2001. V. 222. P. 299; hep-th/9901089; *V. Fock, A. Gorsky, N. Nekrasov, V. Rubtsov*. JHEP. 2000. V. 0007. P. 028; hep-th/9906235.
- [29] *S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov*. Nucl. Phys. B. 2001. V. 617. P. 375; hep-th/0107193.
- [30] *V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov*. Commun. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 247; hep-th/9604044.