Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. П. Кулиш, А. М. Цейтлин, Квантовый метод обратной задачи и (супер)конформная теория поля, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 252–264

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:16:29

© 2005 г.

П. П. Кулиш*, А. М. Цейтлин†

КВАНТОВЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И (СУПЕР)КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Рассматривается возможность применения квантового метода обратной задачи к изучению суперконформной теории поля и ее интегрируемых возмущений. Классический предел рассматриваемых конструкций базируется на $\widehat{osp}(1|2)$ иерархии суперсимметричного уравнения Кортевега–де Фриза. Предъявлен квантовый аналог матрицы монодромии, соответствующей линейной задаче L -оператора. На основании явного вида неприводимых представлений $\widehat{osp}_q(1|2)$ получены “правила слияния” для трансфер-матриц (следов соответствующих матриц монодромии в различных представлениях).

Ключевые слова: суперконформная теория поля, суперсимметричное уравнение Кортевега–де Фриза.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Квантовый метод обратной задачи. Квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) появился в работах Ленинградской школы математической физики в конце 70-х годов [1]. Он возник в результате синтеза двух подходов к теории интегрируемых систем. Первый подход, так называемый метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), был открыт в 1967 г. [2], но имеет более глубокие корни в работах по классической механике XIX века, а второй подход до конца 70-х годов применялся к задачам статистической физики на решетке и квантовой механики [3]. МОЗР дал возможность находить целые классы (иерархии) интегрируемых двумерных нелинейных эволюционных уравнений и получать их решения. В дальнейшем в течение нескольких лет после открытия МОЗР была понята алгебраическая структура метода [4] и получена гамильтонова интерпретация [5]. Оказалось, что гамильтоновы системы, соответствующие этим уравнениям, вполне интегрируемы и обладают бесконечным числом законов сохранения. Алгебраическая структура МОЗР дает возможность рассматривать исследуемое

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: kulish@pdmi.ras.ru

†Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: zam@math.ipme.ru

нелинейное уравнение как условие совместности системы линейных уравнений

$$\partial_x \Psi = U(x, t, \lambda) \Psi, \quad (1)$$

$$\partial_t \Psi = V(x, t, \lambda) \Psi, \quad (2)$$

записанное в форме так называемого условия нулевой кривизны [6]:

$$\partial_x V - \partial_t U + [V, U] = 0, \quad (3)$$

где функции U и V принимают значения в некотором представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Гамильтонова интерпретация [5] позволила рассматривать преобразование данных рассеяния линейной задачи (1) как переход к переменным типа “действие–угол”, в терминах которых задача сводится к линейным уравнениям. Это преобразование вместе со своим обратным дает решение задачи Коши для данного уравнения. Соответствующее бесконечное семейство интегралов движения (ИД) можно получить из разложения по спектральному параметру следа матрицы монодромии уравнения (1). Скобки Пуассона для элементов матрицы монодромии $T(\lambda)$ при различных значениях спектрального параметра часто удается представить в следующей форме:

$$\{T(\lambda) \otimes, T(\mu)\} = [r(\lambda\mu^{-1}), T(\lambda) \otimes T(\mu)], \quad (4)$$

где r – классическая r -матрица [6]. Отсюда легко вывести, что $\{t(\lambda), t(\mu)\} = 0$, где $t(\lambda) = \text{tr } T(\lambda)$, откуда вытекает условие интегрируемости, т.е. наличие инволютивных ИД. При квантовании условие (4) переходит в RTT -соотношение

$$R(\lambda\mu^{-1})(T^{(q)}(\lambda) \otimes I)(I \otimes T^{(q)}(\mu)) = (I \otimes T^{(q)}(\mu))(T^{(q)}(\lambda) \otimes I)R(\lambda\mu^{-1}), \quad (5)$$

где R – квантовая R -матрица [7], [8]. Как и на классическом уровне, отсюда легко получить, что $[t^{(q)}(\lambda), t^{(q)}(\mu)] = 0$, что влечет наличие взаимно коммутирующих операторов, т.е. квантовую интегрируемость. Соотношение (5) является отправной точкой уже упоминавшегося второго подхода в теории интегрируемых систем. Используя RTT -соотношение, с помощью различных методов, например алгебраического анзаца Бете, можно найти спектр трансфер-матрицы $t^{(q)}(\lambda)$ и различные корреляторы. Для того чтобы получить соотношение (5) для двумерных интегрируемых систем теории поля, часто приходится рассматривать их на решетке. Но для определенного класса систем, например тех, которые задаются уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ), оказывается возможным вывести RTT -соотношение и получить явный вид матрицы монодромии, используя непрерывную теорию поля [9]–[11]. Уравнение КдФ также допускает квантование иным способом – с помощью бозон-фермионного соответствия [12]. В данной работе мы расширим этот класс, включив туда суперсимметричный аналог уравнения КдФ [13], а также укажем на особенности, возникающие при квантовании в терминах непрерывных полей суперсимметричных иерархий КдФ. Предварительная версия данной работы была опубликована в заметке [14].

1.2. (Супер)конформная теория поля, ее возмущения и квантовый метод обратной задачи. В 1970 г. была высказана гипотеза [15] о том, что теория поля, отвечающая неподвижной (критической) точке ренормгруппы, обладает не только масштабной, но и конформной инвариантностью. В двух измерениях благодаря тому, что конформная $2d$ -симметрия бесконечномерна и связана с алгеброй Вирасоро

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n,-m}, \quad (6)$$

оказывается возможным классифицировать все поля в теории и вычислять корреляционные функции.

Возмущения, как правило, разрушают конформную симметрию и выводят систему из критической точки. Однако специального вида возмущения, которые называют “интегрируемыми” [16], сохраняют абелеву алгебру ИД и, таким образом, приводят к интегрируемой теории.

В статьях [9]–[11] было показано, что в этом случае задача может быть решена с помощью КМОЗ в терминах непрерывных полей. Было предложено следующее: сначала использовать конформную симметрию, для того чтобы построить базовые структуры КМОЗ в критической точке, а затем с помощью КМОЗ изучать возмущенную теорию. Объектом нашего исследования является модель, базирующаяся на суперсимметричном обобщении конформной симметрии (суперконформной симметрии) [17], [18]. Мы используем свойства суперконформной симметрии, чтобы построить квантовую матрицу монодромии, RTT -соотношение и правила слияния для трансфер-матриц в различных представлениях.

В качестве классического предела данной квантовой модели рассматривается теория $\widehat{osp}(1|2)$ суперсимметричного уравнения КдФ (супер-КдФ) [13]. Предъявлены два эквивалентных L -оператора, соответствующих редукции Дринфельда–Соколова аффинной супералгебры $\widehat{osp}(1|2)$, преобразование Миуры и скобки Пуассона. Кроме того, построена матрица монодромии, суперслед которой содержит как локальные, так и нелокальные ИД, находящиеся в инволюции относительно скобок Пуассона. Далее, на основании матрицы монодромии введена вспомогательная матрица $L(\lambda)$, скобки Пуассона которой при различных значениях спектрального параметра имеют вид (4).

После этих необходимых приготовлений мы переходим к квантовой теории (раздел 3). Мы предъявляем квантовую версию преобразования Миуры (представление в терминах свободных полей суперконформной алгебры [17], [18]) и вводим вершинные операторы, необходимые для построения квантовой матрицы монодромии.

В квантовом случае алгебраическая структура матрицы монодромии задается аффинной супералгеброй $\widehat{osp}_q(1|2)$. Ее представления построены в разделе 4. После этого мы вводим квантовый аналог вспомогательной L -матрицы. Оказывается, что в квантовом случае (по сравнению с классическим) отсутствует один член в R -экспоненте, которая, в свою очередь, присутствует как в матрице монодромии, так и во вспомогательной матрице. Квантовые L -матрицы удовлетворяют RTT -соотношению, тем самым обеспечивая интегрируемость в квантовом случае. Рассматривая матрицу монодромии в различных представлениях алгебры $\widehat{osp}_q(1|2)$, мы получаем функциональные

соотношения (правила слияния) для ее суперследов (трансфер-матриц). В тех случаях, когда параметр деформации рационален (этот случай соответствует минимальным моделям (супер)конформной теории поля), правила слияния становятся замкнутой системой уравнений, которая, если следовать гипотезе из [9], может быть использована для нахождения полного набора собственных значений трансфер-матриц. Кроме того, мы предполагаем, что уравнения данной системы могут быть преобразованы в уравнения термодинамического анзаца Бете [19].

2. ОБЗОР КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ СУПЕР-КдФ

В работах [9]–[11] было рассмотрено квантование иерархий КдФ Дринфельда–Соколова, связанных с алгебрами Ли $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ и $A_2^{(1)}$. Наша квантовая модель в классическом пределе сводится к иерархии супер-КдФ [13], связанной с аффинной супералгеброй $\widehat{osp}(1|2)$. Суперматричный L -оператор, соответствующий теории супер-КдФ, имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_F = D_{u,\theta} - D_{u,\theta} \Psi h - (iv_+ \sqrt{\lambda} - \theta \lambda X_-), \quad (7)$$

где $D_{u,\theta} = \partial_\theta + \theta \partial_u$ – суперпроизводная, переменная u лежит на цилиндре с окружностью 2π , θ – грасманово число, $\Psi(u, \theta) = \phi(u) - i\theta \xi(u)/\sqrt{2}$ – бозонное суперполе; h, v_+, v_-, X_-, X_+ – генераторы супералгебры $osp(1|2)$ (см. [20]):

$$\begin{aligned} [h, X_\pm] &= \pm 2X_\pm, & [h, v_\pm] &= \pm v_\pm, & [X_+, X_-] &= h, \\ [v_\pm, v_\pm] &= \pm 2X_\pm, & [v_+, v_-] &= -h, & [X_\pm, v_\mp] &= v_\pm, & [X_\pm, v_\pm] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $[\cdot, \cdot]$ означает суперкоммутатор, $[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}ba$, где четность p определяется следующим образом: $p(v_\pm) = 1$, $p(X_\pm) = 0$, $p(h) = 0$. Если рассматривать фермионный оператор $\mathcal{L}_F$ вместе с соответствующей линейной задачей $\mathcal{L}_F \chi(u, \theta) = 0$, то легко увидеть, что он эквивалентен бозонному оператору

$$\mathcal{L}_B = \partial_u - \phi'(u)h - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \xi(u)v_+ - \lambda(X_+ + X_-). \quad (9)$$

Поля ϕ, ξ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\phi(u + 2\pi) = \phi(u) + 2\pi i p, \quad \xi(u + 2\pi) = \pm \xi(u), \quad (10)$$

где знак “+” соответствует так называемому сектору Рамона (Р-сектору) модели, а знак “–” – сектору Невье–Шварца (НШ-сектору). Скобки Пуассона для полей ξ и ϕ имеют вид

$$\{\xi(u), \xi(v)\} = -2\delta(u - v), \quad \{\phi(u), \phi(v)\} = \frac{1}{2}\epsilon(u - v). \quad (11)$$

L -операторы (7), (9) записаны в форме Миуры и соответствуют модифицированному уравнению супер-КдФ. Совершая калибровочное преобразование, чтобы перейти к

L -оператору обычного уравнения супер-КдФ, мы получаем два новых поля (преобразование Миуры):

$$\begin{aligned} U(u) &= -\phi''(u) - \phi'^2(u) - \frac{1}{2}\xi(u)\xi'(u), \\ \alpha(u) &= \xi'(u) + \xi(u)\phi'(u), \end{aligned} \quad (12)$$

которые образуют суперконформную алгебру относительно скобок Пуассона:

$$\begin{aligned} \{U(u), U(v)\} &= \delta'''(u-v) + 2U'(u)\delta(u-v) + 4U(u)\delta'(u-v), \\ \{U(u), \alpha(v)\} &= 3\alpha(u)\delta'(u-v) + \alpha'(u)\delta(u-v), \\ \{\alpha(u), \alpha(v)\} &= 2\delta''(u-v) + 2U(u)\delta(u-v). \end{aligned} \quad (13)$$

Эти скобки задают вторую гамильтонову структуру иерархии супер-КдФ. Можно получить интегрируемое эволюционное уравнение, если использовать один из локальных ИД как гамильтониан из соответствующего иерархии бесконечного семейства. ИД можно получить из разложения по λ суперследа матрицы монодромии (см. ниже):

$$\begin{aligned} I_1^{(\text{cl})} &= \int U(u) du, \\ I_3^{(\text{cl})} &= \int \left(\frac{U^2(u)}{2} + \alpha(u)\alpha'(u) \right) du, \\ I_5^{(\text{cl})} &= \int ((U')^2(u) - 2U^3(u) + 8\alpha'(u)\alpha''(u) + 12\alpha'(u)\alpha(u)U(u)) du, \quad \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Они находятся в инволюции относительно скобок Пуассона:

$$\{I_{2k-1}^{(\text{cl})}, I_{2l-1}^{(\text{cl})}\} = 0.$$

Используя $I_3^{(\text{cl})}$ в качестве гамильтониана, мы получаем уравнение супер-КдФ [13]:

$$\begin{aligned} U_t &= -U_{uuu} - 6UU_u - 6\alpha\alpha_{uu}, \\ \alpha_t &= -4\alpha_{uuu} - 6U\alpha_u - 3U_u\alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь рассмотрим “бозонную” линейную задачу $\pi_s(\mathcal{L}_B)\chi(u) = 0$, где под π_s мы подразумеваем неприводимое представление $osp(1|2)$ размерности $2s + 1$, нумеруемое целым индексом $s \geq 0$ [20]. Можно записать решение этой задачи следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi(u) &= \pi_s \left(e^{\phi(u)h} \text{Рexp} \int_0^u du' \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \xi(u') v_+ e^{-\phi(u')} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda (X_+ e^{-2\phi(u')} + X_- e^{2\phi(u')}) \right) \right) \chi_0, \end{aligned}$$

где Рexp означает P -упорядоченную экспоненту, $\chi_0 \in \mathbb{C}^{2s+1}$ — постоянный вектор. Это выражение можно переписать в более общем виде:

$$\chi(u) = \pi_s(\lambda) \left(e^{-\phi(u)h\alpha_0} \text{Рexp} \int_0^u du' (\xi(u') e^{-\phi(u')} e_\alpha + e^{-2\phi(u')} 2e_\alpha^2 + e^{2\phi(u')} e_{\alpha_0}) \right) \chi_0,$$

где $e_\alpha, e_{\alpha_0}, h_{\alpha_0}$ являются генераторами Шевалле алгебры $\widehat{osp}(1|2)$ (см. [21]), которые в представлениях $\pi_s(\lambda)$ совпадают с $\sqrt{\lambda/2}v_+, \lambda X_-, -h$, соответственно. Матрица монодромии этого решения имеет вид

$$\mathbf{M}_s(\lambda) = \pi_s \left(e^{-2\pi i p h_{\alpha_0}} \text{Pexp} \int_0^{2\pi} du' (\xi(u') e^{-\phi(u')} e_\alpha + e^{-2\phi(u')} 2e_\alpha^2 + e^{2\phi(u')} e_{\alpha_0}) \right).$$

Следуя [9]–[11], введем вспомогательные матрицы

$$\pi_s(\lambda)(\mathbf{L}) = \mathbf{L}_s(\lambda) = \pi_s(\lambda)(e^{\pi i p h_{\alpha_0}}) \mathbf{M}_s(\lambda), \quad (16)$$

скобки Пуассона которых совпадают по форме с (4):

$$\{\mathbf{L}_s(\lambda) \otimes, \mathbf{L}_{s'}(\mu)\} = [\mathbf{r}_{ss'}(\lambda\mu^{-1}), \mathbf{L}_s(\lambda) \otimes \mathbf{L}_{s'}(\mu)], \quad (17)$$

где $\mathbf{r}_{ss'}(\lambda\mu^{-1}) = \pi_s(\lambda) \otimes \pi_{s'}(\mu)(\mathbf{r})$ – классическая тригонометрическая $\widehat{osp}(1|2)$ r -матрица [22]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\lambda\mu^{-1}) = & \frac{1}{2} \frac{\lambda\mu^{-1} + \lambda^{-1}\mu}{\lambda\mu^{-1} - \lambda^{-1}\mu} h \otimes h + \frac{2}{\lambda\mu^{-1} - \lambda^{-1}\mu} (X_+ \otimes X_- + X_- \otimes X_+) + \\ & + \frac{1}{(\lambda\mu^{-1} - \lambda^{-1}\mu)} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} v_+ \otimes v_- - \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} v_- \otimes v_+ \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Из скобок Пуассона $\mathbf{L}_s(\lambda)$ -матриц легко вывести, что следы матриц монодромии в соответствующих представлениях находятся в инволюции: $\{\mathbf{t}_s(\lambda), \mathbf{t}_{s'}(\mu)\} = 0$. Как мы отмечали ранее, коэффициентами в разложении $\ln(\mathbf{t}_1(\lambda))$ по степеням λ^{-1} являются локальные ИД.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУПЕРКОНФОРМНОЙ АЛГЕБРЫ В ТЕРМИНАХ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ. ВЕРШИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Чтобы ввести квантовые аналоги таких классических объектов, как матрица монодромии, нам понадобится квантовая версия преобразования Миуры (12) – так называемое представление суперконформной алгебры в терминах свободных полей [17]:

$$\begin{aligned} -\beta^2 T(u) = & :\phi'^2(u): + \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \phi''(u) + \frac{1}{2} :\xi \xi'(u): + \frac{\epsilon \beta^2}{16}, \\ \frac{i^{1/2} \beta^2}{\sqrt{2}} G(u) = & \phi' \xi(u) + \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \xi'(u), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \phi(u) = & iQ + iP u + \sum_n \frac{a_{-n}}{n} e^{inu}, \quad \xi(u) = i^{-1/2} \sum_n \xi_n e^{-inu}, \\ [Q, P] = & \frac{i}{2} \beta^2, \quad [a_n, a_m] = \frac{\beta^2}{2} n \delta_{n+m, 0}, \quad \{\xi_n, \xi_m\} = \beta^2 \delta_{n+m, 0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Параметр β^2 играет роль квазиклассического параметра (постоянной Планка). Вспомним, что мы ввели два типа граничных условий на ξ : $\xi(u + 2\pi) = \pm \xi(u)$. Знак “+” соответствует Р-сектору, и в этом случае ξ содержит только целые моды, знак “−” соответствует НШ-сектору, и ξ содержит только полуцелые моды. Переменная ϵ в формуле (19) равна нулю в Р-секторе и равна единице в НШ-секторе.

Можно разложить $T(u)$ и $G(u)$ по модам следующим образом:

$$T(u) = \sum_n L_{-n} e^{inu} - \frac{\hat{c}}{16}, \quad G(u) = \sum_n G_{-n} e^{inu}, \quad (21)$$

где $\hat{c} = 5 - 2(\beta^2/2 + 2/\beta^2)$ – центральный заряд, L_n, G_m порождают суперконформную алгебру:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{\hat{c}}{8}(n^3 - n)\delta_{n,-m}, \\ [L_n, G_m] &= \left(\frac{n}{2} - m\right)G_{m+n}, \\ [G_n, G_m] &= 2L_{n+m} + \delta_{n,-m}\frac{\hat{c}}{2}\left(n^2 - \frac{1}{4}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

В классическом пределе $\hat{c} \rightarrow -\infty$ (т.е. $\beta^2 \rightarrow 0$) замена

$$T(u) \rightarrow -\frac{\hat{c}}{4}U(u), \quad G(u) \rightarrow -\frac{\hat{c}}{2\sqrt{2}i}\alpha(u), \quad [\cdot, \cdot] \rightarrow \frac{4\pi}{i\hat{c}}\{\cdot, \cdot\}$$

приводит к алгебре скобок Пуассона теории супер-КДФ.

Пусть F_p есть фоковское представление с вакуумом $|p\rangle$. Вектор $|p\rangle$ (вектор старшего веса) задается значением оператора P на нем и условием нильпотентности положительных мод:

$$P|p\rangle = p|p\rangle, \quad a_n|p\rangle = 0, \quad \xi_m|p\rangle = 0, \quad n, m > 0. \quad (23)$$

В случае Р-сектора старший вектор является дважды вырожденным из-за наличия нулевой моды ξ_0 , т.е. имеется два основных состояния $|p, +\rangle$ и $|p, -\rangle$ таких, что $|p, +\rangle = \xi_0|p, -\rangle$. Используя приведенное выше представление (19) суперконформной алгебры в терминах свободных полей, можно показать, что для всех допустимых $\hat{c}$ и p представление F_p в НШ-секторе изоморфно модулю суперконформной алгебры со старшим вектором $|p\rangle$:

$$L_0|p\rangle = \Delta_{\text{НШ}}|p\rangle, \quad \Delta_{\text{НШ}} = \left(\frac{p}{\beta}\right)^2 + \frac{\hat{c} - 1}{16}, \quad (24)$$

а в Р-секторе – модулю с двумя старшими векторами:

$$\begin{aligned} L_0|p, \pm\rangle &= \Delta_{\text{Р}}|p, \pm\rangle, \quad \Delta_{\text{Р}} = \left(\frac{p}{\beta}\right)^2 + \frac{\hat{c}}{16}, \\ |p, +\rangle &= \frac{\beta^2}{\sqrt{2}p}G_0|p, -\rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

Пространство F_p , рассматриваемое как представление суперконформной алгебры, разбивается в сумму конечномерных подпространств, определяемых значением L_0 :

$$F_p = \bigoplus_{k=0}^{\infty} F_p^{(k)}, \quad L_0 F_p^{(k)} = (\Delta + k) F_p^{(k)}. \quad (26)$$

Квантовые аналоги локальных интегралов движения должны действовать инвариантно на подпространствах $F_p^{(k)}$. Таким образом, проблема диагонализации ИД в бесконечномерном пространстве F_p сводится к конечномерной в каждом из подпространств $F_p^{(k)}$, которая, однако, становится достаточно сложной для больших k . Стоит обратить внимание на то обстоятельство, что в случае Р-сектора G_0 не коммутирует с ИД, т.е. ИД смешивают состояния $|p, +\rangle$ и $|p, -\rangle$.

В конце этого раздела мы введем еще один полезный объект – вершинный оператор. Нам понадобится два типа этих операторов, “бозонные” и “фермионные”:

$$V_B^{(a)} = \int d\theta \theta :e^{a\Psi}:, \quad V_F^{(b)} = \int d\theta :e^{b\Psi}:, \quad (27)$$

где $\Psi(u, \theta) = \phi(u) - i\theta\xi(u)/\sqrt{2}$ – суперполе, т.е.

$$V_B^{(a)} = :e^{a\phi}:, \quad V_F^{(b)} = -\frac{ib}{\sqrt{2}}\xi:e^{b\phi}:. \quad (28)$$

Нормальное упорядочение здесь означает следующее:

$$:e^{c\phi(u)}: = \exp\left(c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} e^{inu}\right) \exp(ci(Q + Pu)) \exp\left(-c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{-inu}\right). \quad (29)$$

4. КВАНТОВАЯ МАТРИЦА МОНОДРОМИИ И СООТНОШЕНИЯ СЛИЯНИЯ

В этом разделе мы построим квантовые аналоги матрицы монодромии, операторов $\mathbf{L}_s$ и $\mathbf{t}_s$.

Внутренняя алгебраическая структура классической матрицы монодромии базируется на аффинной алгебре $\widehat{osp}(1|2)$. В квантовом случае соответствующая алгебра есть $\widehat{osp}_q(1|2)$ [21], где $q = e^{i\pi\beta^2}$, а генераторы, отвечающие четному корню α_0 и нечетному корню α , подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [h_\gamma, h_{\gamma'}] &= 0 \quad (\gamma, \gamma' = \alpha, d, \alpha_0), \\ [e_\beta, e_{\beta'}] &= \delta_{\beta, -\beta'} [h_\beta] \quad (\beta = \alpha, \alpha_0), \\ [h_d, e_{\pm\alpha_0}] &= \pm e_{\pm\alpha_0}, \quad [h_d, e_{\pm\alpha}] = 0, \\ [h_{\alpha_0}, e_{\pm\alpha_0}] &= \pm 2e_{\pm\alpha_0}, \quad [h_{\alpha_0}, e_{\pm\alpha}] = \mp e_{\pm\alpha}, \\ [h_\alpha, e_{\pm\alpha}] &= \pm \frac{1}{2} e_{\pm\alpha}, \quad [h_\alpha, e_{\pm\alpha_0}] = \mp e_{\pm\alpha_0}, \\ [[e_{\pm\alpha}, e_{\pm\alpha_0}]_q, e_{\pm\alpha_0}]_q &= 0, \\ [e_{\pm\alpha}, [e_{\pm\alpha}, [e_{\pm\alpha}, [e_{\pm\alpha}, [e_{\pm\alpha}, e_{\pm\alpha_0}]_q]_q]_q]_q]_q &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где $[\cdot, \cdot]_q$ – суперсимметричный q -коммутатор, $[e_a, e_b]_q = e_a e_b - q^{(a,b)} (-1)^{p(a)p(b)} e_b e_a$, а четность p определяется таким образом: $p(h_{\alpha_0}) = 0$, $p(h_\alpha) = 0$, $p(e_{\pm\alpha_0}) = 0$, $p(e_{\pm\alpha}) = 1$. Кроме того, как обычно, $[h_\beta] = (q^{h_\beta} - q^{-h_\beta}) / (q - q^{-1})$. Конечномерные представления $\pi_s^{(q)}(\lambda)$ алгебры $\widehat{osp}_q(1|2)$ характеризуются целым числом s и имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} h_{\alpha_0}|j, m\rangle &= 2m|j, m\rangle, & e_{\alpha_0}|j, m\rangle &= \lambda\sqrt{[j-m][j+m+1]}|j, m+1\rangle, \\ e_{-\alpha_0}|j, m\rangle &= \lambda^{-1}\sqrt{[j+m][j-m+1]}|j, m-1\rangle, \\ e_\alpha|j, m\rangle &= \sqrt{\lambda}\left((-1)^{-2j}\sqrt{\alpha(j)[j-m+1]}|j+1/2, m-1/2\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\alpha(j-1/2)[j+m]}|j-1/2, m-1/2\rangle\right), \\ e_{-\alpha}|j, m\rangle &= (\sqrt{\lambda})^{-1}\left(-\sqrt{\alpha(j)[j+m+1]}|j+1/2, m+1/2\rangle - \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{2j}\sqrt{\alpha(j-1/2)[j-m]}|j-1/2, m+1/2\rangle\right), \\ h_{\alpha_0} &= -2h_\alpha, & h_d &= \frac{1}{2}\lambda\frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{4}h_{\alpha_0}, \end{aligned} \quad (31)$$

где $j = 0, 1/2, \dots, s/2$, $m = -j, -j+1, \dots, j$. Нормировочные коэффициенты

$$\alpha(j) = \frac{[j+1][j+1/2][1/4]}{[2j+2][2j+1][1/2]}\left((-1)^{s-2j+1}\frac{[s+3/2]}{[s/2+3/4]} + \frac{[j+3/2]}{[j/2+3/4]}\right)$$

определяются рекуррентным соотношением

$$\alpha(j)\frac{[2j+2]}{[j+1]} + \alpha\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{[2j]}{[j]} = 1, \quad \alpha\left(\frac{s}{2}\right) = 0. \quad (32)$$

Нетрудно заметить, что в классическом пределе $q \rightarrow 1$, если $k < s/2$ – неотрицательное целое число, то $\alpha(s/2 - k) = 0$, а если $k < s/2$ – неотрицательное полуцелое число, то $\alpha(s/2 - k) = 1/2$. Используя этот факт, можно получить, что в классическом пределе данное представление разлагается в сумму конечномерных неприводимых представлений $\widehat{osp}(1|2)$:

$$\pi_s^{(1)}(\lambda) = \bigoplus_{k=0}^{[s/2]} \pi_{s-2k}(\lambda). \quad (33)$$

В этой сумме индекс k принимает только целые значения. Стоит обратить внимание на то, что структура представлений $\widehat{osp}_q(1|2)$ очень похожа на структуру представлений $(A_2^{(2)})_q$ [11]. Этот факт является следствием совпадения их матриц Картана.

После этих приготовлений введем квантовый аналог $\mathbf{L}_s$ -операторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_s^{(q)} &= \pi_s^{(q)}(\lambda)(\mathbf{L}^{(q)}) = \\ &= \pi_s^{(q)}\left(e^{-i\pi P h_{\alpha_0}} \text{Pexp}\left(\int_0^{2\pi} (:e^{2\phi(u)}: e_{\alpha_0} + \xi(u):e^{-\phi(u)}: e_\alpha) du\right)\right). \end{aligned}$$

Мы видим, что один член в Р-экспоненте отсутствует по сравнению с классическим вариантом (16). Исчезновение членов, отвечающих составным корням, имеет место и для обобщенных суперсимметричных иерархий КдФ (мы вернемся к этому в отдельной работе).

Анализируя сингулярности подынтегрального выражения в Р-экспоненте оператора $\mathbf{L}_s^{(q)}(\lambda)$, легко видеть, что интегралы сходятся для значений $\hat{c}$ в интервале $(-\infty, 0)$. С помощью регуляризации Р-экспонента может быть продолжена на более широкий интервал значений $\hat{c}$.

Теперь докажем, что в классическом пределе оператор $\mathbf{L}^{(q)}$ совпадает с $\mathbf{L}$. Сначала исследуем произведения операторов, присутствующих в Р-экспоненте. Произведение двух фермионных операторов может быть записано следующим образом:

$$\xi(u)\xi(u') = :\xi(u)\xi(u'): - i\beta^2 \frac{e^{-\kappa i(u-u')/2}}{e^{i(u-u')/2} - e^{-i(u-u')/2}}, \quad (34)$$

где $\kappa = 0$ в НШ-секторе и $\kappa = 1$ в Р-секторе. Для вершинных операторов соответствующее произведение выглядит следующим образом:

$$:e^{a\phi(u)}: :e^{b\phi(u')}: = (e^{i(u-u')/2} - e^{-i(u-u')/2})^{ab\beta^2/2} :e^{a\phi(u)+b\phi(u')}:, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} :e^{a\phi(u)+b\phi(u')}: &= \exp\left(a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a-n}{n} e^{inu} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a-n}{n} e^{inu'}\right) \times \\ &\times \exp(ai(Q + Pu) + bi(Q + Pu')) \exp\left(-a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{-inu} - b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{-inu'}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Полезно переписать эти произведения, выделяя сингулярную часть:

$$\xi(u)\xi(u') = -\frac{i\beta^2}{iu - iu'} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(u)(iu - iu')^k, \quad (37)$$

$$:e^{a\phi(u)}: :e^{b\phi(u')}: = (iu - iu')^{ab\beta^2/2} \left(:e^{(a+b)\phi(u)}: + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(u)(iu - iu')^k \right), \quad (38)$$

где $c_k(u)$ и $d_k(u)$ — операторнозначные функции u . Теперь вернемся к оператору $\mathbf{L}^{(q)}(\lambda)$, который можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{L}^{(q)} = e^{-i\pi Ph_{\alpha_0}} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^N \tau_m^{(q)}, \quad (39)$$

где

$$\tau_m^{(q)} = \text{Pexp} \int_{x_{m-1}}^{x_m} K(u) du, \quad K(u) \equiv :e^{2\phi(u)}: e_{\alpha_0} + \xi(u) :e^{-\phi(u)}: e_{\alpha}.$$

Здесь мы разделили интервал $[0, 2\pi]$ на инфинитезимальные интервалы $[x_m, x_{m+1}]$, так что $x_{m+1} - x_m = \Delta = 2\pi/N$. Рассмотрим поведение двух первых итераций в $\tau_m^{(q)}$ в пределе $\beta^2 \rightarrow 0$:

$$\tau_m^{(q)} = 1 + \int_{x_{m-1}}^{x_m} K(u) du + \int_{x_{m-1}}^{x_m} K(u) du \int_{x_{m-1}}^u K(u') du' + O(\Delta^2). \quad (40)$$

Оказывается, что в пределе $\beta^2 \rightarrow 0$ некоторые члены второй итерации могут дать вклад в первую. Чтобы увидеть это, рассмотрим следующее выражение, содержащееся во второй итерации:

$$- \int_{x_{m-1}}^{x_m} du \xi(u) \int_{x_{m-1}}^u du' \xi(u') :e^{-\phi(u)}: :e^{-\phi(u')} : e_\alpha^2. \quad (41)$$

Используя вышеуказанные операторные разложения и находя выражения порядка $\Delta^{1+\beta^2}$ (только они могут дать дополнительные члены в первой итерации в пределе $\beta^2 \rightarrow 0$), мы находим, что вклад этих выражений имеет вид

$$\begin{aligned} i\beta^2 \int_{x_{m-1}}^{x_m} du \int_{x_{m-1}}^u du' (iu - iu')^{\beta^2/2-1} :e^{-2\phi(u)}: e_\alpha^2 = \\ = 2 \int_{x_{m-1}}^{x_m} du :e^{-2\phi(u)}: (iu - ix_{m-1})^{\beta^2/2} e_\alpha^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Рассматривая классический предел, находим показатель Р-экспоненты в $\mathbf{L}$:

$$\tau_m^{(1)} = 1 + \int_{x_{m-1}}^{x_m} du (\xi(u)e^{-\phi(u)}e_\alpha + e^{2\phi(u)}e_{\alpha_0} + e^{-2\phi(u)}2e_\alpha^2) + O(\Delta^2). \quad (43)$$

Подставляя $\tau_m^{(1)}$ в (39), мы выводим желаемый результат:

$$\mathbf{L}^{(1)} = \mathbf{L}. \quad (44)$$

Вспоминая, как выглядят представления $\widehat{osp}_q(1|2)$, получаем

$$\mathbf{L}_s^{(1)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{[s/2]} \mathbf{L}_{s-2k}(\lambda). \quad (45)$$

Из свойств квантовой R -матрицы [7] следует, что $\mathbf{R}\Delta(\mathbf{L}^{(q)}) = \Delta^{\text{op}}(\mathbf{L}^{(q)})\mathbf{R}$, где Δ и Δ^{op} – копроизведение и противоположное копроизведение алгебры $\widehat{osp}_q(1|2)$ [21], соответственно. Факторизуя $\Delta(\mathbf{L}^{(q)})$ и $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{L}^{(q)})$ в соответствии со свойствами вершинных операторов и Р-экспонент, мы получаем RTT -соотношение [7], [8]:

$$\mathbf{R}_{ss'}(\lambda\mu^{-1})(\mathbf{L}_s^{(q)}(\lambda) \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{L}_{s'}^{(q)}(\mu)) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{L}_{s'}^{(q)}(\mu))(\mathbf{L}_s^{(q)}(\lambda) \otimes \mathbf{I})\mathbf{R}_{ss'}(\lambda\mu^{-1}), \quad (46)$$

где $\mathbf{R}_{ss'}$ – тригонометрическое решение соответствующего уравнения Янга–Бакстера [22], которое действует в пространстве $\pi_s(\lambda) \otimes \pi_{s'}(\mu)$. Определим теперь трансфер-матрицы, которые являются квантовыми аналогами следов матриц монодромии:

$$\mathbf{t}_s^{(q)}(\lambda) = \text{str } \pi_s(\lambda)(e^{-i\pi P h_{\alpha_0}} \mathbf{L}_s^{(q)}). \quad (47)$$

В соответствии с RTT -соотношением мы получаем, что

$$[\mathbf{t}_s^{(q)}(\lambda), \mathbf{t}_{s'}^{(q)}(\mu)] = 0. \quad (48)$$

Для первого нетривиального представления ($s=1$) несложно вывести явный вид трансфер-матрицы $\mathbf{t}_1^{(q)}(\lambda) \equiv \mathbf{t}^{(q)}(\lambda)$:

$$\mathbf{t}^{(q)}(\lambda) = 1 - 2 \cos(2\pi i P) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{2n} Q_n, \quad (49)$$

где Q_n – нелокальные законы сохранения. Согласно (48) трансфер-матрица $\mathbf{t}^{(q)}(\lambda)$ является производящей функцией для инволютивного семейства нелокальных ИД: $[Q_n, Q_m] = 0$. Мы также предполагаем, что, как и в классическом случае, $\mathbf{t}^{(q)}(\lambda)$ генерирует локальные ИД. Вновь используя (48) и разлагая $\ln(\mathbf{t}^{(q)}(\lambda))$ по степеням λ , мы получаем

$$[Q_n, I_{2k-1}^{(q)}] = 0, \quad [I_{2l-1}^{(q)}, I_{2k-1}^{(q)}] = 0. \quad (50)$$

Первые порядки разложения $\mathbf{t}_s^{(q)}(\lambda)$ по степеням λ^2 дают возможность вывести следующее соотношение слияния:

$$\mathbf{t}_s^{(q)}(q^{1/4}\lambda) \mathbf{t}_s^{(q)}(q^{-1/4}\lambda) = \mathbf{t}_{s+1}^{(q)}(q^{1/(2\beta^2)}\lambda) \mathbf{t}_{s-1}^{(q)}(q^{1/(2\beta^2)}\lambda) + \mathbf{t}_s^{(q)}(\lambda). \quad (51)$$

Этот результат напоминает соотношение слияния в случае $(A_2^{(2)})_q$ [11]. Такое соответствие не должно казаться удивительным, поскольку, как уже было отмечено, представления соответствующих алгебр очень похожи.

Новые результаты относительно квантования другого (супер)обобщения уравнения КдФ появились в работах [23]–[25].

Благодарности. Авторы признательны М. А. Семёнову-Тян-Шанскому, Ф. А. Смирнову, В. О. Тарасову и П. И. Этингофу за полезные обсуждения. Работа выполнялась при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00593), CRDF (грант ROMI-2622-ST-04) и фонда “Династия”.

Список литературы

- [1] *E. K. Sklyanin, L. A. Tzhatadzhyan, L. D. Faddeev.* ТМФ. 1979. Т. 40. С. 194; *P. P. Kulish, E. K. Sklyanin.* Phys. Lett. A. 1979. V. 70. P. 461.
- [2] *C. S. Gardner, J. M. Green, S. M. Kruskal, R. M. Miura.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095.
- [3] *H. Bethe.* Z. Phys. 1931. V. 71. P. 205; *P. Бэ́кстер.* Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [4] *P. D. Lax.* Commun. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467.
- [5] *B. E. Захаров, Л. Д. Фаддеев.* Функц. анализ и его прилож. 1968. Т. 5. С. 18.
- [6] *Л. А. Тзхатаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [7] *L. D. Faddeev.* How Bethe ansatz works for integrable models. In: Quantum Symmetries/Symétries Quantiques. Proc. of the Les Houches summer school, session LXIV (Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995). Eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin. Amsterdam: North-Holland, 1998. P. 149; hep-th/9605187.
- [8] *P. P. Kulish, E. K. Sklyanin.* Quantum spectral transform method. Recent developments. In: Integrable Quantum Fields Theories. Proc. of the Symp. (Tvaersminne, Finland, 23–27 March, 1981). Lecture Notes in Physics. V. 151. Eds. J. Hietarinta, C. Montonen. Berlin: Springer, 1982. P. 61.
- [9] *V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 381; hep-th/9412229.
- [10] *V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 247; hep-th/9604044; 1999. V. 200. P. 297; hep-th/9805008; *V. V. Bazhanov, A. N. Hibberd, S. M. Khoroshkin.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 622. P. 475.
- [11] *D. Fioravanti, F. Ravanini, M. Stanishkov.* Phys. Lett. B. 1996. V. 367. P. 113; hep-th/9510047.
- [12] *А. К. Погребков.* УМН. 2003. Т. 58. № 5. С. 164.
- [13] *B. A. Kupershmidt.* Phys. Lett. A. 1984. V. 102. P. 213; *П. П. Кулиш.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 142; *P. Mathieu.* Phys. Lett. B. 1989. V. 218. P. 185; *П. П. Кулиш, А. М. Цейтлин.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 2002. Т. 291. С. 185; hep-th/0312158.
- [14] *P. P. Kulish, A. M. Zeitlin.* Phys. Lett. B. 2004. V. 581. P. 125.
- [15] *А. М. Поляков.* Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 538.
- [16] *A. B. Zamolodchikov.* Integrable field theory from conformal field theory. In: Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics. Adv. Stud. Pure Math. V. 19. Eds. M. Jimbo, T. Miwa, A. Tsuchiya. Boston, MA: Acad. Press; Tokyo: Kinokuniya, 1989. P. 641.
- [17] *M. A. Bershadsky, V. G. Knizhnik, M. G. Teitelman.* Phys. Lett. B. 1985. V. 151. P. 31.
- [18] *F. Jimenez.* Phys. Lett. B. 1990. V. 252. P. 577.
- [19] *Al. B. Zamolodchikov.* Phys. Lett. B. 1991. V. 253. P. 391.
- [20] *M. Scheunert, W. Nahm, V. Rittenberg.* J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 155; *F. A. Berezin, V. N. Tolstoy.* Commun. Math. Phys. 1981. V. 78. P. 409.
- [21] *J. Lukierski, V. N. Tolstoy.* Cartan–Weyl basis for quantum affine superalgebra $\widehat{osp}_q(1|2)$. hep-th/9710030.
- [22] *P. P. Kulish, N. Manojlovic.* J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 676; nlin.SI/0204037.
- [23] *P. P. Kulish, A. M. Zeitlin.* Phys. Lett. B. 2004. V. 597. P. 229; hep-th/0407154.
- [24] *P. P. Kulish, A. M. Zeitlin.* Superconformal field theory and SUSY $N = 1$ KdV hierarchy. II. The Q -operator. Nucl. Phys. B. 2005 (in press); hep-th/0501019.
- [25] *A. M. Zeitlin.* Integrability of superconformal field theory and SUSY $N = 1$ KdV. In: String Theory: From Gauge Interactions to Cosmology. Proc. of Cargese Summer School 2004. NATO Science Series C, 2005 (in press); hep-th/0501150.