Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ал. Б. Замолодчиков, Трехточечная функция минимальной лиувиллевской гравитации, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 218–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:44:47

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ЛИУВИЛЛЕВСКОЙ ГРАВИТАЦИИ

Заново рассматривается задача о структурных константах операторных произведений в минимальных моделях конформной теории поля. Воспроизводятся известные ранее константы и дается их представление в виде, удобном, в частности, для применения в лиувиллевской гравитации. Обсуждается аналитическое соотношение между полученными выражениями и структурными константами в теории поля Лиувилля. Приводится также общий вид трех- и двухточечных корреляционных чисел на сфере в минимальной лиувиллевской гравитации.

Ключевые слова: конформная теория поля, лиувиллевская гравитация, минимальные модели.

1. ЛИУВИЛЛЕВСКАЯ ГРАВИТАЦИЯ

Под гравитацией обычно понимается динамическая теория метрической структуры на некотором многообразии. В размерности 2 в качестве последнего берется двумерная поверхность Σ (компактная или некомпактная) с некоторой топологией, снабженная римановой метрикой $g_{ab}(x)$. Чтобы избежать проблемы модулей, мы в данной работе будем всегда предполагать, что Σ – сфера. Будем рассматривать также евклидов вариант гравитации, т.е. предполагать, что g_{ab} невырождена и с положительной сигнатурой. В подходе, основанном на интеграле по траекториям, задача сводится к вычислению функционального интеграла по всем римановым метрикам $D[g]$, рассматриваемым по модулю эквивалентности при диффеоморфизмах. Например, гравитационная статистическая сумма сферы формально записывается как

$$Z = \int D[g] e^{-A_{\text{eff}}[g]}. \quad (1)$$

Здесь предполагается, что $A_{\text{eff}}[g]$ – эффективное действие, индуцированное неким общековариантным “материальным” полем теории на поверхности. Общая ковариантность обеспечивает инвариантность $A_{\text{eff}}[g]$ относительно диффеоморфизмов.

*Laboratoire de Physique Mathématique, Université Montpellier II, Montpellier, France; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: zamolod@lpm.univ-montp2.fr

В общем случае массивной материи $A_{\text{eff}}[g]$ является нелокальным и весьма сложным функционалом метрики. Задача (1) представляется очень сложной. Радикальное упрощение возникает, однако, если вся материя, индуцирующая $A_{\text{eff}}[g]$, является “критической”, т.е. описывается конформной теорией поля (КТП). Тогда форма $A_{\text{eff}}[g]$ является весьма универсальной и простой и называется действием Лиувилля. Этот факт был впервые обнаружен Поляковым в 1981 г. [1] путем прямых вычислений со свободными полями. В общей КТП это утверждение просто следует из формы конформной аномалии. Более того, концептуально этот вид эффективного действия можно принять (при некоторых дополнительных допущениях) за само определение КТП.

Из-за инвариантности $A_{\text{eff}}[g]$ относительно диффеоморфизмов возникает задача фиксации калибровки в (1). Одна из наиболее удобных возможностей состоит в выборе конформной калибровки, где координаты на Σ (локально) выбираются так, что

$$g_{ab}(x) = e^{2b\phi(x)}\delta_{ab} \quad (2)$$

(это всегда возможно в размерности 2). Входящий сюда масштабный множитель описывает квантовое поле $\phi(x)$, называемое полем Лиувилля (определение параметра b см. ниже). Можно также фиксировать калибровку ковариантным образом, выбирая произвольную метрику $g_{ab}^{(0)}(x)$ в качестве опорной и требуя, чтобы выполнялось соотношение

$$g_{ab}(x) = e^{2b\phi(x)}g_{ab}^{(0)}(x). \quad (3)$$

В последнем подходе поле Лиувилля ϕ является обычным скаляром при координатных преобразованиях. Калибровка (2) тогда означает специальный выбор системы координат и выбор $g_{ab}^{(0)}(x) = \delta_{ab}$ в этих координатах.

Как обычно, фиксация калибровки приводит к появлению детерминанта Фаддеева–Попова. В нашем случае его можно описать BC -системой спина $(2, -1)$:

$$A_{\text{gh}} = \frac{1}{\pi} \int (C\bar{\partial}B + \bar{C}\partial\bar{B}) d^2x. \quad (4)$$

Эта система также представляет собой КТП с центральным зарядом $c_{\text{gh}} = -26$, а потому детерминант, связанный с фиксацией калибровки, снова сводится к действию Лиувилля. Этот факт также был замечен в работе [1]. Гравитационная статистическая сумма принимает вид

$$Z_g = \int D[\phi] e^{-A_L[\phi]}, \quad (5)$$

где $A_L[\phi]$ – действие Лиувилля, индуцированное полями материи и гостов.

Возникает некоторая проблема с мерой интегрирования $D[\phi]$ по конфигурациям поля Лиувилля [1]. Полное определение интеграла по траекториям (5) требует ультрафиолетового обрезания, которое с физической точки зрения само должно зависеть от масштабного множителя $e^{2b\phi}$. Это означает, что мера интегрирования отличается от

обычной (линейной) меры интегрирования, в которой обрезание определяется относительно некоторой фиксированной метрики. Прямое вычисление интеграла (5) с этой нелинейной мерой оказывается весьма сложным и технически, и концептуально. Однако в работах [2] было предложено свести эффект этой сложной нелинейной меры к некоторой конечной перенормировке параметров. Это означает, что обыкновенную линейную меру (по отношению к фиксированной опорной метрике) можно согласованным образом использовать в (5), если параметры в $A_L[\phi]$ выбраны подходящим образом. Тогда перенормированные параметры можно определить из условий согласованности. У этого предположения нет действительно хорошего теоретического обоснования. Единственные серьезные аргументы в его пользу могут появиться из реальных вычислений в его рамках и сравнения результатов с другими известными фактами в двумерной квантовой гравитации. К последним относятся результаты дискретного, или матричного, подхода (см., например, обзоры [3] и приведенную там библиографию) и теоретико-полевые вычисления в другой калибровке (называемой калибровкой светового конуса, или калибровкой Полякова) [4].

После выполнения этой процедуры перенормированное действие Лиувилля принимает вид

$$A_L[\phi] = \int \left(\frac{1}{4\pi} (\partial_a \phi)^2 + \mu e^{2b\phi} \right) d^2x, \quad (6)$$

где μ — еще один параметр, называемый космологической постоянной. Действие (6) также описывает КТП с центральным зарядом

$$c_L = 1 + 6Q^2, \quad (7)$$

где “фоновый заряд” Q связан с параметром b как

$$Q = b + b^{-1}. \quad (8)$$

Упомянутое выше условие согласованности, предложенное Давидом, а также Дистлером и Каваи, фиксирует параметр b , исходя из условия, что полный центральный заряд объединенных КТП-материи, поля Лиувилля и гостов,

$$A_g = A_{\text{CFT}} + A_L + A_{\text{gh}} \quad (9)$$

обращается в нуль (что в действительности означает независимость физических наблюдаемых от выбора опорной метрики в (3)):

$$c_M + c_L = 26. \quad (10)$$

Здесь c_M — центральный заряд КТП-материи, а A_{CFT} обозначает ее формальное действие.

Действие (9) означает, что в критической гравитации три теории поля (конформной материи, поля Лиувилля ϕ и гостов) формально не взаимодействуют друг с другом, за

исключением взаимодействия через конформную аномалию. В корреляционных функциях всякое примарное поле материи Φ размерности Δ должно быть самосогласованным образом “одето” подходящей экспонентой поля Лиувилля $e^{2a\phi}$ так, чтобы образовывать составное поле размерности $(1, 1)$:

$$O = \Phi e^{2a\phi}. \quad (11)$$

В теории поля Лиувилля (6) экспонента $e^{2a\phi}$ имеет размерность

$$\Delta_a = a(Q - a), \quad (12)$$

так что параметр одевания a определяется из условия

$$\Delta + \Delta_a = 1. \quad (13)$$

Корреляционные функции одетых операторов распадаются (до интегрирования по модулям) в произведение корреляционных функций Лиувилля и материи:

$$\langle O_1(x_1) \dots O_n(x_n) \rangle_{\text{LG}} = \langle \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) \rangle_{\text{CFT}} \langle e^{2a_1\phi}(x_1) \dots e^{2a_n\phi}(x_n) \rangle_{\text{L}}, \quad (14)$$

где $\langle \dots \rangle_{\text{LG}}$, $\langle \dots \rangle_{\text{CFT}}$ и $\langle \dots \rangle_{\text{L}}$ — корреляционные функции в теории лиувиллевской гравитации, КТП-материи и теории Лиувилля, соответственно.

Хорошо известно, что на сфере из-за существования избыточных конформных векторных полей Киллинга конформная калибровка требует некоторой дополнительной фиксации. Чтобы получить ее, необходимо снабдить три произвольных поля в корреляционной функции (14) гостовскими множителями $C\bar{C}$, которые придадут произведению полную размерность $(0, 0)$. Остальные вставки имеют размерность $(1, 1)$ и могут быть проинтегрированы по своим координатам. Получающаяся таким образом корреляционная функция

$$\begin{aligned} \langle O_1 \dots O_n \rangle_{\text{G}} = & \int \langle C\bar{C}(x_1) \dots C\bar{C}(x_3) \rangle_{\text{gh}} \langle \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) \rangle_{\text{CFT}} \times \\ & \times \langle e^{2a_1\phi}(x_1) \dots e^{2a_n\phi}(x_n) \rangle_{\text{L}} d^2x_4 \dots d^2x_n \end{aligned} \quad (15)$$

более не зависит от координат (а потому и от выбора калибровки) и скорее заслуживает названия корреляционного числа. Мы будем использовать для этих чисел обозначение $\langle \dots \rangle_{\text{G}}$. Эти калибровочно-инвариантные корреляционные числа — один из наиболее интересных объектов в двумерной гравитации. Например, предположим, что рассматривается более сложная гравитация, где материя на поверхности не чисто критическая, а описывается некоторым возмущением КТП:

$$A_{\text{M}} = A_{\text{CFT}} + \lambda \int \Phi(x) d^2x. \quad (16)$$

Здесь Φ – релевантное примарное поле материи (размерности Δ), а λ – соответствующая константа взаимодействия. В гравитационном окружении поле Φ одевается полем $e^{2a\phi}$ (где a определено в (12) и (13)). Пертурбативное разложение по λ

$$Z(\lambda, \mu) = Z(0, \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} a_n, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_n &= \int \langle C\bar{C}(x_1) \dots CC(x_3) \rangle_{\text{gh}} \langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \rangle_{\text{CFT}} \times \\ &\quad \times \langle e^{2a\phi}(x_1) \dots e^{2a\phi}(x_n) \rangle_{\text{L}} d^2x_4 \dots d^2x_n, \quad n \geq 3, \end{aligned} \quad (18)$$

таким образом выражается через многоточечные корреляционные числа (15) (случаи $n = 1$ и $n = 2$ несколько более специальные и будут рассмотрены ниже).

В данной статье мы интересуемся специальным случаем двумерной индуцированной критической гравитации – минимальной гравитацией (МГ). Это название означает, что материя описывается только одной КТП-минимальной моделью $\mathcal{M}_{p,p'}$ [5], где (p, p') – пара взаимно простых целых чисел. Результаты дискретного подхода к двумерной гравитации [3] в большой степени указывают на то, что МГ является точно решаемой. Например, скейлинговые функции, подобные (17), а потому и корреляционные числа (15) могут быть найдены в рамках матричных моделей явно. Однако выявление потенциальных возможностей лиувиллевской гравитации путем воспроизведения точных результатов, полученных дискретными методами, все еще остается важнейшей нерешенной задачей.

Настоящая работа посвящена простейшим корреляционным числам в МГ – трехточечным. В этом случае в уравнении (15) не надо проводить интегрирования, и наша задача состоит просто в умножении трехточечной функции Лиувилля на трехточечную функцию в теории $\mathcal{M}_{p,p'}$. Эта несложная работа выполнена в следующих разделах, где также приводятся замечания об аналитическом соотношении между минимальными моделями и теорией поля Лиувилля.

2. ТРЕХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Трехточечная функция экспоненциального поля $e^{2a\phi}$

$$\begin{aligned} \langle e^{2a_1\phi}(x_1) e^{2a_2\phi}(x_2) e^{2a_3\phi}(x_3) \rangle_{\text{L}} &= \\ &= \frac{C_{\text{L}}(a_1, a_2, a_3)}{(x_{12}\bar{x}_{12})^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} (x_{23}\bar{x}_{23})^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} (x_{31}\bar{x}_{31})^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}} \end{aligned} \quad (19)$$

в теории поля Лиувилля была открыта Дорном и Отто [6] в 1992 г. Координатная зависимость (19) включает размерность $\Delta_i = \Delta_{a_i}$ экспоненциального поля, заданную равенством (12). Эта зависимость является стандартной, и поэтому мы опустим данный

множитель и будем называть трехточечной функцией $C_L(a_1, a_2, a_3)$. В обозначениях из работы [7] она имеет явный вид

$$C_L(a_1, a_2, a_3) = (\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{(Q-a_1-a_2-a_3)/b} \times \\ \times \frac{\Upsilon(b)\Upsilon(2a_1)\Upsilon(2a_2)\Upsilon(2a_3)}{\Upsilon(a_1+a_2+a_3-Q)\Upsilon(a_1+a_2-a_3)\Upsilon(a_2+a_3-a_1)\Upsilon(a_3+a_1-a_2)}. \quad (20)$$

Здесь $\Upsilon(x) = \Upsilon_b(x)$ – специальная функция, связанная с двойной гамма-функцией Барнса [8] (точные определения и свойства см. в [7]). Здесь следует заметить, что (20) – ненормализованная корреляционная функция. Для использования в разложениях вида (17) ее следует разделить на статистическую сумму Лиувилля для сферы. Ниже мы приводим замечания по этому поводу.

Позднее, в 1995 г., выражение (20) было воспроизведено Тешнером [9] более систематическим способом с помощью техники конформного бутстрапа. Оказывается, что самосогласованность (бутстрапа) приводит к требованию, чтобы $C_L(a_1, a_2, a_3)$ удовлетворяли функциональным соотношениям

$$\frac{C_L(a_1+b, a_2, a_3)}{C_L(a_1, a_2, a_3)} = -\frac{\gamma(-b^2)}{\pi\mu} \times \\ \times \frac{\gamma(2a_1b+b^2)\gamma(2a_1b)\gamma(b(a_2+a_3-a_1)-b^2)}{\gamma(b(a_1+a_2+a_3)-1-b^2)\gamma(b(a_1+a_2-a_3))\gamma(b(a_1+a_3-a_2))}, \quad (21) \\ \frac{C_L(a_1+b^{-1}, a_2, a_3)}{C_L(a_1, a_2, a_3)} = -\frac{\gamma(-b^{-2})}{\pi\tilde{\mu}} \times \\ \times \frac{\gamma(2a_1b^{-1}+b^{-2})\gamma(2a_1b^{-1})\gamma(b^{-1}(a_2+a_3-a_1)-b^{-2})}{\gamma(b^{-1}(a_1+a_2+a_3)-1-b^{-2})\gamma(b^{-1}(a_1+a_2-a_3))\gamma(b^{-1}(a_1+a_3-a_2))}.$$

Здесь $\tilde{\mu}$ – “дуальная космологическая постоянная”, связанная с μ соотношением (см. [7])

$$(\tilde{\mu}\gamma(b^{-2}))^b = (\mu\gamma(b^2))^{1/b}. \quad (22)$$

В общем случае b и b^{-1} несоизмеримы и функция (20) является единственным решением этой системы.

Выражение (20) предполагает специальную нормировку лиувиллевских экспоненциальных полей. Она фиксируется двухточечной функцией

$$\langle e^{2a\phi}(x)e^{2a\phi}(0) \rangle_L = \frac{D_L(a)}{(x\bar{x})^{2\Delta_a}}, \quad (23)$$

где

$$D_L(a) = \frac{(\pi\mu\gamma(b^2))^{(Q-2a)/b}}{b^2} \frac{\gamma(2ab-b^2)}{\gamma(2-2ab^{-1}+b^{-2})}. \quad (24)$$

Это снова ненормированное выражение. Как использовать его в двухточечном корреляционном числе, также обсуждается ниже.

3. ОБОБЩЕННЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Минимальная модель КТП $\mathcal{M}_{p,p'}$ характеризуется центральным зарядом

$$c_M = 1 - 6(\beta^{-1} - \beta)^2, \quad (25)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{p}{p'}}. \quad (26)$$

Ниже мы будем считать, что $p < p'$, а потому $\beta < 1$; удобно также ввести параметр

$$q = \beta^{-1} - \beta. \quad (27)$$

Таким образом [5],

$$c_{p/p'} = 1 - 6q^2 = 1 - \frac{6(p - p')^2}{pp'}. \quad (28)$$

Главная (унитарная) серия соответствует $p' = p + 1$.

В минимальных моделях предполагается, что параметр β^2 – рациональное число. Однако в данной работе мы будем стремиться к максимально возможной аналитичности. Поэтому попытаемся рассматривать β как непрерывный вещественный (и позднее даже комплексный) параметр до тех пор, пока это не будет приводить к явным проблемам. Соответствующее непрерывное семейство (формальных) моделей КТП называется обобщенной минимальной моделью (ОММ) и обозначается как $\mathcal{M}_\beta$.

Состав примарных операторов в минимальной модели дается множеством вырожденных полей $\Phi_{m,n}$, где (m, n) – пара целых чисел. Их размерности выражаются формулой Каца [10]

$$\Delta_{m,n} = \frac{(m\beta^{-1} - n\beta)^2 - (\beta^{-1} - \beta)^2}{4} = \alpha_{m,n}(\alpha_{m,n} - q). \quad (29)$$

В такой параметризации имеются две возможности выбрать $\alpha_{m,n}$, различающиеся заменой $\alpha_{m,n} \leftrightarrow q - \alpha_{m,n}$. Для определенности выберем

$$\alpha_{m,n} = \frac{(n-1)\beta}{2} - \frac{(m-1)\beta^{-1}}{2}. \quad (30)$$

Все представления алгебры Вирасоро с центральным зарядом (25) и размерностью (29) вырождены и имеют нуль-вектор на уровне mn . В минимальных моделях требуется обращение в нуль этих нуль-векторов. Это одно из основных требований в конструкции минимальных моделей [5]. Их следствием являются некие линейные дифференциальные уравнения для вырожденных примарных полей. Например, простейшие нетривиальные поля $\Phi_{1,2}$ и $\Phi_{2,1}$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} (\partial^2 - \beta^2 T)\Phi_{1,2} &= 0, \\ (\partial^2 \Phi_{2,1} - \beta^{-2} T)\Phi_{2,1} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

и аналогичным “левым” уравнениям, в которых ∂ заменено на $\bar{\partial}$ и правая компонента тензора натяжений $T = T_{zz}$ заменена левой $\bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}$ (см. более подробный анализ в работе [5]). Эти дифференциальные уравнения ограничивают возможный вид операторного произведения вырожденных полей $\Phi_{m,n}$ до очень специального [5]:

$$\Phi_{m_1, n_1} \Phi_{m_2, n_2} = \sum_{(m_3, n_3)} C_{(m_1, n_1)(m_2, n_2)}^{(m_3, n_3)} [\Phi_{m_3, n_3}] \quad (32)$$

(мы опускаем здесь стандартные зависящие от x множители и обозначаем через $[\Phi_{m,n}]$ вклад примарного поля $\Phi_{m,n}$ и всех его конформных потомков).

Разумеется, структурные константы $C_{(m_1, n_1)(m_2, n_2)}^{(m_3, n_3)}$ зависят от нормировки полей $\Phi_{m,n}$. В данной работе мы примем стандартную нормировку КТП через двухточечные функции:

$$\langle \Phi_{m,n}(x) \Phi_{m,n}(0) \rangle_{\text{CFT}} = \frac{1}{(x\bar{x})^{2\Delta_{m,n}}}. \quad (33)$$

В этой нормировке структурные константы совпадают с трехточечными функциями:

$$C_{(m_1, n_1)(m_2, n_2)}^{(m_3, n_3)} = C_{(m_1, n_1)(m_2, n_2)(m_3, n_3)} = \langle \Phi_{m_1, n_1} \Phi_{m_2, n_2} \Phi_{m_3, n_3} \rangle_{\text{CFT}} \quad (34)$$

(мы снова опускаем стандартные зависящие от x множители).

Структурные константы в ОММ подчинены дальнейшим ограничениям, происходящим из правил слияния (fusion rules), которые также следуют из обращения нуль-векторов в нуль. Правила слияния по отдельности ограничивают возможные тройки индексов (m_1, m_2, m_3) и (n_1, n_2, n_3) в структурных константах. В действительности они эквивалентны алгебре слияния регулярных представлений алгебры $SL(2)$. Таким образом, структурные константы ОММ пропорциональны структурным константам алгебры слияния:

$$C_{(m_1, n_1)(m_2, n_2)(m_3, n_3)} \sim f_{m_1, m_2, m_3} f_{n_1, n_2, n_3}, \quad (35)$$

где

$$f_{m_1, m_2, m_3} = \begin{cases} 1, & \text{если} \begin{cases} m_1 + m_2 - m_3 \geq 0, \\ m_2 + m_3 - m_1 \geq 0, \\ m_3 + m_1 - m_2 \geq 0, \end{cases} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (36)$$

Структурные константы ОММ $C_{(m_1, n_1)(m_2, n_2)(m_3, n_3)}$ были явно вычислены в виде некоторых произведений гамма-функций в работе Доенко и Фатеева [11]. В следующем разделе мы попытаемся получить их результат несколько иным способом, в большей степени отвечающим нашему намерению искать аналитичность. Для этого введем вместо дискретного набора вырожденных операторов $\Phi_{m,n}$ формальное семейство полей Φ_α , параметризованное непрерывным параметром α . Они имеют размерности

$$\Delta_\alpha = \alpha(\alpha - q). \quad (37)$$

Далее используем технику бутстрапа для определения формальной трехточечной функции (снова с опущенной координатной зависимостью)

$$C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \langle \Phi_{\alpha_1} \Phi_{\alpha_2} \Phi_{\alpha_3} \rangle_M \quad (38)$$

как непрерывной функции трех ее параметров, причем такой, чтобы при выборе специальных значений (30) $\alpha_i = \alpha_{m_i, n_i}$ воспроизводились бы известные выражения Доценко–Фатеева.

Прежде чем обратиться к этой задаче, уместно сделать три замечания.

1. В настоящей минимальной модели $\mathcal{M}_{p, p'}$ имеется конечное подмножество вырожденных примарных полей $\Phi_{m, n}$, для которых $1 \leq m \leq p-1$ и $1 \leq n \leq p'-1$, замкнутое по отношению к операторному произведению (поля $\Phi_{m, n}$ и $\Phi_{p-m, p'-n}$ отождествляются, вследствие чего конечное подмножество насчитывает всего $(p-1)(p'-1)/2$ полей) [5]. Поэтому в настоящих минимальных моделях возможна самосогласованная редукция операторного состава модели $\mathcal{M}_\beta$ к этому конечному подмножеству примарных полей, что дает рациональную КТП. В ОММ при иррациональных β^2 такая редукция невозможна, и мы вынуждены рассматривать весь набор $\Phi_{m, n}$ с произвольными положительными целыми (m, n) . Остается неясным, согласована ли такая бесконечная алгебра с общими требованиями квантовой теории поля. В частности, конструкция модулярно-инвариантной статистической суммы в ОММ, очевидно, встречается с серьезными сложностями. В настоящей работе мы предпочитаем занимать формальную позицию и забываем на время об этих важных вопросах.

2. Как будет видно в дальнейшем, непрерывная функция $C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (которая также будет построена ниже) при вырожденных значениях $\alpha_i = \alpha_{m_i, n_i}$ не всегда обращается в нуль автоматически, если правила слияния (36) нарушаются. Иногда она дает некие конечные числа, интерпретация которых остается пока загадочной. Поэтому для получения правильного набора структурных констант в ОММ следует учитывать правила слияния по отдельности. Соотношение между $C_{(m_1, n_1)(m_2, n_2)(m_3, n_3)}$ и $C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ тогда принимает вид

$$C_{(m_1, n_1)(m_2, n_2)(m_3, n_3)} = f_{m_1, m_2, m_3} f_{n_1, n_2, n_3} C_M(\alpha_{m_1, n_1}, \alpha_{m_2, n_2}, \alpha_{m_3, n_3}). \quad (39)$$

Очевидно, это “улучшение” теории не вполне согласуется с нашим стремлением к максимальной аналитичности. Однако на данный момент нам не известно, как можно обойтись без подобного наложения правил слияния “вручную”.

3. Легко видеть, что выражения для центральных зарядов (7) и (25), как и для размерностей примарных полей (12) и (37), в теории поля Лиувилля и в ОММ просто связаны посредством аналитического продолжения параметров:

$$b = -i\beta, \quad a = i\alpha, \quad Q = iq. \quad (40)$$

Вместе с более аналитическими соотношениями, которые нам предстоит увидеть ниже, это может навести на мысль, что ОММ является просто аналитическим продолжением теории поля Лиувилля на чисто мнимые значения параметра b (или наоборот). Мы вскоре увидим, что эта гипотеза несовместима с нашим непрерывным подходом. В частности, $C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ не является аналитическим продолжением $C_L(a_1, a_2, a_3)$.

4. КОНФОРМНЫЙ БУТСТРАП В ОММ

Даже для формальных непрерывных полей Φ_α условие отщепления нуль-векторов радикальным образом влияет на вид операторного разложения. В частности, из уравнений (31) следует, что

$$\begin{aligned}\Phi_{1,2}\Phi_\alpha &= C_+^{(M)}(\alpha)[\Phi_{\alpha+\beta/2}] + C_-^{(M)}(\alpha)[\Phi_{\alpha-\beta/2}], \\ \Phi_{2,1}\Phi_\alpha &= \tilde{C}_+^{(M)}(\alpha)[\Phi_{\alpha-\beta^{-1}/2}] + \tilde{C}_-^{(M)}(\alpha)[\Phi_{\alpha+\beta/2}],\end{aligned}\quad (41)$$

где $C_\pm^{(M)}(\alpha) = C_M(\alpha_{1,2}, \alpha, \alpha \pm \beta/2)$ и $\tilde{C}_\pm^{(M)}(\alpha) = C_M(\alpha_{2,1}, \alpha, \alpha \mp \beta/2)$ – специальные структурные константы, связанные с непрерывной функцией $C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ посредством подходящей специализации.

Далее мы следуем стандартному подходу конечномерного бутстрапа, развитому в статье [5] и многих последующих работах. Вычисления, которые почти буквально следуют связанной с теорией Лиувилля работе Тешнера [9], приводят к двум функциональным соотношениям на $C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\begin{aligned}\frac{C_+^{(M)}(\alpha_1)C_M(\alpha_1 + \beta/2, \alpha_2, \alpha_3)}{C_-^{(M)}(\alpha_1)C_M(\alpha_1 - \beta/2, \alpha_2, \alpha_3)} &= \\ &= -\frac{(1 - \beta^2 - 2\alpha_1\beta)^2\gamma(\beta^2/2 + (\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)\beta)}{\gamma^2(\beta^2 + 2\alpha_1\beta)\gamma(\beta^2/2 + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\beta)} \times \\ &\times \frac{\gamma(\beta^2/2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\beta)}{\gamma(2 - 3\beta^2/2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\beta)},\end{aligned}\quad (42)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{C}_+^{(M)}(\alpha_1)C_M(\alpha_1 - \beta^{-1}/2, \alpha_2, \alpha_3)}{\tilde{C}_-^{(M)}(\alpha_1)C_M(\alpha_1 + \beta^{-1}/2, \alpha_2, \alpha_3)} &= \\ &= -\frac{(1 - \beta^{-2} + 2\alpha_1\beta^{-1})^2\gamma(\beta^{-2}/2 - (\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)\beta^{-1})}{\gamma^2(\beta^{-2} - 2\alpha_1\beta^{-1})\gamma(\beta^{-2}/2 - (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\beta^{-1})} \times \\ &\times \frac{\gamma(\beta^{-2}/2 - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\beta^{-1})}{\gamma(2 - 3\beta^{-2}/2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\beta^{-1})}.\end{aligned}\quad (43)$$

Прежде всего используем эти уравнения для того, чтобы воспроизвести явные выражения для специальных структурных констант $C_\pm^{(M)}(\alpha)$ и $\tilde{C}_\pm^{(M)}(\alpha)$. Возьмем $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha$ и $\alpha_2 = \beta/2$. Тогда с использованием соотношения (42) имеем

$$\left(\frac{C_+^{(M)}(\alpha)}{C_-^{(M)}(\alpha)}\right)^2 = \frac{\gamma(2\alpha\beta)\gamma(2 - \beta^2 - 2\alpha\beta)}{\gamma(2 - 2\beta^2 - 2\alpha\beta)\gamma(\beta^2 + 2\alpha\beta)}.\quad (44)$$

Аналогично соотношение (43) дает

$$\left(\frac{\tilde{C}_+^{(M)}(\alpha)}{\tilde{C}_-^{(M)}(\alpha)}\right)^2 = \frac{\gamma(-2\alpha\beta^{-1})\gamma(2 - \beta^{-2} + 2\alpha\beta^{-1})}{\gamma(2 - 2\beta^{-2} + 2\alpha\beta^{-1})\gamma(\beta^2 - 2\alpha\beta^{-1})}.\quad (45)$$

Подставляя (44) в (42), приходим к замкнутому функциональному соотношению для $C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\frac{C_M(\alpha_1 + \beta, \alpha_2, \alpha_3)}{C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \frac{\gamma(\beta^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\beta)\gamma(\beta^2 + (\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)\beta)}{\gamma((\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\beta)\gamma(2 - 2\beta^2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\beta)} \times \\ \times (\gamma(\beta^2 + 2\alpha_1\beta)\gamma(2\beta^2 + 2\alpha_1\beta)\gamma(-1 + 2\beta^2 + 2\alpha_1\beta)\gamma(-1 + 3\beta^2 + 2\alpha_1\beta))^{-1/2}. \quad (46)$$

Второе функциональное соотношение, которое составляется из (43) и (45), отличается от первого простой подстановкой $\beta \rightarrow -\beta^{-1}$:

$$\frac{C_M(\alpha_1 - \beta^{-1}, \alpha_2, \alpha_3)}{C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \\ = \frac{\gamma(\beta^{-2} - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\beta^{-1})\gamma(\beta^{-2} - (\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)\beta^{-1})}{\gamma(-(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\beta^{-1})\gamma(2 - 2\beta^{-2} + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\beta^{-1})} \times \\ \times (\gamma(\beta^{-2} - 2\alpha_1\beta^{-1})\gamma(2\beta^{-2} - 2\alpha_1\beta^{-1}) \times \\ \times \gamma(2\beta^{-2} - 2\alpha_1\beta^{-1} - 1)\gamma(3\beta^{-2} - 2\alpha_1\beta^{-1} - 1))^{-1/2}. \quad (47)$$

Поскольку все приведенные бутстрапные вычисления являются явно аналитическими по β и α , не удивительно, что эти функциональные соотношения (с точностью до множителей, зависящих только от параметра α_1 , но не от комбинаций различных α , а потому чувствительных к нормировке операторов) дают в точности аналитическое продолжение подобных же функциональных соотношений (21) в теории поля Лиувилля, когда

$$b \rightarrow -i\beta, \quad b^{-1} \rightarrow i\beta, \quad a \rightarrow i\alpha. \quad (48)$$

Однако по причинам, которые объясняются ниже, попытка построить вещественное решение β с помощью такого продолжения терпит крах, и решение, представленное в следующем разделе, не является аналитическим продолжением лиувилевской трехточечной функции (20).

5. ТРЕХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ ОММ

Для вещественных и несоизмеримых β и β^{-1} решение системы (46), (47) единственно. Его можно выразить в терминах той же самой специальной функции $\Upsilon(x) = \Upsilon_\beta(x)$, что и в уравнении (20), но на этот раз с параметром β вместо b :

$$C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{A\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \beta)\Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 + \beta)}{[\Upsilon(2\alpha_1 + \beta)\Upsilon(2\alpha_1 + 2\beta - \beta^{-1})\Upsilon(2\alpha_2 + \beta)]} \times \\ \times \frac{\Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \beta)\Upsilon(2\beta - \beta^{-1} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{[\Upsilon(2\alpha_2 + 2\beta - \beta^{-1})\Upsilon(2\alpha_3 + \beta)\Upsilon(2\alpha_3 + 2\beta - \beta^{-1})]^{1/2}}, \quad (49)$$

где нормировочный множитель

$$A = \frac{\beta^{\beta^{-2} - \beta^2 - 1}[\gamma(\beta^2)\gamma(\beta^{-2} - 1)]^{1/2}}{\Upsilon(\beta)} \quad (50)$$

определяется из условия нормировки $C_M(0, \alpha, \alpha) = 1$ (мы настаиваем на интерпретации Φ_0 как единичного оператора в ОММ).

В частности, усеченные операторные разложения (41) имеют явный вид

$$\begin{aligned}\Phi_{1,2}\Phi_\alpha &= \left[\frac{\gamma(\beta^2)\gamma(2\alpha\beta + 2\beta^2 - 1)}{\gamma(2\beta^2 - 1)\gamma(\beta^2 + 2\alpha\beta)} \right]^{1/2} [\Phi_{\alpha+\beta/2}] + \\ &+ \left[\frac{\gamma(\beta^2)\gamma(2\alpha\beta + \beta^2 - 1)}{\gamma(2\beta^2 - 1)\gamma(2\alpha\beta)} \right]^{1/2} [\Phi_{\alpha-\beta/2}], \\ \Phi_{2,1}\Phi_\alpha &= \left[\frac{\gamma(\beta^{-2})\gamma(2\beta^{-2} - 2\alpha\beta^{-1} - 1)}{\gamma(2\beta^{-2} - 1)\gamma(\beta^{-2} - 2\alpha\beta^{-1})} \right]^{1/2} [\Phi_{\alpha-\beta^{-1}/2}] + \\ &+ \left[\frac{\gamma(\beta^{-2})\gamma(\beta^{-2} - 2\alpha\beta^{-1} - 1)}{\gamma(2\beta^{-2} - 1)\gamma(-2\alpha\beta^{-1})} \right]^{1/2} [\Phi_{\alpha+\beta/2}].\end{aligned}\tag{51}$$

Мы проверили на многих частных примерах, что, коль скоро выражение (49) взято при допустимых вырожденных значениях $\alpha_i = \alpha_{m_i, n_i}$, оно редуцируется в точности к произведению гамма-функций, как у Доенко и Фатеева. Важно, что набор из трех α_{m_i, n_i} в структурной константе удовлетворяет правилам слияния (35). Иначе выражение (49) не всегда обеспечивает обращение структурной константы в нуль. Часто оно дает некоторые конечные числа, смысл и возможная интерпретация которых остаются для нас загадкой.

Было бы очень важно в общем случае доказать, что для допустимых вырожденных α_i выражение (49) и формулы Доенко–Фатеева совпадают.

Рис. 1

Решение (49) не есть аналитическое продолжение лиувиллевской трехточечной функции (20). Дело в том, что функция $\Upsilon_b(x)$ как функция параметра b аналитична на всей комплексной плоскости b^2 , за исключением отрицательной части вещественной оси, где она встречается естественную границу аналитичности (см. рис. 1). В следующем разделе мы несколько подробнее остановимся на вопросе аналитического соотношения между решениями (20) и (49).

6. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО b^2

Как отмечалось в предыдущем разделе, $C_L(a_1, a_2, a_3|b)$ не может быть аналитически продолжена на чисто мнимые значения параметра b . По той же самой причине $C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|\beta)$ не допускает аналитического продолжения на чисто мнимые значения β . В то же время $C_L(a_1, a_2, a_3|b)$ и $C_M(-ia_1, -ia_2, -ia_3|ib)$ удовлетворяют одному и тому же набору соотношений функционального сдвига (с точностью до некоторых зависящих от нормировки множителей), что позволяет единственным образом восстановить $C_M(-ia_1, -ia_2, -ia_3|ib)$ или $C_L(a_1, a_2, a_3|b)$ в любом положительном иррациональном или отрицательном иррациональном значении b^2 , соответственно. Для прояснения аналитического соотношения между этими двумя функциями сравним их в тех комплексных значениях b^2 , где они обе являются корректно определенными. При комплексных значениях b соотношения сдвига определяют решение только с точностью до эллиптической функции с периодами b и b^{-1} . Возьмем функцию $C_L(a_1, a_2, a_3|b)$ при некотором комплексном значении b^2 в нижней полуплоскости, как показано на рис. 2, таким образом, чтобы ее можно было без опаски аналитически продолжить в точку $\beta = ib$ и сравнить с $C_M(-ia_1, -ia_2, -ia_3|ib)$.

Рис. 2

Рассмотрим отношение

$$R(a_1, a_2, a_3|b) = \frac{C_M(-ia_1, -ia_2, -ia_3|ib)}{C_L(a_1, a_2, a_3|b)}. \quad (52)$$

В нем Υ -функции из трехточечных функций ОММ и Лиувилля комбинируются в θ -функции в силу следующего тождества (которое можно доказать непосредственно, что будет сделано в другом месте):

$$\Upsilon_b(x)\Upsilon_{ib}(-ix+ib) = e^{i\pi(b-b^{-1}-2x)^2/8} \frac{\theta_1(\pi x b^{-1}|h)}{h^{1/4}\theta_3(0|h)}, \quad (53)$$

где $\theta_1(x|h)$ и $\theta_3(x|h)$ – обычные эллиптические θ -функции и $h = e^{i\pi b^{-2}}$. Подразумевается, что b^2 в уравнении (53) имеет отрицательную мнимую часть, так что Υ_b можно без опаски продолжить до Υ_{ib} , обходя отрицательную часть вещественной оси b^2 , как показано на рис. 2. Результат имеет вид

$$R(a_1, a_2, a_3) = \frac{(\pi\mu\gamma(b^2))^{(a_1+a_2+a_3-Q)/b} [\gamma(-b^2-1)\gamma(-b^{-2})]^{1/2}}{b \prod_{i=1}^3 [\gamma(2a_i b - b^2 - 1)\gamma(2a_i b^{-1} - b^{-2})]^{1/2}} T(a_1, a_2, a_3), \quad (54)$$

где

$$T(a_1, a_2, a_3) = \frac{\theta_1(\pi b^{-1}(a_1 + a_2 - a_3))\theta_1(\pi b^{-1}(a_2 + a_3 - a_1))}{\pi\theta_1'(0)\theta_1(2\pi b^{-1}a_1)\theta_1(2\pi b^{-1}a_2)\theta_1(2\pi b^{-1}a_3)} \times \\ \times \theta_1(\pi b^{-1}(a_3 + a_1 - a_2))\theta_1(\pi b^{-1}(a_1 + a_2 + a_3)) \quad (55)$$

(причем все θ -функции имеют один и тот же модуль h) является, как легко проверить, эллиптической функцией по всем трем a_i с периодами b и b^{-1} . Таким образом, для комплексных b^2 два решения $C_L(a_1, a_2, a_3|b)$ или $C_M(-ia_1, -ia_2, -ia_3|ib)$ по сути одних и тех же функциональных соотношений различаются, как и следует, на дважды периодическую функцию (с точностью до “концевого” множителя в (54), который в действительности появляется из-за различных нормировок примарных полей в ОММ и теории поля Лиувилля).

7. МИНИМАЛЬНАЯ ГРАВИТАЦИЯ

Обратимся теперь к МГ, индуцированной ОММ $\mathcal{M}_\beta$ с полным центральным зарядом материи (25). Как широко известно, баланс центрального заряда (10) требует, чтобы параметр Лиувилля b был равен ОММ-параметру β (разумеется, есть и другое решение $b = \beta^{-1}$; мы выбираем первое с тем, чтобы сохранить условие $b < 1$). Поэтому начиная с этого момента мы используем единое обозначение b для этого параметра как в теории Лиувилля, так и в ОММ, подставляя

$$\beta = b \quad (56)$$

во все выражения, относящиеся к ОММ. Более того, “параметр одевания” a в уравнении (11) в МГ просто связан с параметром α примарного поля материи:

$$a = \alpha + b. \quad (57)$$

Снова имеется вторая возможность – $a = b^{-1} - \alpha$, но такой выбор не дает ничего нового, поскольку аналитические выражения для корреляционных функций локальной теории поля позволяют отождествить эти два возможных одевания с точностью до нормировки [7]

$$e^{2a\phi} = D_L(a)e^{2(Q-a)\phi}, \quad (58)$$

где $D_L(a)$ взято из уравнения (24). Мы обозначим соответствующий (формальный при общих α) одетый оператор как

$$U_a = \Phi_{a-b} e^{2a\phi}. \quad (59)$$

Трехточечная функция в МГ имеет простой вид:

$$C^{(\text{MG})}(a_1, a_2, a_3) = \langle C\bar{C}(x_1) \dots CC(x_3) \rangle_{\text{gh}} \langle U_{a_1}(x_1) U_{a_2}(x_2) U_{a_3}(x_3) \rangle_{\text{MG}}. \quad (60)$$

Координатная зависимость в правой части сокращается и, как и ожидалось, мы получаем трехточечное корреляционное число в МГ:

$$C^{(\text{MG})}(a_1, a_2, a_3) = C_M(a_1 - b, a_2 - b, a_3 - b|b) C_L(a_1, a_2, a_3|b). \quad (61)$$

В этом произведении все Υ -функции, зависящие от комбинаций параметров a_i , сокращаются и остается (с точностью до общего множителя) произведение множителей, зависящих от каждого отдельного параметра a_i (иногда называемых “концевыми” множителями):

$$C^{(\text{MG})}(a_1, a_2, a_3) = (\pi\mu\gamma(b^2))^{(Q - \sum_{i=1}^3 a_i)/b} \left[\frac{\gamma(b^2)\gamma(b^{-2} - 1)}{b^2} \right]^{1/2} \prod_{i=1}^3 F_{\text{MG}}(a_i), \quad (62)$$

где выбрана следующая нормировка концевых множителей:

$$F_{\text{MG}}(a) = [\gamma(2ab - b^2)\gamma(2ab^{-1} - b^{-2})]^{1/2}. \quad (63)$$

Эта факторизованная форма трехточечной функции в МГ была ранее (уже давно) установлена в подходе матричных моделей [12], равно как и в рамках несколько иного подхода к теории поля Лиувилля [13].

Разумеется, с технической стороны гораздо легче не решать функциональные соотношения (21) и (46), (47) по отдельности для каждой из корреляционных функций Лиувилля и ОММ, а скомбинировать их в функциональные соотношения для произведения. Таким путем полностью исключается всякая потребность в сложных специальных функциях Υ . Комбинируя (21) и (46), (47) и учитывая соотношение (57), находим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{C_{\text{MG}}(a_1 + b, a_2, a_3)}{C_{\text{MG}}(a_1, a_2, a_3)} &= \frac{(2a_1b^{-1} - b^{-2})(2a_1b^{-1} + 1 - b^{-2})}{\pi\mu\gamma(b^2)} \left(\frac{\gamma(2a_1b + b^2)}{\gamma(2a_1b - b^2)} \right)^{1/2}, \\ \frac{C_{\text{MG}}(a_1 + b^{-1}, a_2, a_3)}{C_{\text{MG}}(a_1, a_2, a_3)} &= \frac{(2a_1b - b^2 + 1)(2a_1b - b^2)}{\pi\tilde{\mu}\gamma(b^{-2})} \left(\frac{\gamma(2a_1b^{-1} + b^{-2})}{\gamma(2a_1b^{-1} - b^{-2})} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (64)$$

Этого достаточно для восстановления факторизованной формы (62) с точностью до не зависящей от α общей нормировки. В данной работе мы выбрали более сложную схему

отдельного вычисления ОММ-структурной функции, с тем чтобы получить больше сведений об отдельных вкладах лиувиллевских и ОММ-степеней свободы в результат (62) для МГ.

Наконец, нам нужно получить аналитическое выражение при вырожденных значениях параметров поля материи. На этом шаге следует добавить множитель $f_{m_1, m_2, m_2} \times f_{n_1, n_2, n_2}$ для обеспечения правил слияния в случае вырожденных ОММ-полей. Получаем следующее выражение для трехточечных корреляционных чисел МГ:

$$C_{(m_1, n_1)(m_2, n_2)(m_3, n_3)}^{(\text{MG})} = f_{m_1, m_2, m_2} f_{n_1, n_2, n_2} (\pi \mu \gamma(b^2))^{(Q - \sum_{i=1}^3 a_{m_i, n_i})/b} \times \left[\frac{\gamma(b^2) \gamma(b^{-2} - 1)}{b^2} \right]^{1/2} \prod_{i=1}^3 F_{\text{MG}}(a_{m_i, n_i}). \quad (65)$$

Как отмечалось выше, лиувиллевская трехточечная функция не нормирована. Чтобы получить нормированное выражение, по-прежнему следует разделить ее на лиувиллевскую статистическую сумму. Это будет сделано в следующем разделе.

8. ДВУХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ И НОРМИРОВКА

Непосредственное вычисление двухточечных корреляционных чисел, в отличие от трехточечных, не является простой задачей. При прямом вычислении следует отдельно рассмотреть задачу о фиксации остающейся калибровочной симметрии на сфере. Для того чтобы избежать этой сложной задачи, мы предпочитаем воспользоваться тождеством

$$-\frac{\partial}{\partial \mu} \langle U_a U_a \rangle_g = \langle U_a U_a U_b \rangle_g, \quad (66)$$

которое непосредственно следует из действия (9) и лагранжиана Лиувилля (6). Это дает следующее выражение для (ненормированного) двухточечного корреляционного числа в МГ:

$$\langle U_a U_a \rangle_{\text{MG}} = (\pi \mu \gamma(b^2))^{(Q-2a)/b} \frac{F_{\text{MG}}^2(a)}{\pi(2a-Q)}. \quad (67)$$

Аналогичное соотношение

$$-\frac{\partial^3}{\partial \mu^3} Z_L = C_{\text{MG}}(b, b, b) = (\pi \mu \gamma(b^2))^{Q/b} \frac{\gamma(2-b^{-2})}{\pi^3 \gamma(b^2) \mu^3 b} \quad (68)$$

можно использовать для восстановления лиувиллевской статистической суммы [6]:

$$Z_L = (\pi \mu \gamma(b^2))^{Q/b} \frac{(1-b^2)}{\pi^3 \gamma(b^2) \gamma(b^{-2}) Q}. \quad (69)$$

С учетом этого выражения нормированные двух- и трехточечные корреляционные числа в ОММ имеют вид

$$\frac{\langle U_a U_a \rangle_{\text{MG}}}{Z_L} = \frac{(\pi\mu\gamma(b^2))^{-2a/b} \pi^2 \gamma(b^2) \gamma(b^{-2}) Q}{(1-b^2)(2a-Q)} F_{\text{MG}}^2(a), \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \frac{C^{(\text{MG})}(a_1, a_2, a_3)}{Z_L} &= (\pi\mu\gamma(b^2))^{-\sum_{i=1}^3 a_i/b} \times \\ &\times \frac{\pi^3(1+b^2)[- \gamma^3(b^2) \gamma^3(b^{-2})]^{1/2}}{(1-b^2)^2} \prod_{i=1}^3 F_{\text{MG}}(a_i). \end{aligned} \quad (71)$$

Выражения (70) и (71) вместе с представлением (49) для структурных констант в ОММ являются основным результатом данной работы.

Благодарности. Эта работа – для Галины Гриценко. Что еще я мог бы для нее сделать? Я также благодарен А. Замолодчикову и И. Костову за полезные обсуждения. Работа была поддержана со стороны European Committee, contract HPRN-СТ-2002-00325.

Список литературы

- [1] *A. Polyakov.* Phys. Lett. B. 1981. V. 103. P. 207.
- [2] *J. Distler, H. Kawai.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 231. P. 509; *F. David.* Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 1651.
- [3] *I. R. Klebanov.* String theory in two dimensions. hep-th/9108019; *P. Ginsparg, G. Moore.* Lectures on 2D gravity and 2D string theory. TASI summer school, 1992; hep-th/9304011; *P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin.* Phys. Rep. 1995. V. 254. P. 1.
- [4] *V. Knizhnik, A. Polyakov, A. Zamolodchikov.* Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 819.
- [5] *A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333.
- [6] *H. Dorn, H.-J. Otto.* Phys. Lett. B. 1992. V. 291. P. 39; hep-th/9206053; Nucl. Phys. B. 1994. V. 429. P. 375; hep-th/9403141.
- [7] *A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 477. P. 577; hep-th/9506136.
- [8] *E. W. Barnes.* Proc. London. Math. Soc. 1899. V. 31. P. 358; Phil. Trans. Roy. Soc. A. 1901. V. 196. P. 265.
- [9] *J. Teschner.* Phys. Lett. B. 1995. V. 363. P. 65; hep-th/9507109.
- [10] *V. G. Кас.* Infinite Dimensional Lie Algebras. An Introduction. Progr. Math. V. 44. Boston, MA: Birkhäuser, 1983.
- [11] *V. Dotsenko, V. Fateev.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 251. P. 691; Phys. Lett. B. 1985. V. 154. P. 291.
- [12] *P. Di Francesco, D. Kutasov.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 342. P. 589.
- [13] *M. Goulian, M. Li.* Phys. Rev. Lett. B. 1991. V. 264. P. 292.