Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Иванов, Б. М. Зупник, Неантикоммутативные деформации $N = (1, 1)$ суперсимметричных теорий, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 235–251

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:25:53

© 2005 г.

Е. А. Иванов*, Б. М. Зупник*

НЕАНТИКОММУТАТИВНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ $N = (1, 1)$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЙ

Обсуждаются сохраняющие киральность нильпотентные деформации четырехмерного $N = (1, 1)$ евклидова гармонического суперпространства и их применения в $N = (1, 1)$ суперсимметричных калибровочных и гипермультиплетных теориях. Для $SO(4) \times SU(2)$ инвариантной деформации представлены неантикоммутативные евклидовы аналоги немассовых действий $N = 2$ калибровочного мультиплета и гипермультиплета. В качестве нового результата рассмотрена специфическая неантикоммутативная гипермультиплетная модель с $N = (1, 0)$ суперсимметрией. Ее компонентное действие включает свободные скалярные поля и самодействие левокиральных спинорных полей.

Ключевые слова: нильпотентные деформации, гармоническое суперпространство.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительное внимание привлекают не(анти)коммутативные деформации суперсимметричных теорий.

Простейший тип некоммутативности связан с пространственно-временными координатами

$$x^m \star x^n - x^n \star x^m = i\Theta^{mn}, \quad (1.1)$$

где Θ^{mn} — некоторый постоянный тензор, задающий деформацию. Такие некоммутативные координаты возникают в теоретико-полевого пределе теории струн на фоне постоянного B -поля [1]. Для локальных полей $f(x)$ и $g(x)$ эта некоммутативность подразумевает использование звездного произведения Мойала–Вейля, которое можно определить через бидифференциальный оператор P (пуассонову структуру):

$$f \star g = fe^P g, \quad P = \frac{i}{2} \Theta^{mn} \overleftarrow{\partial}_m \overrightarrow{\partial}_n. \quad (1.2)$$

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: eivanov@thsun1.jinr.ru, zupnik@thsun1.jinr.ru

Деформации Мойала–Вейля суперсимметричных теорий в суперпространстве характеризуются скобкой Пуассона APB , где A и B – некоторые суперполя, а оператор деформации P в общем случае есть некоторая квадратичная форма, составленная из производных по четным и нечетным координатам суперпространства [2]. Свойства симметрии оператора P определяют ненарушенные симметрии деформированной суперполе-вой теории: генераторы последних должны коммутировать с P^1 .

Изученные до настоящего времени деформированные суперполевые теории поля соответствуют вырожденным частным случаям общего супердифференциального оператора Пуассона P . Например, авторы работы [3] рассмотрели деформации некоторых теорий в гармоническом $N = 2$ суперпространстве [4], [5], порожденные стандартной чисто бозонной пуассоновой структурой (1.2).

Деформации другого типа, для которых оператор P является билинейной формой подходящих производных по грассмановым координатам, называются нильпотентными, или неантикоммутирующими. В качестве базисных производных можно выбрать либо генераторы суперсимметрии (Q -деформации), либо спинорные ковариантные производные (D -деформации). Интерес к таким деформациям суперполевых теорий инициирован недавней работой [6], в которой рассматривалась минимальная деформация евклидова $N = (1/2, 1/2)$ суперпространства. В киральных $N = (1/2, 1/2)$ координатах $(x_L^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ оператор P , определяющий соответствующее произведение Мойала–Вейля, задается простой скобкой:

$$APB = -\frac{1}{2}(-1)^{p(A)}C^{\alpha\beta}\partial_\alpha A\partial_\beta B, \quad P = -\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}\overleftarrow{\partial}_\alpha\overrightarrow{\partial}_\beta, \quad (1.3)$$

где $C^{\alpha\beta}$ – некоторая постоянная симметричная матрица, $\partial_\alpha = \partial/\partial\theta^\alpha$ и $p(A)$ – Z_2 -градуировка. Оператор P , определенный уравнением (1.3), действует только на координаты θ^α и сохраняет $N = (1/2, 0)$ часть исходной $N = (1/2, 1/2)$ суперсимметрии. Важно, что соответствующее некоммутативное произведение суперполей сохраняет киральное и антикиральное представления $N = (1/2, 1/2)$ суперсимметрии. Как показано в работах [6] и [7], эта чисто фермионная деформация, подобно бозонной деформации (1.1), (1.2), также возникает из теории струн.

Аналогичные нильпотентные деформации $N = 2$ суперполевых теорий обсуждались в работе [8].

Данная статья в своей основной части представляет собой обзор формализма гармонического суперпространства в нильпотентно-деформированных евклидовых $N = (1, 1)$ теориях, развитого в работах [9]–[11] (см. также [12], [13]).

Грассманова гармоническая аналитичность является ключевым понятием суперполевого описания суперсимметричных моделей теории поля в четырех измерениях вне массовой оболочки [4], [5]. В $N = 2$ теориях она играет роль, подобную киральности в

¹) В общем случае этот критерий следует применять в слабом смысле, т.е. для коммутатора в обкладках суперполей A и B .

$N = 1$ суперполевых теориях. В частности, взаимодействия вне массовой поверхности строятся из аналитических калибровочных и гипермультиплетных суперполей. Подход гармонического аналитического суперпространства оказывается наиболее приспособленным для вычисления квантовых суперполевых диаграмм Фейнмана. По построению нильпотентные Q -деформации (и некоторые специальные D -деформации) $N = (1, 1)$ евклидова суперпространства сохраняют эту гармоническую грассманову аналитичность [9], [10]. Киральность также играет важную роль в $N = 2$ и $N = (1, 1)$ суперсимметричных калибровочных теориях, поэтому мы будем рассматривать только те деформации, которые наряду с гармонической аналитичностью сохраняют и обе киральности.

В разделе 2 дается обзор нильпотентных Q -деформаций евклидова кирального $N = (1, 1)$ суперпространства и анализируется роль стандартного сопряжения или альтернативного псевдосопряжения в евклидовых $N = (1, 1)$ суперсимметричных теориях. Соответствующий бидифференциальный оператор P сохраняет киральность и антикиральность, а также половину исходной $N = (1, 1)$ суперсимметрии ($N = (1, 0)$ суперсимметрию). Однако в ряде специальных случаев удается сохранить $N = (1, 1/2)$ суперсимметрию и (или) полную группу автоморфизмов $SO(4) \times SU(2)$.

Раздел 3 посвящен сохраняющей киральность $SO(4) \times SU(2)$ инвариантной деформации калибровочных $N = (1, 1)$ теорий в гармоническом суперпространстве. Эта синглетная деформация в общем случае нарушает половину суперсимметрий и приводит к появлению некоторого дополнительного взаимодействия между скалярным полем $\bar{\phi}$ из $N = (1, 1)$ калибровочного мультиплета и остальными полями [11]²⁾.

Неантикоммутирующие взаимодействия грассманово-аналитических гипермультиплетов рассматриваются в разделе 4. Формально эти суперполевые взаимодействия напоминают те, которые возникают в гармоническом суперпространстве с деформацией в x -секторе [3], однако соответствующие компонентные действия имеют совершенно другую структуру. В качестве нового явного примера мы детально анализируем простейшее гипермультиплетное самодействие, исчезающее при переходе к пределу обычного антикоммутирующего суперпространства. В компонентном действии этой модели скалярные поля не взаимодействуют с фермионами, и присутствует только специфическое самодействие фермионов, включающее две производные. Точно решаемое уравнение для правокиральных фермионов содержит нелинейный источник, построенный из свободных левокиральных фермионов.

2. ДЕФОРМАЦИИ $N = (1, 1)$ ЕВКЛИДОВА КИРАЛЬНОГО СУПЕРПРОСТРАНСТВА

Евклидово $N = (1, 1)$ суперпространство обладает следующими автоморфизмами: спинорной группой евклидова пространства $\text{Spin}(4) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R$ и группой R -симметрии $SU(2) \times O(1, 1)$, соответствующим образом реализованными на координатах

²⁾ Синглетная Q -деформация $U(1)$ калибровочной теории независимо рассматривалась в работе [13].

$x^m, \theta_k^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}k}$. Для параметризации этого суперпространства удобно выбрать киральные координаты $z_L \equiv (x_L^m, \theta_k^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}k})$. Координаты z_L вещественны по отношению к стандартному сопряжению [14]:

$$\widetilde{\theta_k^\alpha} = \varepsilon^{kj} \varepsilon_{\alpha\beta} \theta_j^\beta, \quad \widetilde{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}k}} = -\varepsilon_{kj} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}j}, \quad \widetilde{AB} = \widetilde{B} \widetilde{A}. \quad (2.1)$$

Квадрат этого сопряжения равен единице на любом объекте; соответственно $N = (1, 1)$ суперпространство имеет вещественную размерность $(4|8)$. Однако, если мы хотим трактовать $N = (1/2, 1/2)$ суперпространство как вещественное подпространство $N = (1, 1)$ суперпространства подобно $N = 1$ подпространству стандартного $N = 2, 4D$ суперпространства Минковского (например, чтобы иметь возможность редукции к теориям, рассмотренным в работе [6]), мы не можем использовать это стандартное комплексное сопряжение. Действительно, евклидово $N = (1/2, 1/2)$ суперпространство *нельзя* считать вещественным по отношению к комплексному сопряжению: две независимые $SU(2)$ спинорные координаты имеют вещественную размерность 8, которая совпадает с грасмановой размерностью всего $N = (1, 1)$ суперпространства.

В работе [9] было рассмотрено нарушающее $SU(2)$ R -симметрию альтернативное псевдосопряжение в том же евклидовом $N = (1, 1)$ суперпространстве:

$$(\theta_k^\alpha)^* = \varepsilon_{\alpha\beta} \theta_k^\beta, \quad (\bar{\theta}^{\dot{\alpha}k})^* = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}k}, \quad (x_L^m)^* = x_L^m, \quad (AB)^* = B^* A^*. \quad (2.2)$$

Существование этого псевдосопряжения не накладывает какого-либо добавочного ограничения на $N = (1, 1)$ суперпространство, которое имеет ту же размерность $(4|8)$, что и по отношению к обычному комплексному сопряжению. Ясно, что θ_1^α и $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}1}$ “вещественны” по отношению к псевдосопряжению, поэтому они образуют $N = (1/2, 1/2)$ подпространство “вещественной” размерности $(4|4)$ в $N = (1, 1)$ суперпространстве (такие подпространства могут быть выделены несколькими различными способами). Стандартное сопряжение (2.1) и псевдосопряжение (2.2) определяются по-разному на объектах, преобразующихся по нетривиальным представлениям R -симметрии $SU(2)^3$. Квадрат отображения $*$ равен -1 для грасмановых координат и соответствующих спинорных полей и $+1$ для любого бозонного монома или поля. На $SU(2)$ -синглеты оба отображения действуют как стандартное комплексное сопряжение. В частности, инвариантные действия вещественны по отношению к обоим отображениям $*$ и $\sim$, несмотря на то что компонентные поля могут иметь разные свойства относительно этих (псевдо)сопряжений.

После этого отступления вернемся к нашей главной теме — Q -деформациям $N = (1, 1)$ теорий. Простейшая пуассонова структура в киральных координатах имеет вид

$$P = -\frac{1}{2} C_{ik}^{\alpha\beta} \overleftarrow{Q}_\alpha^i \overrightarrow{Q}_\beta^k = -\frac{1}{2} C_{ik}^{\alpha\beta} \overleftarrow{\partial}_\alpha^i \overrightarrow{\partial}_\beta^k, \quad (2.3)$$

³⁾ Неоднозначности обобщенных сопряжений на алгебрах Грассмана (C -антилинейных отображений с квадратами, равными ± 1) обсуждались в монографии [15].

а скобка Пуассона для двух суперполей A и B определяется как

$$APB = -\frac{1}{2}(-1)^{p(A)}(\partial_\alpha^k A)C_{kj}^{\alpha\beta}(\partial_\beta^j B) = -(-1)^{p(A)p(B)}BPA. \quad (2.4)$$

Здесь $C_{kj}^{\alpha\beta} = C_{jk}^{\beta\alpha}$ — некоторые константы, $p(A)$ — Z_2 -градуировка, а частные спинорные производные действуют следующим образом:

$$\partial_\alpha^k \theta_i^\beta = \delta_i^k \delta_\alpha^\beta, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}i} \bar{\theta}^{\dot{\beta}k} = \delta_i^k \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \quad (2.5)$$

По определению скобка (2.4) сохраняет киральность и антикиральность и не затрагивает $SU(2)_R$, действующую на точечные индексы. В общем случае она нарушает полноту исходной $N = (1, 1)$ суперсимметрии, поскольку генераторы $\bar{Q}_{\dot{\alpha}k}$ не коммутируют с оператором P . Мы требуем, чтобы оператор P был вещественным, т.е. инвариантным относительно некоторого антилинейного отображения в алгебре суперполей. Два возможных (псевдо)сопряжения приводят к различным условиям для констант $C_{kj}^{\alpha\beta}$. Постоянную матрицу деформации можно расщепить на две неприводимые части:

$$C_{kj}^{\alpha\beta} = C_{(kj)}^{(\alpha\beta)} + 2\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{kj}I, \quad (2.6)$$

где I — вещественный параметр. Вторая синглетная часть сохраняет полную $SO(4) \times SU(2)$ симметрию:

$$P_s = -I\overleftarrow{Q}_\alpha^k \overrightarrow{Q}_k^\alpha, \quad AP_s B = -I(-1)^{p(A)}Q_\alpha^k A Q_k^\alpha B. \quad (2.7)$$

Произведение Мойала–Вейля двух суперполей для оператора (2.4) имеет вид

$$A \star B = Ae^P B = AB + APB + \frac{1}{2}AP^2 B + \frac{1}{6}AP^3 B + \frac{1}{24}AP^4 B, \quad (2.8)$$

где использовано тождество $P^5 = 0$. Это произведение сохраняет киральность и антикиральность и нарушает $N = (0, 1)$ суперсимметрию. При таком деформированном произведении только свободные действия сохраняют все суперсимметрии, тогда как взаимодействия деформируются и становятся неинвариантными относительно $N = (0, 1)$ суперсимметрии.

Несинглетная (3,3)-часть матрицы деформаций $C_{(kl)}^{(\alpha\beta)}$ нарушает R -симметрию $SU(2)$, поэтому можно выбрать одно из альтернативных условий вещественности для определения минимальной формы матрицы $C_{(kl)}^{(\alpha\beta)}$. Минимальное представление этой (3,3)-части имеет вид

$$C_{(12)}^{(\alpha\beta)} = C^{(\alpha\beta)}, \quad C_{(11)}^{(\alpha\beta)} = C_{(22)}^{(\alpha\beta)} = 0, \quad (2.9)$$

$$AP_C B = -\frac{1}{2}(-1)^{p(A)}C^{(\alpha\beta)}(Q_\alpha^1 A Q_\beta^2 B + Q_\alpha^2 A Q_\beta^1 B),$$

если мы предположим, что $C_{(ik)}^{(\alpha\beta)}$ вещественна по отношению к сопряжению $\sim$, т.е. $\widetilde{C_{(ik)}^{(\alpha\beta)}} = C_{(\alpha\beta)}^{(ik)}$. Выбор псевдосопряжения $*$ (2.2) совместен с разложением $N = (1, 1)$ на две $N = (1/2, 1/2)$ супералгебры. Следовательно, он допускает вырожденную деформацию

$$P(Q^2) = -\frac{1}{2}C(\overleftarrow{Q}_1^2 \overrightarrow{Q}_2^2 + \overleftarrow{Q}_2^2 \overrightarrow{Q}_1^2), \quad (2.10)$$

которая не включает Q_α^1 и содержит вещественный параметр C . В этом случае нарушены только суперсимметрии с суперзарядами $\overline{Q}_{\dot{\alpha}2}$, но не с $\overline{Q}_{\dot{\alpha}1}$. Таким образом, вырожденная деформация $P(Q^2)$ сохраняет $N = (1, 1/2)$ часть исходной $N = (1, 1)$ суперсимметрии.

Можно рассмотреть и более общие деформации, затрагивающие как киральный, так и антикиральный секторы. Например, можно взять набор взаимно антикоммутирующих псевдовещественных генераторов $Q_\alpha^2, \overline{Q}_{\dot{\alpha}1}$ и построить вещественный оператор деформации $\hat{P}$, который отвечает следующей скобке для четных суперполей A и B :

$$A\hat{P}B = -C^{\alpha\beta}Q_\alpha^2AQ_\beta^2B - B^{\alpha\dot{\alpha}}(Q_\alpha^2A\overline{Q}_{\dot{\alpha}1}B + \overline{Q}_{\dot{\alpha}1}AQ_\alpha^2B) - \overline{C}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{Q}_{\dot{\alpha}1}A\overline{Q}_{\dot{\beta}1}B. \quad (2.11)$$

Очевидно, что этот оператор деформации определяет ассоциативное умножение Мойалла–Вейля, и он коммутирует со всеми спинорными производными $D_\alpha^k, \overline{D}_{\dot{\alpha}k}$, а также с четырьмя генераторами суперсимметрии $Q_\alpha^2, \overline{Q}_{\dot{\alpha}1}$. Следовательно, он нарушает половину суперсимметрии и сохраняет обе киральности.

3. СОХРАНЯЮЩИЕ КИРАЛЬНОСТЬ СИНГЛЕТНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ $N = (1, 1)$ ГАРМОНИЧЕСКОГО СУПЕРПРОСТРАНСТВА

Гармоническое суперпространство с некоммутативными бозонными координатами x_A^m обсуждалось в работе [3]. Эта деформация порождает нелокальные теории, но сохраняет полную $N = 2$ суперсимметрию. Нильпотентные D -деформации евклидова $N = (1, 1)$ суперпространства, также сохраняющие все суперсимметрии, рассматривались в работе [8]. В формализме гармонического суперпространства изучался специальный класс таких деформаций – синглетная деформация, сохраняющая $SO(4) \times SU(2)$ симметрию, одну из киральностей и гармоническую аналитичность [9], [10]. В частности, в работе [10] построена $N = (1, 1)$ калибровочная теория с такой D -деформацией (см. также недавнюю работу [16]). Далее в нашей статье мы не будем касаться этой деформации и ограничимся рассмотрением нарушающей суперсимметрию синглетной Q -деформации, связанной с оператором P_s (2.7). Будет существенно использоваться евклидова версия подхода гармонического суперпространства [9], [11].

Основные понятия подхода гармонического суперпространства в его евклидовом варианте с точностью до нескольких несущественных различий совпадают с понятиями

стандартного $N = 2$, $D = 4$ гармонического суперпространства, изложенными в книге [5]. В обеих версиях ключевым ингредиентом являются $SU(2)/U(1)$ -гармоники $u_i^\pm$, $u^{+i}u_i^- = 1$, где $SU(2)$ – группа R -симметрии. Кирально-аналитические координаты $Z_C = (x_L^m, \theta^{\pm\alpha}, \bar{\theta}^{\pm\dot{\alpha}}, u_i^\pm)$ в $N = (1, 1)$ гармоническом суперпространстве связаны с аналитическими координатами через сдвиг бозонной координаты:

$$x_A^m = x_L^m - 2i(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}}\theta^{-\alpha}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}, \quad \theta^{\pm\alpha} = \theta^{\alpha i}u_i^\pm, \quad \bar{\theta}^{\pm\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha} i}u_i^\pm. \quad (3.1)$$

(Псевдо)сопряжения (2.1) и (2.2) могут быть обобщены на гармоники и координаты гармонического суперпространства [9]. Эти два (псевдо)сопряжения одинаково реализуются на инвариантах и гармонических суперполях, например $(A^k B_k)^* = (\widetilde{A^k B_k})$ или $(q^+)^* = \widetilde{q^+}$, но отличаются при действии на гармоники или R -спинорные компонентные поля, например $(A_k)^* \neq \widetilde{A_k}$. Важное инвариантное псевдовещественное подпространство суть аналитическое евклидово гармоническое суперпространство, параметризованное координатами

$$(x_A^m, \theta^{+\alpha}, \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}, u_i^\pm) \equiv (\zeta, u). \quad (3.2)$$

Сохраняющие суперсимметрию спинорные и гармонические производные в различных координатных базисах определены в работах [9]–[11]. Грассманово-аналитическое (G -аналитическое) суперполе $\Phi = \Phi(\zeta, u)$ задается дифференциальными связями

$$D_\alpha^+ \Phi(\zeta, \theta^-, \bar{\theta}^-, u) = \overline{D}_\alpha^+ \Phi(\zeta, \theta^-, \bar{\theta}^-, u) = 0. \quad (3.3)$$

Важно, что сохраняющий киральность оператор P (2.4) сохраняет и грассманову аналитичность:

$$[P, (D_\alpha^+, \overline{D}_\alpha^+)] = 0. \quad (3.4)$$

Удобно использовать гармонические проекции генераторов $N = (1, 1)$ суперсимметрии

$$Q_\alpha^k = u^{+k}Q_\alpha^- - u^{-k}Q_\alpha^+, \quad \overline{Q}_{\dot{\alpha}k} = u_k^+\overline{Q}^- - u_k^-\overline{Q}^+. \quad (3.5)$$

Например, в кирально-аналитических координатах имеем

$$Q_\alpha^+ = \partial_{-\alpha}, \quad Q_\alpha^- = -\partial_{+\alpha}, \quad (3.6)$$

где $\partial_{\pm\alpha} = \partial/\partial\theta^{\pm\alpha}$. Различные члены в произведении (2.8) с оператором синглетной Q -деформации P_s в этих координатах имеют вид

$$\begin{aligned} AP_s B &= I(-1)^{p(A)}(\partial_{-\alpha} A \partial_+^\alpha B + \partial_+^\alpha A \partial_{-\alpha} B), \\ \frac{1}{2}AP_s^2 B &= -\frac{I^2}{4}(\partial_+)^2 A (\partial_-)^2 B - \frac{I^2}{4}(\partial_-)^2 A (\partial_+)^2 B + I^2 \partial_{+\beta} \partial_-^\alpha A \partial_{+\alpha} \partial_-^\beta B, \\ \frac{1}{6}AP_s^3 B &= \frac{I^3}{4}(-1)^{p(A)} \partial_-^\alpha (\partial_+)^2 A \partial_{+\alpha} (\partial_-)^2 B + \frac{I^3}{4}(-1)^{p(A)} \partial_{+\alpha} (\partial_-)^2 A \partial_-^\alpha (\partial_+)^2 B, \\ \frac{1}{24}AP_s^4 B &= \frac{I^4}{16}(\partial_+)^2 (\partial_-)^2 A (\partial_-)^2 (\partial_+)^2 B. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отметим, что последние два члена равны нулю для аналитических суперполей.

Далее мы рассмотрим некоторые аспекты деформированной $N = (1, 1)$ калибровочной теории в гармоническом суперпространстве. Эта теория во многом подобна гармонической формулировке неабелевой $N = 2$ калибровочной теории в $4D$ -пространстве Минковского [5].

Основным суперполем $N = (1, 1)$ калибровочной теории является аналитический антиэрмитов потенциал V^{++} со значениями в алгебре калибровочной группы, в качестве которой мы выберем $U(n)$. Калибровочные $U(n)$ -преобразования потенциала V^{++} имеют вид

$$\delta_\Lambda V^{++} = D^{++}\Lambda + [V^{++}, \Lambda]_\star, \quad (3.8)$$

где Λ – антиэрмитов аналитический калибровочный параметр и D^{++} записана в кирально-аналитическом базисе:

$$D^{++} = \partial^{++} + \theta^{+\alpha}\partial_{-\alpha} + \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}\partial_{-\dot{\alpha}}, \quad \partial^{++} = u^{+i}\frac{\partial}{\partial u^{-i}}. \quad (3.9)$$

В калибровке Весса–Зумино (ВЗ) мы можем использовать разложение потенциала по $\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} V_{\text{ВЗ}}^{++} &= \bar{\phi}^{++} + \bar{\theta}_\alpha^+ V^{+\dot{\alpha}} + (\bar{\theta}^+)^2 V, \\ \bar{\phi}^{++}(x_A, \theta^+, u) &= (\theta^+)^2 \bar{\phi}, \quad V^{+\dot{\alpha}}(x_A, \theta^+, u) = 2\theta^{+\alpha} A_\alpha^{\dot{\alpha}} + 4(\theta^+)^2 \bar{\Psi}^{-\dot{\alpha}}, \\ V(x_A, \theta^+, u) &= \phi + 4\theta^{+\alpha} \Psi_\alpha^- + 3(\theta^+)^2 \mathcal{D}^{--}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\Psi_\alpha^- = u_k^- \Psi_\alpha^k$, $\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}^- = u_k^- \bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}^k$, $\mathcal{D}^{--} = u_k^- u_l^- \mathcal{D}^{kl}$ и все компонентные поля суть функции координат x_A^m . Для дальнейшего будет удобно переписать ВЗ-потенциал в кирально-аналитическом базисе, используя соотношение (3.2):

$$V_{\text{ВЗ}}^{++}(Z_C, u) = v^{++}(z_C, u) + \bar{\theta}_\alpha^+ v^{+\dot{\alpha}}(z_C, u) + (\bar{\theta}^+)^2 v(z_C, u), \quad (3.11)$$

где киральные суперфункции зависят только от координат x_L^m , $\theta^{+\alpha}$, $\theta^{-\alpha}$ и $u_i^\pm$:

$$\begin{aligned} v^{++}(z_C, u) &= (\theta^+)^2 \bar{\phi}(x_L), \\ v^{+\dot{\alpha}}(z_C, u) &= V^{+\dot{\alpha}}(x_L, \theta^+, u) - 2i\theta^{-\alpha}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\phi}^{++}(x_L, \theta^+, u) = \\ &= -2\theta_\alpha^+ A^{\alpha\dot{\alpha}} + 4(\theta^+)^2 u_k^- \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}k} + 2i\theta_\alpha^- (\theta^+)^2 \partial^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\phi}, \\ v(z_C, u) &= V(x_L, \theta^+, u) + i\theta^{-\alpha}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}V^{+\dot{\alpha}}(x_L, \theta^+, u) - (\theta^-)^2 \square \bar{\phi}^{++}(x_L, \theta^+, u) = \\ &= \phi + 4\theta^{+\alpha} \Psi_\alpha^- + 3(\theta^+)^2 \mathcal{D}^{--} - 2i(\theta^+\theta^-)\partial_m A_m + \theta^+ \sigma_{mn} \theta^- F_{mn} + \\ &\quad + 4i\theta^{-\alpha}(\theta^+)^2 \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\Psi}^{-\dot{\alpha}} - (\theta^-)^2 (\theta^+)^2 \square \bar{\phi}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь все компонентные поля (после отделения гармонической зависимости) являются функциями x_L^m .

Обратимся к простейшему случаю калибровочной группы $U(1)$. Нетрудно найти соответствующую P_s -деформацию калибровочных преобразований и преобразований $N = (1, 0)$ суперсимметрии на компонентных полях [11]. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_a \phi &= -8I A_m \partial_m a, & \delta_a \bar{\phi} &= 0, & \delta_a A_m &= (1 + 4I\bar{\phi}) \partial_m a, \\ \delta_a \Psi_\alpha^k &= -4I \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}k} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} a, & \delta_a \bar{\Psi}_\alpha^k &= 0, & \delta_a \mathcal{D}^{kl} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

и

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \phi &= 2\epsilon^{\alpha k} \Psi_{\alpha k}, & \delta_\epsilon \bar{\phi} &= 0, & \delta_\epsilon A_m &= \epsilon^{\alpha k} (\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\Psi}_k^{\dot{\alpha}}, \\ \delta_\epsilon \Psi_\alpha^k &= -\epsilon_{\alpha l} \mathcal{D}^{kl} + \frac{1}{2} (1 + 4I\bar{\phi}) (\sigma_{mn} \epsilon^k)_\alpha F_{mn} - 4iI \epsilon_\alpha^k A_m \partial_m \bar{\phi}, \\ \delta_\epsilon \bar{\Psi}_\alpha^k &= -i\epsilon^{\alpha k} (1 + 4I\bar{\phi}) \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\phi}, \\ \delta_\epsilon \mathcal{D}^{kl} &= i\partial_m [(\epsilon^k \sigma_m \bar{\Psi}^l + \epsilon^l \sigma_m \bar{\Psi}^k) (1 + 4I\bar{\phi})], \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$.

Неполиномиальное суперполевое действие Q -деформированной калибровочной теории определяется в работе [9] как интеграл по полному суперпространству в киральных координатах по аналогии с недеформированным $N = 2$ суперполевым действием [17]. Как показано в работе [11], P_s -деформированное $U(1)$ калибровочное действие удобно переписать в виде интеграла по киральному суперпространству:

$$S^{(I)} = \frac{1}{4} \int d^4 x_L d^4 \theta \mathcal{A}^2, \quad (3.15)$$

где $\mathcal{A}(x_L, \theta^+, \theta^-, u)$ — деформированная киральная суперполевая напряженность. Последняя совпадает с низшей компонентой в $\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}$ -разложении ковариантно-киральной суперполевой напряженности $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W} \equiv -\frac{1}{4} (\bar{D}^+)^2 V^{--} = \mathcal{A} + \bar{\theta}_\alpha^+ \tau^{-\dot{\alpha}} + (\bar{\theta}^+)^2 \tau^{-2}, \quad (3.16)$$

и действие (3.15) можно переписать в виде

$$S^{(I)} = \frac{1}{4} \int d^4 x_L d^4 \theta \mathcal{W}^2. \quad (3.17)$$

Можно показать, что остальные две компоненты в разложении (3.16) не дают вклада в (3.17).

Составная гармоническая связность V^{--} связана с исходным потенциалом V^{++} через деформированное гармоническое уравнение нулевой кривизны [9]:

$$D^{++} V^{--} - D^{--} V^{++} + [V^{++}, V^{--}]_\star = 0, \quad (3.18)$$

где в кирально-аналитическом базисе

$$D^{--} = \partial^{--} + \theta^{-\alpha} \partial_{+\alpha} + \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\alpha}}, \quad \partial^{--} = u^{-i} \frac{\partial}{\partial u^{+i}}.$$

В силу (3.18) киральное суперполе $\mathcal{A}$ удовлетворяет однородному гармоническому уравнению

$$[\partial^{++} + (1 + 4I\bar{\phi})\theta^{+\alpha} \partial_{-\alpha}] \mathcal{A} = 0 \quad (3.19)$$

и некоторому дополнительному нелинейному неоднородному уравнению [11]

$$\begin{aligned} & [\partial^{++} + (1 + 4I\bar{\phi})\theta^{+\alpha} \partial_{-\alpha}] \varphi^{--} + 2(\mathcal{A} - v) - I(\partial_{-}^{\alpha} v_{\alpha}^{+} \partial_{+\alpha} v^{-\dot{\alpha}} - \partial_{+}^{\alpha} v_{\alpha}^{+} \partial_{-\alpha} v^{-\dot{\alpha}}) + \\ & + \frac{I^3}{4} \partial_{-}^{\alpha} (\partial_{+})^2 v_{\alpha}^{+} \partial_{+\alpha} (\partial_{-})^2 v^{-\dot{\alpha}} = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $v^{-\dot{\alpha}}$ и φ^{--} — соответствующие киральные коэффициенты разложения V^{--} по $\bar{\theta}^{\pm\dot{\alpha}}$. Они могут быть выражены через компонентные поля.

Недеформированная киральная $U(1)$ суперполевая напряженность имеет следующий компонентный полевой состав:

$$\begin{aligned} W_0(x_L, \theta^+, \theta^-, u) = & \varphi + 2\theta^+ \psi^- - 2\theta^- \psi^+ + (\theta^+)^2 d^{--} - \\ & - 2(\theta^+ \theta^-) d^{+-} + (\theta^-)^2 d^{++} + (\theta^- \sigma_{mn} \theta^+) f_{mn} + \\ & + 2i[(\theta^-)^2 \theta^+ \sigma_m \partial_m \bar{\psi}^+ + (\theta^+)^2 \theta^- \sigma_m \partial_m \bar{\psi}^-] - (\theta^+)^2 (\theta^-)^2 \square \bar{\phi}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $f_{mn} = \partial_m a_n - a_m a_n$, $\psi_{\alpha}^{\pm} = \psi_{\alpha}^i(x_L) u_i^{\pm}$, $d^{+-} = u_k^+ u_l^- d^{kl}(x_L)$ и т.д. Это суперполе удовлетворяет свободному гармоническому уравнению $D^{++} W_0 = 0$ и преобразуется относительно $N = (1, 0)$ суперсимметрии как

$$\delta_{\epsilon} W_0 = (\epsilon^{-\alpha} \partial_{-\alpha} + \epsilon^{+\alpha} \partial_{+\alpha}) W_0. \quad (3.22)$$

Легко показать, что суперполе $\mathcal{A}$ может быть построено как нелинейное преобразование недеформированной $U(1)$ суперполевой напряженности W_0 :

$$\mathcal{A}(x_L, \theta^+, \theta^-, u) = (1 + 4I\bar{\phi})^2 W_0(x_L, \theta^+, (1 + 4I\bar{\phi})^{-1} \theta^-, u). \quad (3.23)$$

Из (3.23) следуют нелинейные соотношения между недеформированными и деформированными $U(1)$ компонентными полями:

$$\begin{aligned} \varphi &= (1 + 4I\bar{\phi})^{-2} [\phi + 4I(1 + 4I\bar{\phi})^{-1} (A_m^2 + 4I^2 (\partial_m \bar{\phi})^2)], \\ a_m &= (1 + 4I\bar{\phi})^{-1} A_m, \quad \bar{\psi}_{\alpha}^k = (1 + 4I\bar{\phi})^{-1} \bar{\Psi}_{\alpha}^k, \\ \psi_{\alpha}^k &= (1 + 4I\bar{\phi})^{-2} [\Psi_{\alpha}^k + 4I(1 + 4I\bar{\phi})^{-1} A_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}k}], \\ d^{kl} &= (1 + 4I\bar{\phi})^{-2} [\mathcal{D}^{kl} + 8I \bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}^k \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}l}]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Преобразование $N = (1, 0)$ суперсимметрии деформированного кирального суперполя имеет вид

$$\delta_\epsilon \mathcal{A} = [(1 + 4I\bar{\phi})\epsilon^{-\alpha}\partial_{-\alpha} + \epsilon^{+\alpha}\partial_{+\alpha}]\mathcal{A}. \quad (3.25)$$

Деформированное суперполевое $U(1)$ калибровочное действие может быть выражено через абелевы недеформированные величины (с точностью до членов с полной спинорной производной под интегралом) следующим образом:

$$S^{(I)} = \frac{1}{4} \int d^4x_L d^4\theta \mathcal{A}^2 = \frac{1}{4} \int d^4x_L d^4\theta (1 + 4I\bar{\phi})^2 W_0^2. \quad (3.26)$$

Используя переопределения деформированных полей в соотношениях (3.24), можно переписать компонентный лагранжиан деформированной $U(1)$ калибровочной теории в виде $L^{(I)} = (1 + 4I\bar{\phi})^2 L_0$, где L_0 – свободный недеформированный лагранжиан

$$L_0 = -\frac{1}{2}\varphi\Box\bar{\phi} + \frac{1}{4}\left(f_{mn}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{mnrs}f_{mn}f_{rs}\right) - i\psi_k^\alpha\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}k} + \frac{1}{4}(d^{kl})^2. \quad (3.27)$$

Очевидно, что дальнейшим переопределением полей φ , ψ_α^k и d^{kl} можно свести все члены скалярных, фермионных и вспомогательных полей в действии к их свободным кинетическим членам. Однако нелинейное взаимодействие полей $\bar{\phi}$ и f_{mn} ,

$$\frac{1}{4}(1 + 4I\bar{\phi})^2\left(f_{mn}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{mnrs}f_{mn}f_{rs}\right), \quad (3.28)$$

нельзя устранить никаким переопределением.

Теперь кратко обсудим обобщение на неабелев $U(n)$ -случай ($n \geq 2$). Мы используем ВЗ-калибровку для $U(n)$ -потенциала (3.10), в которой деформированные калибровочные преобразования компонентных полей имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_a \bar{\phi} &= -i[a, \bar{\phi}], & \delta_r \bar{\Psi}_\alpha^k &= -i[a, \bar{\Psi}_\alpha^k], & \delta_r \mathcal{D}^{kl} &= -i[a, \mathcal{D}^{kl}], \\ \delta_a A_m &= \partial_m a + i[A_m, a] + 2I\{\bar{\phi}, \partial_m a\}, \\ \delta_a \phi &= -i[a, \phi] - 4I\{A_m, \partial_m a\} - 4iI^2[\Box a, \bar{\phi}], \\ \delta_a \Psi_\alpha^k &= -i[a, \Psi_\alpha^k] - 2I(\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}}\{\bar{\Psi}^{\dot{\alpha}k}, \partial_m a\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

P_s -деформированное киральное $U(n)$ калибровочное суперполе $\mathcal{A}$ удовлетворяет уравнению

$$D^{++}\mathcal{A} + I\theta^{+\alpha}\{\bar{\phi}, \partial_{-\alpha}\mathcal{A}\} + (\theta^+)^2[\bar{\phi}, \mathcal{A}] + I^2[\bar{\phi}, (\partial_-)^2\mathcal{A}] = 0, \quad (3.30)$$

где $\bar{\phi}$ – эрмитово матричное скалярное поле. Вводя матричный оператор

$$L = 1 + 2I\{\bar{\phi}, \}, \quad (3.31)$$

первые два члена в уравнении (3.30) можно переписать как $(\partial^{++} + L\theta^{+\alpha}\partial_{-\alpha})\mathcal{A}$. Недеформированное гармоническое киральное $U(n)$ -суперполе A имеет следующее компонентное разложение:

$$\begin{aligned} A = & \varphi + 2\theta^+\psi^- - 2\theta^-\psi^+ + (\theta^+)^2d^{--} + (\theta^+\theta^-)([\varphi, \bar{\phi}] - 2d^{+-}) + (\theta^-)^2d^{++} + \\ & + (\theta^+\sigma_{mn}\theta^-)f_{mn} + 2(\theta^-)^2\theta^+(i\xi^+ - [\bar{\phi}, \psi^+]) + 2i(\theta^+)^2\theta^-\xi^- - \\ & - (\theta^+)^2(\theta^-)^2(p + [\bar{\phi}, d^{+-}]), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где все компонентные поля суть $(n \times n)$ -матрицы и использованы сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} \nabla_m = & \partial_m + i[a_m, \cdot], \quad f_{mn} = \partial_m a_n - \partial_n a_m + i[a_m, a_n], \\ \xi_\alpha^k = & (\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}}\nabla_m\bar{\psi}^{\dot{\alpha}k}, \quad p = \nabla_m^2\bar{\phi} + \{\bar{\psi}^{\dot{\alpha}k}, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}k}\} + \frac{1}{2}[\bar{\phi}, [\bar{\phi}, \varphi]]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Деформированное киральное $U(n)$ -суперполе можно представить как сумму двух $N = (1, 0)$ ковариантных величин:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_L, \theta^+, \theta^-, u) = & \left[L^2 + L(1-L)(\theta^-\partial_-) - \frac{1}{4}(1-L)^2(\theta^-)^2(\partial_-)^2 \right] A(x_L, \theta^+, \theta^-, u) - \\ & - 4L^2\hat{A}(x_L, \theta^+, u), \end{aligned} \quad (3.34)$$

где A – недеформированное $U(n)$ -суперполе (3.32), а зависящий от $\bar{\phi}$ матричный оператор L (3.31) коммутирует с $\theta^{\pm\alpha}$ и $\partial_{-\alpha}$ и действует на все матричные объекты, стоящие справа от него. Вторая часть $\hat{A}$ представляет собой бесследовое кирально-аналитическое $N = (1, 0)$ суперполе:

$$\begin{aligned} \hat{A}(x_L, \theta^+, u) = & \hat{p} - [\bar{\phi}, d^{+-}] + 2\theta^{+\alpha}(i[\bar{\phi}, \xi_\alpha^-] - [\bar{\phi}, [\bar{\phi}, \psi_\alpha^-]]) + \\ & + (\theta^+)^2[\bar{\phi}, [\bar{\phi}, d^{--}]], \quad \hat{p} = p - \frac{1}{n}\text{Tr } p. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Таким образом, обе части суперполя $\mathcal{A}$ выражаются через недеформированные компоненты суперполя A (3.32). Преобразование $N = (1, 0)$ суперсимметрии для $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\delta_\epsilon \mathcal{A} = 2(\epsilon^-\theta^+)[\bar{\phi}, \mathcal{A}] + L\epsilon^{-\alpha}\partial_{-\alpha}\mathcal{A} + \epsilon^{+\alpha}\partial_{+\alpha}\mathcal{A}. \quad (3.36)$$

Следует отметить, что недеформированное уравнение антисамодуальности в недеформированной $N = (1, 1)$ суперсимметричной $U(n)$ калибровочной теории [18] может быть записано в чисто киральной суперполевой форме

$$A = 0, \quad (3.37)$$

которая, как следует из (3.32), эквивалентна следующей системе матричных компонентных уравнений:

$$\begin{aligned} f_{mn}(\sigma_{mn})_{\alpha}^{\beta} &= 0, \quad \varphi = \psi_{\alpha}^k = d^{kl} = 0, \\ (\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}}(\partial_m \bar{\psi}^{\dot{\alpha}k} + i[a_m, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}k}]) &= 0, \quad (\nabla_m)^2 \bar{\phi} + \{\bar{\psi}^{\dot{\alpha}k}, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}k}\} = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Антисамодуальные $U(n)$ -решения сохраняют только $N = (1, 0)$ суперсимметрию, поэтому естественно, что те же самые недеформированные решения выживают в I -деформированной $U(n)$ калибровочной теории:

$$A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} = 0. \quad (3.39)$$

Компонентное действие I -деформированной $U(n)$ калибровочной теории может быть непосредственно получено из суперполевого кирального действия

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{4} \int d^4 x_L d^4 \theta \operatorname{Tr} \mathcal{A}^2 = \int d^4 x_L d^4 \theta \operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{4} (LA)^2 - 2I^2 \hat{A} A \right\} \quad (3.40)$$

с использованием соотношений (3.32) и (3.35). В пределе $I \rightarrow 0$ первый член порождает действие недеформированной $U(n)$ калибровочной теории. Нестандартный второй член содержит члены с высшими производными, в частности $I^2 (\square \bar{\phi})^2$, которые, по-видимому, могут быть устранены переопределением скалярного поля φ (мы проверили это предположение только для билинейной свободной части полного действия).

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИПЕРМУЛЬТИПЛЕТОВ В ДЕФОРМИРОВАННОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Свободное действие q^+ -гипермультиплетов не деформируется при переходе к неантикоммутативному суперпространству и имеет тот же вид, что и в обычном гармоническом суперпространстве [5]:

$$S_0(q^+) = \frac{1}{2} \int du d\zeta^{-4} q_a^+ \star D^{++} q^{+a} = \frac{1}{2} \int du d\zeta^{-4} q_a^+ D^{++} q^{+a}. \quad (4.1)$$

Здесь $d\zeta^{-4} = d^4 x_A (D^-)^4$ и введены дополнительные индексы $a, b = 1, 2$ группы “Паули–Гюрши” $SU(2)_P$: $q^{+a} = \varepsilon^{ab} q_b^+ = (\tilde{q}^+, q^+)$. Рассмотрим $\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}$ -разложение суперполевого дублета q^{+a} в аналитическом базисе

$$\begin{aligned} q^{+a} &= c^{+a} + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^+ \kappa^{\dot{\alpha}a} + (\bar{\theta}^+)^2 b^{-a}, \\ D^{++} q^{+a} &= \partial^{++} c^{+a} + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^+ (\partial^{++} \kappa^{\dot{\alpha}a} + 2i\theta_{\alpha}^+ \partial^{\alpha\dot{\alpha}} c^{+a}) + \\ &+ (\bar{\theta}^+)^2 (\partial^{++} b^{-a} + i\theta^{+\alpha} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \kappa^{\dot{\alpha}a}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c^{+a} &= f^a + \theta^{+\alpha} \rho_{\alpha}^a + (\theta^+)^2 g^a, & \kappa^{\dot{\alpha}a} &= \chi^{a\dot{\alpha}} + \theta^{+\alpha} r_{\alpha}^{\dot{\alpha}a} + (\theta^+)^2 \bar{\Sigma}^{a\dot{\alpha}}, \\ b^{-a} &= h^a + \theta^{+\alpha} \Sigma_{\alpha}^a + (\theta^+)^2 X^a \end{aligned} \quad (4.3)$$

и опущены гармонические $U(1)$ -заряды компонентных полей $f^a, g^a, h^a, \dots$. Компонентные поля являются функциями x_A^m и гармоник. Киральное представление свободного действия (т.е. с явно выполненным интегрированием по $\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}$) имеет вид

$$\begin{aligned} S_0(q^+) &= - \int du d^4 x_A d^2 \theta^+ \left[\frac{1}{2} b^{-a} \partial^{++} c_a^+ + \frac{1}{2} c^{+a} \partial^{++} b_a^- + \frac{1}{4} \kappa^{\dot{\alpha}a} \partial^{++} \kappa_{\dot{\alpha}a} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \theta^{+\alpha} (c^{+a} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \kappa_a^{\dot{\alpha}} - \kappa_a^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} c^{+a}) \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Неантикоммутативность проявляется в деформации взаимодействий гипермультиплетов. В рамках явно $SU(2)$ -ковариантного формализма удобно ввести две независимые комбинации:

$$\{q^{+a}, q^{+b}\}_{\star}, \quad [q^{+a}, q^{+b}]_{\star} = 2q^{+a} P_s q^{+b} = \varepsilon^{ab} C^{++}. \quad (4.5)$$

Квадрат первого суперполя, будучи свернут с некоторым $SU(2)$ -нарушающим постоянным параметром $C_{(ab)}$, дает некоммутативное обобщение самодействия $[q^{+a} q^{+b} C_{(ab)}]^2$, которое в бозонном пространстве отображения порождает известную гиперкэлэрову метрику Тауб-NUT [5]. Оставляя анализ такого обобщения на будущее, рассмотрим более простой пример деформированного самодействия, построенного из второй комбинации в (4.5) и исчезающего в антикоммутативном пределе $I \rightarrow 0$:

$$S_{\nu}(q^+) = -\frac{\nu}{4} \int du d\zeta^{-4} C^{++} \star C^{++} = -\frac{\nu}{4} \int du d\zeta^{-4} C^{++} C^{++}. \quad (4.6)$$

Здесь ν – константа связи, общий знак минус выбран для дальнейшего удобства. Отметим, что это суперполевое взаимодействие нильпотентно: $(C^{++})^2 \sim (\bar{\theta}^+)^2$, и сохраняет как $SU(2)$ -, так и R -симметрию $SU(2)$, реализованную на гармониках.

Легко вычислить киральные компоненты составных суперполей:

$$\begin{aligned} C^{++} &= q_a^+ P_s q^{+a} = -4iI\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} q_a^+ \partial_+^{\alpha} q^{+a} = -4iI\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} c_a^+ \partial_+^{\alpha} c^{+a} + \\ &\quad + 2iI(\bar{\theta}^+)^2 (\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \kappa_a^{\dot{\alpha}} \partial_+^{\alpha} c^{+a} - \partial_{\alpha\dot{\alpha}} c_a^+ \partial_+^{\alpha} \kappa^{\dot{\alpha}a}), \\ (C^{++})^2 &= -8I^2 (\bar{\theta}^+)^2 B_{\dot{\alpha}}^+ B^{+\dot{\alpha}}, \quad B^{+\dot{\alpha}}(c^+) = \partial^{\alpha\dot{\alpha}} c_a^+ \partial_{+\alpha} c^{+a}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Деформированное взаимодействие (4.6) включает только суперполя c^{+a} :

$$\begin{aligned} S_{\nu}^s(q^+) &= 2\nu I^2 \int du d^4 x_A d^2 \theta^+ B_{\dot{\alpha}}^+ B^{+\dot{\alpha}} = \\ &= -2\nu I^2 \int du d^4 x_A d^2 \theta^+ \partial_{\alpha\dot{\alpha}} c_a^+ \partial_+^{\alpha} c^{+a} \partial^{\beta\dot{\alpha}} c_b^+ \partial_{+\beta} c^{+b}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из полного суперполевого действия $S_0(q^+) + S_\nu(q^+)$ следует уравнение движения для суперполя q^{+a} :

$$D^{++}q^{+a} = \nu q^{+a} P_s(q_b^+ P_s q^{+b}) \equiv J^{(+3)a}(q^+), \quad (4.9)$$

где $J^{(+3)a}(q^+)$ – нелинейный нильпотентный источник. После интегрирования по θ в полном действии остается бесконечное число вспомогательных полей, возникающих из бесконечных гармонических разложений компонент в (4.3). Эти вспомогательные поля можно исключить, воспользовавшись нединамическими уравнениями, которые содержатся в θ^+ , $\bar{\theta}^+$ -разложении суперполевого уравнения (4.9).

Нединамические уравнения движения для c^{+a} и $\kappa^{\dot{\alpha}a}$

$$\partial^{++}c^{+a} = 0, \quad \partial^{++}\kappa_{\dot{\alpha}}^a - 2i\theta^{+\alpha}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}c^{+a} = 0 \quad (4.10)$$

имеют следующее решение в компонентах:

$$c^{+a} = u_k^+ f^{ak}(x) + \theta^{+\alpha} \rho_{\alpha}^a(x), \quad \kappa_{\dot{\alpha}}^a = \chi_{\dot{\alpha}}^a(x) + 2iu_k^- \theta^{+\alpha} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} f^{ak}(x). \quad (4.11)$$

Уравнение для киральной компоненты b^{-a} также вытекает из (4.9):

$$\begin{aligned} \partial^{++}b^{-a} + i\theta^{+\alpha}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\kappa^{\dot{\alpha}a} = & -4\nu I^2 [\partial_{\alpha\dot{\alpha}}c^{+a}\partial^{\beta\dot{\alpha}}\partial_+^{\alpha}c^{+b}\partial_{+\beta}c_b^+ - \partial_m c^{+a}\partial_m c_b^+(\partial_+)^2 c^{+b} + \\ & + \partial_+^{\alpha}c^{+a}\square c_b^+\partial_{+\alpha}c^{+b} + \partial_+^{\alpha}c^{+a}\partial^{\beta\dot{\alpha}}c_b^+\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{+\beta}c^{+b}]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Оно имеет решение

$$b^{-a} = -4\nu I^2 u_k^- [\partial_{\alpha\dot{\alpha}} f^{ak}(\partial^{\beta\dot{\alpha}}\rho^{\alpha b})\rho_{\beta b} + \rho^{\alpha a}\partial^{\beta\dot{\alpha}}f_b^k\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\rho_{\beta}^b + \rho^{\alpha a}\rho_{\alpha}^b\square f_b^k] \quad (4.13)$$

(уравнение (4.12) содержит также систему динамических уравнений для физических полей $f^{ak}(x)$, $\rho_{\alpha}^a(x)$ и $\chi_{\dot{\alpha}}^a(x)$; эти уравнения можно эквивалентно вывести из действия, записанного через физические поля). В действительности компонента b^{-a} не дает вклада в полное физическое немассовое действие $S_0 + S_\nu$: она входит только в два первых члена в (4.4), а эти члены исчезают после применения первого из уравнений (4.10) и интегрирования по частям с производной ∂^{++} .

Исключая вспомогательные компонентные поля из действия $S_0 + S_\nu$ с помощью подстановки (4.11), получаем физическое действие этой модели. Оно содержит стандартные кинетические члены для физических бозонных и фермионных полей, а также некоторое фермионное самодействие с двумя производными:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_m f^{ak} \partial_m f_{ak} + \frac{i}{2} \rho^{\alpha a} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \chi_{\dot{\alpha}}^a - \nu I^2 (\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \rho_{\gamma a}) \rho^{\alpha a} (\partial^{\beta\dot{\alpha}} \rho^{\gamma b}) \rho_{\beta b} \right]. \quad (4.14)$$

В этой модели скалярное поле f^{ak} и левокиральное спинорное поле ρ_α^a удовлетворяют свободным безмассовым уравнениям

$$\square f^{ak} = 0, \quad \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \rho^{\alpha a} = 0. \quad (4.15)$$

В то же время уравнение для правокирального спинорного поля χ_α^a содержит нелинейный спинорный источник, зависящий от левокирального спинорного поля:

$$\begin{aligned} i\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \chi_a^{\dot{\alpha}} = & -4\nu I^2 [\rho_{\beta b} (\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \rho_{\gamma a}) (\partial^{\beta\dot{\alpha}} \rho^{\gamma b}) + \rho_{\beta a} (\partial_{\gamma\dot{\alpha}} \rho_{\alpha b}) (\partial^{\beta\dot{\alpha}} \rho^{\gamma b}) + \\ & + \rho_{\beta b} (\partial_{\gamma\dot{\alpha}} \rho_a^{\dot{\gamma}}) (\partial^{\beta\dot{\alpha}} \rho_\alpha^{\dot{b}}) + \rho^{\beta b} \rho_{\beta a} \square \rho_{\alpha b}] = -\nu I^2 J_{\alpha a} [\rho(x)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Отметим, что последние два члена в $J_{\alpha a}$ исчезают на массовой поверхности свободных полей ρ_α^a . Точное классическое решение для $\chi^{\dot{\alpha}a}$ представляет собой сумму свободного правокирального фермиона $\chi_0^{\dot{\alpha}a}$ и неоднородного решения с вышеупомянутым нильпотентным спинорным источником:

$$\begin{aligned} \chi^{\dot{\alpha}a} = & \chi_0^{\dot{\alpha}a} + i\nu I^2 \int d^4 y \partial_x^{\alpha\dot{\alpha}} D^0(x-y) J_\alpha^a [\rho(y)], \\ \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \chi_0^{\dot{\alpha}a} = & 0, \quad \square_x D^0(x-y) = \delta^4(x-y). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Таким образом, рассматриваемая модель является точно решаемой на классическом уровне.

Ряд других нильпотентно деформированных q^+ -самодействий и взаимодействий гипермультиплета с аналитическим калибровочным суперполем V^{++} будет изучен в следующих работах.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье, следуя в основном работам [9]–[11], мы представили краткий обзор недавних результатов, касающихся нильпотентных неантикоммутирующих деформаций евклидова $N = (1, 1)$ суперпространства. Главное внимание было уделено структуре синглетной Q -деформации $N = (1, 1)$ калибровочных теорий. Эта деформация нарушает половину $N = (1, 1)$ суперсимметрии, но сохраняет симметрию относительно $O(4)$ - и $SU(2)$ -автоморфизмов, обе киральности и гармоническую грассманову аналитичность. Мы также рассмотрели простой новый пример деформированного гипермультиплетного действия с самодействием, исчезающим в антикоммутирующем пределе. Эта модель точно решается на классическом уровне.

Благодарности. Большая часть результатов, вошедших в обзорную часть этой статьи, получена в сотрудничестве с С. Феррарой, О. Лехтенфельдом и Э. Сокачевым. Мы выражаем им признательность. Эта работа была частично поддержана грантами ИНТАС № 00-00254, ННИО № 436 RUS 113/669-2, РФФИ № 03-02-17440, НАТО PST.GLG.980302 и грантом программы Гейзенберг–Ландау.

Список литературы

- [1] *N. Seiberg, E. Witten.* JHEP. 1999. V. 9909. P. 032; hep-th/9908142; *M. R. Douglas, N. A. Nekrasov.* Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 977; hep-th/0106048.
- [2] *S. Ferrara, M. A. Lledó.* JHEP. 2000. V. 0005. P. 008; hep-th/0002084; *D. Klemm, S. Penati, L. Tamassia.* Class. Q. Grav. 2003. V. 20. P. 2905; hep-th/0104190.
- [3] *I. L. Buchbinder, I. B. Samsonov.* Gravit. Cosmology. 2002. V. 8. P. 17; hep-th/0109130.
- [4] *A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Q. Grav. 1984. V. 1. P. 469.
- [5] *A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Harmonic superspace. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2001.
- [6] *N. Seiberg.* JHEP. 2003. V. 0306. P. 010; hep-th/0305248.
- [7] *L. Brink, J. H. Schwarz.* Phys. Lett. B. 1981. V. 100. P. 310; *H. Ooguri, C. Vafa.* Adv. Theor. Math. Phys. 2003. V. 7. P. 53; hep-th/0302109; 2003. V. 7. P. 405; hep-th/0303063; *N. Berkovits, N. Seiberg.* JHEP. 2003. V. 0307. P. 010; hep-th/0306226; *J. de Boer, P. A. Grassi, P. van Nieuwenhuizen.* Phys. Lett. B. 2003. V. 574. P. 98; hep-th/0302078.
- [8] *S. Ferrara, M. A. Lledó, O. Maciá.* JHEP. 2003. V. 0309. P. 068; hep-th/0307039.
- [9] *E. Ivanov, O. Lechtenfeld, B. Zupnik.* JHEP. 2004. V. 0402. P. 012; hep-th/0308012.
- [10] *S. Ferrara, E. Sokatchev.* Phys. Lett. B. 2004. V. 579. P. 226; hep-th/0308021.
- [11] *S. Ferrara, E. Ivanov, O. Lechtenfeld, E. Sokatchev, B. Zupnik.* Nucl. Phys. B. 2005. V. 704. P. 154; hep-th/0405049.
- [12] *T. Araki, K. Ito, A. Ohtsuka.* JHEP. 2004. V. 0401. P. 046; hep-th/0401012.
- [13] *T. Araki, K. Ito.* Phys. Lett. B. 2004. V. 595. P. 513; hep-th/0404250.
- [14] *B. Zumino.* Phys. Lett. B. 1977. V. 69. P. 369.
- [15] *Yu. I. Manin.* Gauge field theory and complex geometry. Berlin: Springer, 1987.
- [16] *S. Ketov, S. Sasaki.* Phys. Lett. B. 2004. V. 595. P. 530; hep-th/0404119.
- [17] *B. M. Zupnik.* Phys. Lett. B. 1987. V. 183. P. 175.
- [18] *Ch. Devchand, V. Ogievetsky.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 414. P. 763; hep-th/9306163; *Б. М. Зупник.* ТМФ. 2002. Т. 130. С. 251; hep-th/0107012.