Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маршаков, Квазиклассическая геометрия и интегрируемость АдС/КТП-соответствия, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 265–283

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:08:13

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ АДС/КТП-СООТВЕТСТВИЯ

Обсуждается квазиклассическая геометрия и интегрируемые системы, связанные с дуальностью калибровочных теорий теории струн. Анализируются квазиклассические решения уравнений анзаца Бете, возникающие в контексте АДС/КТП-соответствия, путем их сравнения с уравнениями стационарной фазы для матричных интегралов. Демонстрируется, как лежащая в их основе геометрическая картина связана с интегрируемыми сигма-моделями дуальной теории струн, и исследуются некоторые тонкости этого соответствия.

Ключевые слова: струны, матричные модели, интегрируемые системы, анзац Бете, суперсимметричная теория Янга–Миллса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дуальность калибровочных полей и струн является хорошо известным явлением [1], основанным, в частности, на параллелях между мировыми листами струн и фейнмановскими диаграммами неабелевой калибровочной теории в режиме сильной связи. Хорошо известным примером такой дуальности является матрично-модельная формулировка двумерной квантовой гравитации и теории некритических струн в малых размерностях [2], [3].

Более сложный пример такой дуальности представляет собой так называемое АДС/КТП-соответствие – гипотетическая эквивалентность четырехмерной $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теории теории струн типа ПВ в десятимерном пространстве $AdS_5 \times S^5$. Среди других предсказаний гипотеза АДС/КТП-соответствия связывает размерности калибровочно-инвариантных операторов с энергиями конкретных состояний замкнутой струны, движущейся в десятимерном пространстве-времени $AdS_5 \times S^5$ [4]–[6].

Упомянутые аномальные размерности в суперсимметричной теории Янга–Миллса и соответствующие энергии струнных состояний представляют особый интерес, так

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: mars@lpi.ru, mars@itep.ru

как иногда могут быть вычислены как в рамках калибровочной теории, так и в теории струн, связанных друг с другом преобразованием дуальности, предлагая, таким образом, количественную проверку АдС/КТП-соответствия. В настоящий момент существует целый ряд подходов и методов подобного сравнения, а также обширная литература по этому поводу, но целью данной работы является обсуждение лишь одного конкретного способа исследования совпадений между струнными энергиями и аномальными размерностями операторов в калибровочной теории.

Предлагаемый метод основан на появлении интегрируемых систем как с одной, так и с другой стороны АдС/КТП-соответствия. В формализме калибровочной теории это *квантовые* интегрируемые модели, возникающие даже в рамках несуперсимметричной КХД и, в частности, отвечающие за диагонализацию матриц смешивания перенормируемых составных операторов [7], [8]. Наиболее простую форму [9] эта матрица приобретает для класса скалярных операторов, которые отсутствуют в несуперсимметричных теориях (класс операторов, непосредственно обобщающий широко известные операторы Беренштейна–Малдасены–Настасе (БМН) [10], см., например, работу [11], посвященную вычислению их перенормировки в рамках калибровочной теории). Будучи ограниченной на подкласс операторов, составленных из двух (среди трех возможных) голоморфных комплексных скаляров, матрица смешивания становится буквально эквивалентной гамильтониану спиновой цепочки Гейзенберга, которая была давно точно решена с помощью анзаца Бете [12], [13].

В теории струн имеется классически интегрируемая струнная сигма-модель, удовлетворяющая условиям Вирасоро на мировой поверхности (к сожалению, мало что известно о соответствующей квантовой теории, тем не менее см. работу [14]). Только в некотором очень специальном пределе “pp-волн” геометрии пространства $AdS_5 \times S^5$ теория Грина–Шварца на мировом листе струны может быть проквантована в калибровке светового конуса [15]. Однако такая формулировка использует пространство Фока двумерных *массивных* осцилляторов, что с трудом совмещается с двумерной конформной инвариантностью и, скорее, является некоторым технически удобным способом описать набор *квазиклассических* эффективных осцилляторных мод интегрируемой струнной модели (см. [16]).

На основе ряда достижений в вычислении конкретных примеров аномальных размерностей [17] и энергий классических струнных конфигураций [18], а также проведенного в работе [19] сопоставления старших интегралов движения интегрируемых иерархий для эллиптических решений в работе [20] был предложен общий подход сравнения калибровочных и струнных интегрируемых систем. К настоящему времени данный подход реально развит лишь для ограниченного класса скалярных операторов и соответствующих классических струнных траекторий на подмногообразии компактной сферы S^5 полного пространства $AdS_5 \times S^5$. Этот подход непосредственно связывает *квазиклассические* решения уравнений Бете, когда элементарные магнанные возбуждения образуют конденсаты или “бетевские струны”, с коллективными классическими конфигураци-

ми спиновых цепочек, которые в дальнейшем отождествляются с предельным случаем конечнозонных решений струнных сигма-моделей.

В данной работе предлагается обзор результатов работы [20], причем некоторые из них будут сформулированы в более общем и геометрически инвариантном виде. В качестве упрощенного примера квазиклассического решения уравнений анзаца Бете мы сначала обсудим более простые квазиклассические решения матричных моделей. После этого будет представлено сравнение калибровочной и струнной геометрических картин, на которых основано соответствие. Наконец, мы обсудим некоторые физические следствия полученных формул и существующие нерешенные задачи.

2. ДУАЛЬНОСТЬ И ГЕОМЕТРИЯ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

В отличие от многомерных теорий поля, в “нуль-мерных” калибровочных теориях (матричных моделях) перенормировка операторов отсутствует, и главной задачей в этих теориях является вычисление (обобщенной) статистической суммы – производящей функции для корреляторов¹⁾. Статистическая сумма матричной модели

$$Z = \int d\Phi e^{-\text{Tr } W(\Phi)/\hbar} = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N (dz_i e^{-W(z_i)/\hbar}) \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2 \quad (1)$$

с некоторым полиномиальным потенциалом

$$W(\Phi) = \sum_{k=1}^{L+1} t_k \Phi^k$$

связана со свободной энергией дуальной теории струн

$$\mathcal{F} = -\ln Z = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} \mathcal{F}_g \quad (2)$$

квазиклассическим разложением по $\hbar$, которое эквивалентно $(1/N)$ -разложению 'т Хофта, если зафиксировать произведение $\hbar N = t_0$. При этом квазиклассическое решение при $\hbar \rightarrow 0$, отвечающее планарному пределу $N \rightarrow \infty$ в диаграммной технике, когда все петли замкнутых струн или высшие топологии в разложении (2) подавлены, может быть найдено путем изучения экстремумов эффективного потенциала в формуле (1)

$$W'(z_j) = 2\hbar \sum_{k \neq j} \frac{1}{z_j - z_k}. \quad (3)$$

¹⁾Здесь и ниже мы в матричных теориях будем рассматривать только калибровочно-инвариантные операторы с единственным следом.

При $\hbar = 0$ взаимодействие выключено и все собственные значения z_j некоторым образом распределены по минимумам, в которых $W'(z) = 0$. Вводя при $N \rightarrow \infty$ плотность собственных значений

$$\rho(z) = \hbar \sum_{j=1}^N \delta(z - z_j), \quad \int_{\mathbf{C}} \rho(z) dz = \hbar N \equiv t_0, \quad (4)$$

или резольвенту, определенную на двойном накрытии z -плоскости, разрезанной вдоль некоторых отрезков $\mathbf{C} = \bigcup_j \mathbf{C}_j$ (см. рис. 1),

$$G(z) = \int_{\mathbf{C}} \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{C}} G(z) dz = t_0, \quad (5)$$

уравнение (3) можно свести к интегральному уравнению

$$W'(z) = 2 \oint_{\mathbf{C}} \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{z - \zeta} = G(z_+) + G(z_-), \quad z \in \forall \mathbf{C}_j \subset \mathbf{C}, \quad (6)$$

где $z_{\pm} = z \pm i0$ обозначают две “близкие” точки на двух разных сторонах разреза (сверху и снизу, если разрез вытянут вдоль вещественной оси, как может оказаться в случае полиномиальных потенциалов). Это уравнение выполняется в любой точке области $\mathbf{C}$, состоящей из нескольких несвязанных кусков, и поэтому формула (6) может быть переписана как алгебраическое уравнение на резольвенту G (см., например, [21]):

$$G^2 - W'(z)G = f(z), \quad (7)$$

где $f(z)$ — полиномом степени $L - 1$ или на единицу меньшей, чем степень $W'(z)$. Уравнение (7) определяет гиперэллиптическую кривую, а квазиклассическая свободная энергия $\mathcal{F}_0$ (первый член в разложении (2)) может быть полностью определена в терминах кривой (7) и производящего дифференциала $G dz$ (5). Для полиномиальных потенциалов кривая (7) является алгебраической кривой рода $L - 1$ и уравнение (7) тем самым определяет резольвенту G как *алгебраическую функцию* на двойном накрытии z -плоскости. Однако если разрешить произвольные “длинные” операторы $\text{Tr} \Phi^L$ при $L \rightarrow \infty$ (перенормировка которых в четырехмерной теории будет рассматриваться ниже), риманова поверхность (7) становится кривой бесконечного рода и ничего нельзя сказать немедленно о свойствах резольвенты G .

Действительно, если ввести новую переменную $Y = W'(z) - 2G$ и переписать (7) в виде $Y^2 = W'(z)^2 + 4f(z)$, становится сразу очевидным, что это гиперэллиптическая риманова поверхность рода $g = L - 1$, а дополнительные $L = g + 1$ параметров — коэффициенты полинома $f(z)$ — поглощаются дробями собственных значений на разрезах

$$S_j = \frac{i}{4\pi} \oint_{A_j} Y dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_j} G dz = \int_{\mathbf{C}_j} \rho(z) dz, \quad j = 1, 2, \dots, L - 1, \quad (8)$$

Рис. 1. Риманова поверхность для одноматричной модели (1) как двойное накрытие z -плоскости. Собственные значения “выпали в конденсаты”, расположенные вдоль разрезов $\{C\}$, окруженных A -циклами. Статсумма (в главном по $1/N$ или квазиклассическом приближении) определяется своими производными по фракциям собственных значений, равным интегралам по дуальным B -циклам.

вместе с полным числом собственных значений t_0 (см. (5)). Зависимость свободной энергии от этих переменных задается формулами

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial S_j} = \frac{1}{2} \oint_{B_j} Y dz,$$

где дуальные контуры B_j приведены на рис. 1.

В заключение данного раздела отметим, что для неполиномиальных потенциалов при $L \rightarrow \infty$, для того чтобы получить разумный ответ, следует рассматривать ситуацию, когда только конечное число экстремумов потенциала $W'(x) = 0$ заполнено собственными значениями. При этом число конденсатов K становится дополнительным параметром задачи, и, вообще говоря, следует рассматривать любые $K < L$. Это находится практически в полной аналогии с тем, как мы собираемся поступить ниже: для длинных операторов (нетривиальных аналогов $\text{Tr } \Phi^L$ при $L \rightarrow \infty$) римановы поверхности следует определять дополнительно, а не просто используя квазиклассическую кривую Бакстера – аналог матрично-модельной кривой (7) для неполиномиального потенциала, как это сделано в работе [22].

3. СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ЯНГА–МИЛЛСА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ БЕТЕ

В отличие от матричных моделей, АДС/КТП-соответствие имеет дело с *четырёхмерной* $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(N)$. Когда подавлены петли замкнутых струн, главный вклад в $1/N$ -разложении обусловлен планарными диаграммами при $N \rightarrow \infty$ с фиксированной константой 'т Хоффа $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N = g_s N$, аналогичной параметру t_0 из предыдущего раздела, $g_s = g_{\text{YM}}^2$ является аналогом квазиклассического параметра $\hbar$. При $\lambda \gg 1$ $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса предполагается дуальной теорией струн в пространстве $\text{AdS}_5 \times S^5$ с одинаковыми (с точностью до знака) радиусами кривизны $R/\sqrt{\alpha'} = \lambda^{1/4}$ обеих

компонент. Поэтому любая проверка АдС/КТП-соответствия предполагает сравнение аналитических рядов при $\lambda = 0$ (теория возмущений в суперсимметричной теории Янга–Миллса) с $(\alpha' \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}})$ -разложениями в теории на мировом листе²⁾.

Возможным выходом из несогласованности параметров разложения может оказаться использование *классических* струнных решений с большими значениями интегралов движения (обычно называемых *спинами* J) в теории $\text{AdS}_5 \times S^5$ [16], [18], энергии которых должны отвечать аномальным размерностям длинных операторов в калибровочной теории. Размерность $\Delta = \sqrt{\lambda} \mathcal{E}(J/\sqrt{\lambda})$ может иметь разложение вида

$$\Delta = J + \sum_{l=1}^{\infty} E_l \left(\frac{\lambda}{J^2} \right)^l$$

по целым степеням постоянной 'т Хофта, которое можно интерпретировать как разложение в точке $\lambda = 0$ даже при $\lambda \gg 1$ из-за того, что большие λ подавлены большими значениями интегралов движения J . Если так случится (что, конечно, не гарантировано), энергии классических струнных конфигураций можно напрямую сравнивать с пертурбативным разложением в калибровочной теории.

Четырехмерная $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса является конформной, т.е. $\beta(g_{\text{YM}}) = 0$, но аномальные размерности γ составных операторов, например $\text{Tr}(\Phi_{i_1} \dots \Phi_{i_L})$, по-прежнему перенормируются нетривиально. Здесь, как и в работе [20], мы будем рассматривать частные случаи скалярных операторов данного вида, хотя предлагаемый подход может применяться и к гораздо более общим операторам. В дуальной теории струн такие операторы отвечают движению струн в компактной S^5 -части десятимерного пространства-времени согласно стандартному аргументу Калушы–Клейна. Чтобы максимально упростить ситуацию, выберем два комплексных поля $\Phi_1 = \Phi_1 + i\Phi_2$ и $\Phi_2 = \Phi_3 + i\Phi_4$ среди шести вещественных скаляров Φ_i и рассмотрим *голоморфные* операторы вида

$$\text{Tr}(\Phi_1 \Phi_1 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_2 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_2 \Phi_1 \Phi_1 \Phi_1 \Phi_2 \dots), \quad (9)$$

которые удобно обозначать стрелками $|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\dots\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$. Голоморфный подсектор “замкнут” при перенормировке, и аномальные размерности являются собственными значениями матрицы смешивания размера $2^L \times 2^L$

$$H = \frac{\lambda}{16\pi^2} \sum_{l=1}^L (1 - \sigma_l \cdot \sigma_{l+1}) + O(\lambda^2), \quad (10)$$

²⁾ Тем не менее были предприняты некоторые попытки (не очень многообещающие с точки зрения автора) рассматривать теорию на мировом листе около так называемого предела “нулевых струн”, т.е. когда $\alpha' \rightarrow \infty$ (см. [23]).

которая с точностью до добавления константы является оператором перестановки в $(\mathbb{C}^2) \otimes (\mathbb{C}^2)$. Ее появление напрямую следует из структуры вершины Φ^4 в лагранжиане суперсимметричной теории, или гамильтонианом магнетика Гейзенберга [9].

Хорошо известно, что эта матрица может быть диагонализирована с помощью анзаца Бете [12] (по поводу современного состояния этой техники и подробного списка литературы см., например, [13]). Собственные векторы H параметризуются корнями Бете $\{u_1, \dots, u_J\}$ ($J \leq L/2$ из-за очевидной $\mathbb{Z}_2$ -симметрии), удовлетворяющими уравнениям анзаца Бете для спиновой цепочки Гейзенберга

$$L \ln \left(\frac{u_j + i/2}{u_j - i/2} \right) = 2\pi i n_j + \sum_{k \neq j}^J \ln \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i}, \quad (11)$$

где $n_j \in \mathbb{Z}$ – некоторые целые числа, не равные нулю для нетривиального решения. Для операторов (9) уравнения (11) должны быть дополнены условиями “следа”

$$e^{iP} = \prod_{j=1}^J \frac{u_j + i/2}{u_j - i/2} = 1 \quad (12)$$

или целочисленностью полного импульса: $P/(2\pi) \in \mathbb{Z}$. Энергия конфигурации задается суммой по магнонам. В лидирующем порядке

$$\gamma = \frac{\lambda}{8\pi^2} \sum_{j=1}^J \frac{1}{u_j^2 + 1/4} + O(\lambda^2), \quad (13)$$

что совпадает с (однопетлевой) масштабной размерностью γ в теории Янга–Миллса с точностью до множителя.

Рис. 2. Риманова поверхность Σ , являющаяся двойным накрытием x -плоскости, разрезанной вдоль бетевских струн (четыре слегка искривленные линии на каждом листе в данном примере), которые пересекают вещественную прямую в точках $x = 1/(2\pi n_l)$. Верхний лист является физическим, в то время как на нижнем резольвента может иметь дополнительные особенности.

Для сравнения с дуальной теорией струн представляют интерес длинные операторы с $L \rightarrow \infty$, для которых, как правило, корни Бете $u_j \sim L$. Растягивая $u_j = Lx_j$ и отбрасывая старшие по $1/L$ члены, из уравнений (11) получим

$$\frac{1}{x_j} = 2\pi n_j + \frac{2}{L} \sum_{k \neq j}^J \frac{1}{x_j - x_k}. \quad (14)$$

Как и в случае матричных моделей (3), при отсутствии второго в правой части (14) члена взаимодействия имеем $x_j = 1/(2\pi n_j)$ для любого n_j , а при наличии взаимодействия все корни, отвечающие n_j , сконцентрируются около точек $1/(2\pi n_j)$ и образуют так называемые *бетевские струны*, показанные на рис. 2. Введем при $L \rightarrow \infty$, как и в формулах (4), (5), плотность

$$\rho(x) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^J \delta(x - x_j), \quad \int_{\mathbf{C}} \rho(x) dx = \frac{J}{L}, \quad (15)$$

или резольвенту

$$G(x) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^J \frac{1}{x - x_j} = \int_{\mathbf{C}} \frac{\rho(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{C}} G(x) dx = \frac{J}{L}. \quad (16)$$

Предположим, что различных $n_l \neq n_{l'}$, $l, l' = 1, 2, \dots, K$, *конечное* число, тогда в непрерывном пределе полный носитель опять представляется в виде $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \cup \dots \cup \mathbf{C}_K$. На каждой компоненте носителя из уравнений (14) следует

$$2 \oint_{\mathbf{C}} \frac{\rho(\xi) d\xi}{x - \xi} = G(x_+) + G(x_-) = \frac{1}{x} - 2\pi n_l, \quad x \in \mathbf{C}_l, \quad (17)$$

где $G(x_{\pm})$ обозначают значения резольвенты на двух берегах разреза. Условие целочисленности полного импульса с учетом уравнений Бете (14) принимает вид

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^J \frac{1}{x_j} = 2\pi \sum_{l=1}^K n_l \int_{\mathbf{C}_l} \rho(x) dx = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (18)$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{C}} \frac{G(x) dx}{x} = 2\pi m, \quad n_l, m \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Различные значения $n_l \neq n_{l'}$ на разных компонентах носителя $\mathbf{C}_l \cap \mathbf{C}_{l'} = \emptyset$ означают, что, в отличие от случая матричных моделей, $G(x) = \int^x dG$ уже не однозначная функция, а абелев интеграл на некоторой гиперэллиптической кривой Σ

$$y^2 = R_{2K}(x) = x^{2K} + r_1 x^{2K-1} + \dots + r_{2K} = \prod_{j=1}^{2K} (x - x_j). \quad (20)$$

где $\{x_j\}$ – корни полинома $R_{2K}(x)$. Уравнения (16), (17) и (19) могут быть решены после их переформулировки на языке свойств мероморфного дифференциала dG :

- dG является абелевым дифференциалом второго рода с единственным полюсом второго порядка в точке P_0 ($x(P_0) = 0$ на нефизическом листе римановой поверхности Σ).
- B -периоды дифференциала dG целочисленны

$$\oint_{B_i} dG = 2\pi(n_i - n_K). \quad (21)$$

Более точно можно написать [20]

$$\int_{B'_j} dG = 2\pi n_j, \quad j = 1, 2, \dots, K+1, \quad (22)$$

где B'_j – контур от точки ∞_- на нижнем листе до точки ∞_+ на верхнем листе, проходящий через j -й разрез, так что $B_j = B'_j - B'_K$, для $j = 1, 2, \dots, K$.

- dG имеет следующее поведение на бесконечности:

$$dG \underset{x \rightarrow \infty}{=} \frac{J}{L} \frac{dx}{x^2} + \dots, \quad (23)$$

а сам абелев интеграл $G(x)$ фиксируется:

$$G(x) = 2\pi m + \int_0^x dG, \quad G(0) = 2\pi m. \quad (24)$$

Общее решение для дифференциала dG на гиперэллиптической кривой (20), отвечающее указанным требованиям (21)–(24), имеет вид [20]

$$dG = -\frac{dx}{2x^2} \left(1 - \frac{\sqrt{r_{2K}}}{y} \right) + \frac{r_{2K-1}}{4\sqrt{r_{2K}}} \frac{dx}{xy} + \sum_{k=1}^{K-1} a_k \frac{x^{k-1} dx}{y}. \quad (25)$$

Дополнительные условия, обеспечивающие однозначность резольвенты на верхнем физическом листе:

$$\oint_{A_i} dG = 0, \quad i = 1, 2, \dots, K-1, \quad (26)$$

легко решаются относительно коэффициентов $\{a_k\}$. Оставшиеся параметры “поглощаются” фракциями корней на конкретных компонентах носителя

$$S_j = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{A_j} x dG = \int_{C_j} \rho(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, g = K-1, \quad (27)$$

полным числом бетеvских корней (15) и полным импульсом (19).

Энергия или однопетлевая размерность для общего конечнозонного решения [20] находится из (13), (25):

$$\gamma = \frac{\lambda}{8\pi^2 L} \oint_C \frac{G(x) dx}{2\pi i x^2} = \frac{\lambda}{8\pi^2 L} \left(\frac{r_{2K-2}}{4r_{2K}} - \frac{r_{2K-1}^2}{16r_{2K}^2} - \frac{a_1}{\sqrt{r_{2K}}} \right). \quad (28)$$

Аномальные размерности, задаваемые формулами (28), являются функциями коэффициентов уравнения кривой (20) и величины a_1 из разложения (25), которая, в свою очередь, выражается через эти коэффициенты путем решения уравнения (26). Сами же модули кривой (20) (неявно) выражаются через числа n_j и фракции корней S_j с помощью (21) или (22) и (27) (вместе с полным импульсом (19) и полным числом корней Бете (16)).

4. ГЕОМЕТРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ СТРУННЫХ РЕШЕНИЙ

Полученное общее решение для аномальных размерностей (28) выражает их через интегралы движения некоторых *классических* конфигураций магнетика Гейзенберга [20]³⁾. В дуальной струнной картине мы имеем дело с классическими траекториями струны, движущейся в подпространстве пространства $\text{AdS}_5 \times S^5$, и конечнозонные решения общих струнных сигма-моделей в пространствах типа АдС были впервые построены в работе [25]. В приложении к работе [20] было продемонстрировано, что эта конструкция после небольших изменений может быть применена и к случаю сигма-моделей в компактных многообразиях S^d . В данном разделе мы продемонстрируем, как эти классические решения могут быть сопоставлены квазиклассическим решениям в калибровочной теории.

В частности, в секторе только двух голоморфных полей возникает сигма-модель со значениями в $S^3 \subset S^5$ (в секторе AdS_5 единственной нетривиальной на решении координатой является “время” $X_0 = \Delta\tau/\sqrt{\lambda}$), которая эквивалентна [26] (поскольку S^3 является групповым многообразием $SU(2)$) главному киральному $SU(2)$ -полю с парой Лакса (подробнее см. [20])

$$\begin{aligned} J_{\pm}(x) &= \frac{\Delta}{\sqrt{\lambda}} \frac{i\mathbf{S}_{\pm} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{1 \mp X}, \\ \partial_+ J_- - \partial_- J_+ + [J_+, J_-] &= 0, \\ \partial_+ J_- + \partial_- J_+ &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

имеющей два простых полюса при значении струнного спектрального параметра $X = X(P_{\pm}) = \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi\Delta}$. Другими словами, такая сигма-модель эквивалентна системе *двух* взаимодействующих релятивистских спинов $\mathbf{S}_+$ и $\mathbf{S}_-$:

$$\begin{aligned} \partial_+ \mathbf{S}_- + \frac{2\Delta}{\sqrt{\lambda}} \mathbf{S}_- \times \mathbf{S}_+ &= 0, \\ \partial_- \mathbf{S}_+ - \frac{2\Delta}{\sqrt{\lambda}} \mathbf{S}_- \times \mathbf{S}_+ &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

которая в некотором “нерелятивистском пределе”, аналогичном пределу, обсуждаемому в работах [27], вырождается в магнетик Гейзенберга [20].

Однако подобный метод может быть применен лишь к групповым многообразиям. Тем не менее и для общей струнной сигма-модели решение для комплексных координат $Z_I(\tau, \sigma)$ и $\overline{Z}_I(\tau, \sigma)$ на S^{2D-1} (с условием $\sum_I |Z_I|^2 = 1$)

$$Z_I(\sigma_{\pm}) = r_I \Upsilon(q_I, \sigma_{\pm}), \quad \overline{Z}_I(\sigma_{\pm}) = r_I \Upsilon(\bar{q}_I, \sigma_{\pm}) = r_I \overline{\Upsilon(q_I, \sigma_{\pm})}, \quad I = 1, 2, \dots, D, \quad (31)$$

³⁾ Подобное соответствие классическим решениям было впервые отмечено в работе [24] для нелинейного уравнения Шредингера.

может быть построено [25] в терминах функций Бейкера–Ахиезера

$$\begin{aligned} \Upsilon(P, \sigma_{\pm}) &\underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} e^{k_{\pm} \sigma_{\pm}} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j(\sigma_{\pm})}{k_{\pm}^j} \right) \propto \\ &\propto e^{\Omega_+(P) \sigma_+ + \Omega_-(P) \sigma_-} \theta(\mathcal{A}(P) + \mathbf{U}_+ \sigma_+ + \mathbf{U}_- \sigma_-), \end{aligned} \quad (32)$$

определенных на двойном накрытии Γ (разветвленном в P_+ и P_-) римановой поверхности Σ (см. рис. 3). В случае только двух комплексных координат Z_I (как на трехмерной сфере S^3) кривая Σ является гиперэллиптической и напрямую связана с кривой (20) цепочки Гейзенберга. Для случая пятимерной сферы S^5 кривая Σ может быть представлена как некоторое трехлистное накрытие X -плоскости, очевидно, связана с трехлистными накрытиями, возникающими при решении уравнений анзаца Бете для операторов вне $SU(2)$ -сектора [28].

Рис. 3. Риманова поверхность Γ , которая является двойным накрытием поверхности Σ с единственным разрезом.

Функция Бейкера–Ахиезера (32) (а значит, и решение сигма-модели) строится в терминах *двух* абелевых дифференциалов второго рода $d\Omega_+$ и $d\Omega_-$ на римановой поверхности Γ

$$d\Omega_{\pm} \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \pm dk_{\pm} (1 + O(k_{\pm}^{-2})), \quad \oint_{\mathbf{A}} d\Omega_{\pm} = 0, \quad (33)$$

с единственными полюсами второго порядка в точках P_+ и P_- , соответственно; $\mathbf{U}_{\pm} = \oint_{\mathbf{B}} d\Omega_{\pm}$ являются векторами их $\mathbf{B}$ -периодов.

Доказательство того, что формулы (31) дают решение сигма-модели, удовлетворяющей классическим условиям Вирасоро, основано на существовании на кривой Σ абелева дифференциала третьего рода $d\Omega$ с простыми полюсами в точках $P_{\pm}$ и нулями в полюсах функций Бейкера–Ахиезера Υ и ей сопряженной $\bar{\Upsilon}$. При этом можно ввести струнную резольвенту или квазиимпульс формулой

$$\begin{aligned} d\mathcal{G} &= \frac{1}{2} (d\Omega_+ - d\Omega_-), \\ d\mathcal{G} &\underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \frac{1}{2} dk_{\pm} (1 + O(k_{\pm}^{-2})), \quad \oint_{\mathbf{A}} d\mathcal{G} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Для периодических по σ решений, как следует из (32), $\mathbf{B}$ -периоды резольвенты $\frac{1}{2\pi} \oint_{\mathbf{B}} d\mathcal{G} \in \mathbb{Z}$ должны быть целочисленными, и для периодических решений можно написать

$$d\Omega = \frac{\overline{\Upsilon}\Upsilon}{\langle \overline{\Upsilon}\Upsilon \rangle} d\mathcal{G}, \quad (35)$$

где скобки означают усреднение по периоду переменной σ .

Функция Бейкера–Ахиезера (32) удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$(\partial_+ \partial_- + u)\Upsilon(P, \sigma_{\pm}) = 0, \quad P \in \Gamma, \quad (36)$$

где $u \propto \sum_i (\partial_+ Z_i \partial_- \overline{Z}_i + \partial_- Z_i \partial_+ \overline{Z}_i)$. Это свойство, а также условия Вирасоро $\lambda \sum_I |\partial_{\pm} Z_I|^2 = \Delta$ обеспечиваются свойствами дифференциала (35) и существованием функции E на Σ с D простыми полюсами $\{q_I\}$ и заданным поведением в окрестностях точек $P_{\pm}$ (ср. с [25]):

$$E = E_{\pm} \pm \frac{4\pi\Delta}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{k_{\pm}^2} + \dots$$

Нормировочные факторы в выражении для сигма-модельных координат (31) определяются формулами

$$r_I^2 = \frac{\text{res}_{q_I} E d\Omega}{E_- - E_+}, \quad I = 1, 2, \dots, D, \quad (37)$$

где $E_{\pm} = E(P_{\pm})$. Нормировки (37) удовлетворяют условию $\sum_{I=1}^D r_I^2 = 1$ благодаря обращению в нуль суммы всех вычетов, $\sum \text{res}(E d\Omega) = 0$.

Переопределяя

$$\partial_{\pm} \rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{4\Delta} \partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma}, \quad \Upsilon \rightarrow e^{2\Delta\tau/\sqrt{\lambda}} \Psi, \quad \overline{\Upsilon} \rightarrow e^{-2\Delta\tau/\sqrt{\lambda}} \bar{\Psi}, \quad u \rightarrow u - \frac{4\Delta^2}{\lambda},$$

в пределе $\lambda/\Delta^2 \ll 1$ из уравнения (36) получаем нестационарное уравнение Шредингера

$$\begin{aligned} (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}^2 + u)\Psi &= 0, \\ (-\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}^2 + u)\bar{\Psi} &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

в котором функции Бейкера–Ахиезера Ψ и $\bar{\Psi}$ могут быть определены на римановой поверхности Σ (см. рис. 2). На этой поверхности концы дополнительного разреза P_+ и P_- сливаются в единую точку P_0 , с разложением в окрестности этой точки (с новым локальным параметром $k(P_0) = \infty$)

$$\begin{aligned} \Psi_{P \rightarrow P_0} &= e^{k\sigma + k^2\tau} \left(1 + \frac{\psi_1}{k} + \frac{\psi_2}{k^2} + \dots \right), \\ \bar{\Psi}_{P \rightarrow P_0} &= e^{-k\sigma - k^2\tau} \left(1 + \frac{\bar{\psi}_1}{k} + \frac{\bar{\psi}_2}{k^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя разложения (39) в уравнение (38), получим

$$\begin{aligned} u &= 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma} = -2 \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \sigma^2} + u \psi_1 &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \tau} + 2 \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \sigma} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \sigma^2} + u \bar{\psi}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Для сопряженных функций $\psi_1 + \bar{\psi}_1 = 0$, а значит,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(\psi_2 + \bar{\psi}_2 + \psi_1 \bar{\psi}_1) = -\frac{\partial u}{\partial \sigma}.$$

Поэтому в результате получаем разложение

$$\bar{\Psi} \Psi \underset{P \rightarrow P_0}{=} 1 + \frac{u}{k^2} + \dots \quad (41)$$

Дифференциал (35) в этом пределе переходит в $d\Omega = (\bar{\Psi} \Psi / \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle) dG$, а функция E приобретает простой полюс в P_0 , т.е. $E \underset{P \rightarrow P_0}{=} k + \dots$, если пользоваться новым локальным параметром k . Обращение в нуль полной суммы вычетов дифференциала $E d\Omega$ теперь приводит к соотношению

$$u = \text{res}_{P_0} F dQ = - \sum_{q_I} F \frac{\bar{\Psi} \Psi}{\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle} dG \propto \sum_I \bar{\Psi}(q_I) \Psi(q_I). \quad (42)$$

Это означает, что функция $\Psi_I(\tau, \sigma) \propto \Psi(q_I)$ удовлетворяет некоторому векторному нелинейному уравнению Шредингера [29]

$$\left(\partial_\tau - \partial_\sigma^2 + \sum_J |\Psi_J|^2 \right) \Psi_I = 0. \quad (43)$$

Для случая $D = 2$ кривая Σ является гиперэллиптической и на ней можно выбрать функцию E , у которой только два полюса (см. ниже). При этом уравнение (43) превращается в обычное нелинейное уравнение Шредингера, которое трансформируется в магнитную цепочку Гейзенберга [30], [31]

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &\propto \mathbf{S}_\sigma^2, \\ \bar{\Psi} \partial \Psi - \Psi \partial \bar{\Psi} &\propto (\mathbf{S}_\sigma \cdot \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{\sigma\sigma}) \end{aligned} \quad (44)$$

и т.д., путем калибровочного преобразования операторов Лакса.

Другой способ описать классическую струнную геометрию предложен в работе [20], где геометрические данные задачи о главном киральном поле (29) были переформулированы в виде некоторой проблемы Римана–Гильберта. Спектральная задача для струнной части (прямой аналог формул (16), (17), (19) и (28)) может быть сформулирована следующим образом. Пусть X и $\mathcal{G}(X)$ – соответственно струнный спектральный параметр и резольвента, совпадающая с квазиимпульсом классической задачи (возможно, по модулю точной 1-формы). Тогда струнную спектральную задачу Римана–Гильберта можно записать в виде [20]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{G}(X) dX &= \frac{J}{\Delta} + \frac{\Delta - L}{2\Delta}, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{G}(X) dX}{X} &= 2\pi m, \\ \oint_{\mathcal{C}} \frac{2t}{X^2} \frac{\mathcal{G}(X)}{2\pi i} dX &= \Delta - L,\end{aligned}\tag{45}$$

а также

$$\mathcal{G}(X_+) + \mathcal{G}(X_-) - 2\pi n_l = \frac{X}{X^2 - t},\tag{46}$$

где мы ввели обозначение $t = \lambda/(16\pi^2\Delta^2)$.

Рассмотрим теперь $x = X + t/X$ как *точную* замену спектрального параметра и положим $G(x) = \mathcal{G}(X)$ ⁴⁾. Это буквально представляет собой точную замену локальной координаты вблизи дополнительного разреза в общей конструкции, которую мы обсуждали выше. Действительно, в терминах $k_{\pm}$ имеем $X \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \pm\sqrt{t} + 1/k_{\pm} + \dots$, тогда $x \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \pm 2\sqrt{t} \pm 1/(\sqrt{t}k_{\pm}^2) + \dots$, т.е. функция $E = 1/x$ (с точностью до некоторой общей нормировки) удовлетворяет всем необходимым свойствам. Например, когда разрез между точками P_+ и P_- на рис. 2 сжимается в точку P_0 , для которой $x(P_0) = 0$, функция E приобретает в этой точке простой полюс.

Продолжая преобразования, получим

$$dx = dX \left(1 - \frac{t}{X^2}\right) = \frac{dX}{X} \left(X - \frac{t}{X}\right) = \frac{dX}{X} \sqrt{x^2 - 4t},\tag{47}$$

так что комбинация первой и третьей формул из (45) дает

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \mathcal{G}(X) dX = \frac{J}{\Delta} + \frac{\Delta - L}{2\Delta} = \frac{J}{\Delta} + t \oint \frac{\mathcal{G}(X) dX}{2\pi i X^2}\tag{48}$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \oint G(x) dx = \frac{J}{\Delta}.\tag{49}$$

⁴⁾В работе [20] такая замена была введена в лидирующем порядке по λ . Аналогичная замена переменных рассматривалась в [32], где вместо размерности Δ использовалось ее “затравочное” значение L .

Вторая формула из (45) при этом принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G(x) dx}{\sqrt{x^2 - 4t}} = 2\pi m, \quad (50)$$

где интегрирование производится вокруг разреза между точками $-2\sqrt{t}$ и $2\sqrt{t}$ в x -плоскости, а третья формула из (45) приводит к равенству

$$\oint \frac{G(x) dx}{2\pi i} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4t}} - 1 \right) = \Delta - L. \quad (51)$$

“Струнное уравнение Бете” на разрезах (46) теперь имеет вид

$$G(x_+) + G(x_-) - 2\pi n_l = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4t}}. \quad (52)$$

Из формул (49)–(52) теперь легко увидеть, что спектральная задача классической теории струн идентична квазиклассическим уравнениям Бете в калибровочной теории с точностью до следующих подстановок:

$$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4t}} = \frac{1}{x} + \frac{2t}{x^3} + \dots, \quad L \rightarrow \Delta, \quad \gamma \rightarrow \Delta - L. \quad (53)$$

Другими словами, это приводит к нелинейному соотношению

$$\Delta - L = \Gamma(\lambda, \Delta), \quad (54)$$

где функцию $\Gamma(\lambda, L) = \gamma + O(\lambda^2)$ следует сравнивать с многопетлевыми вкладами в аномальную размерность в суперсимметричной калибровочной теории.

Простейшим нетривиальным примером подобного соотношения является солитонный предел малого количества корней Бете, такой предел приводит к модифицированной БМН-формуле

$$\Delta - L = \sum_k N_k \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda n_k^2}{\Delta^2}} - 1 \right) \quad (55)$$

для спина $J = \sum_k N_k$, выраженного в виде полного количества “положительных” ($n_k > 0$) и “отрицательных” ($n_k < 0$) массивных осцилляторов [15]. Формулы (54) и (55) демонстрируют, что решение для размерности Δ в классической теории струн выражается с помощью сложных нелинейных формул, а осцилляторная формулировка [15], [10] является скорее некоторым эффективным способом описания определенных квазиклассических мод интегрируемой струнной модели в геометрии pp-волн, чем точным квантованием теории на мировом листе.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе мы обсудили недавние попытки количественной проверки АдС/КТП-соответствия, основанные на возникновении интегрируемых структур по обе стороны дуальности между калибровочными полями и струнами. Оказывается, что квазиклассические решения уравнений анзаца Бете, возникающих в процессе диагонализации матрицы смешивания для составных операторов, могут быть описаны на языке (дискретных) семейств комплексных кривых, оснащенных производящей 1-формой, аналогично квазиклассическим решениям матричных моделей и калибровочным теориям Виттена–Зайберга.

В отличие от случая матричных моделей, корни Бете для “компактных” цепочек образуют струны, никогда не лежащие на вещественной оси. Более того, резольвента для бесконечного числа корней Бете не может быть выражена через алгебраическую функцию на кривой конечного рода из-за нетривиальных квантовых чисел n_j , полное количество которых следует держать конечным, чтобы остаться в классе конечнозонных или алгебро-геометрических решений.

Конденсация корней Бете на разрезах римановой поверхности приводит к тому, что для длинных операторов с $L \rightarrow \infty$ соответствующие аномальные размерности выражаются через интегралы движения некоторых *классических* спиновых волн в соответствующем магнетике. Это чрезвычайно нетривиальный “непрерывный предел”, в котором большое число квантовых спинов $1/2$ конденсируются в коллективную классическую моду; нетривиальность этого предела обсуждалась в работах [27], хотя и гораздо более сложным способом, чем в предлагаемом выше подходе. Таким образом, рассматривая длинные операторы и решая для них уравнения Бете, мы приходим к некоторым конечнозонным решениям, определяемым конкретными комплексными кривыми.

По другую сторону дуальности имеется классически интегрируемая струнная сигма-модель. Несмотря на отсутствие аргументов в пользу того, что такое приближение со стороны теории струн может быть достаточным для сравнения с калибровочной теорией (и это действительно не так, по крайней мере для операторов, отвечающих движению струн в некомпактной части $\text{AdS}_5 \times S^5$ [16], см. также обсуждение этого, например, в работе [33]), тем не менее для некоторых решений большое значение λ подавлено большими значениями интегралов движения и теоретико-полевая теория возмущений может быть воспроизведена из струнных вычислений.

Вообще говоря, струнная сигма-модель (даже ограниченная на компактную часть S^5 или ее подмногообразие) является системой с бесконечным числом степеней свободы. Однако, следуя работе [25], оказывается возможным построить ее конечнозонные решения, удовлетворяющие условиям Вирасоро на струнном мировом листе. Такие решения были исследованы выше и было продемонстрировано, что лежащая в их основе геометрия естественно сшивается с квазиклассической геометрией решений уравнений анзаца Бете.

Более точно, общее решение сигма-модели формулируется с помощью комплексной

кривой Γ , являющейся двойным накрытием некоторой кривой Σ с единственным разрезом, на которой существует функция E с D простыми полюсами. Это означает, что саму кривую Σ можно рассматривать как D -листное накрытие римановой сферы, что для $D = 2$ (случай сферы S^3) является гиперэллиптической кривой. Решение строится с помощью стандартной техники конечнозонных потенциалов для нестационарного одномерного или двумерного оператора Шредингера.

Однако предел “слабой связи” к калибровочной теории является совершенно нетривиальным. Геометрия кривой Γ меняется так, что она превращается просто в две копии Σ , при этом дополнительный разрез на рис. 2 сжимается в единственную точку P_0 . Сигма-модельное решение превращается в решение $(D - 1)$ -мерного векторного нелинейного уравнения Шредингера, эквивалентного при $D = 2$ магнетику Гейзенберга. Для $D > 2$ появление векторного нелинейного уравнения Шредингера подсказывает, какие именно решения “раскрашенного” анзаца Бете следует искать за пределами $SU(2)$ -подсектора.

Тонкости этого предельного перехода широко обсуждались в литературе. В работе [34] было предложено описывать вклад высших петель в суперсимметричной теории Янга–Миллса с помощью интегрируемой цепочки [35], в которой трансфер-матрица определена на эллиптической кривой с одним из периодов, пропорциональным длине цепочки. Такая формулировка пертурбативной калибровочной теории приводит к расхождениям с предсказаниями классической теории струн начиная с трех петель (наиболее подробное обсуждение этого вопроса можно найти в [32]).

Было бы интересно понять, как интегрируемые системы, ассоциированные с эллиптическими кривыми, могут возникать в рамках подхода, обсуждаемого в данной работе. Периодичность по длине цепочки L естественно возникает при вычислении более чем L петель в калибровочной теории, что несовместимо с изначальным переходом к пределу $L \rightarrow \infty$. Это означает, что следует обратить внимание на $1/L$ -поправки конечного размера к квазиклассическому решению (см., например, [36]). С точки зрения общей конструкции решений сигма-модели периодичности по переменной σ можно добиться автоматически, рассматривая кривые Σ , являющиеся накрытиями эллиптической кривой, вместо x -плоскости или римановой сферы. Это предлагает возможный путь развития обсуждаемых проблем в духе работ [37].

Благодарности. Автор признателен К. Зарембо, В. Казакову и Дж. Минахану за сотрудничество в работе [20], а также А. Горскому, А. Михайлову и, в особенности, И. Кричеверу за полезные обсуждения. Работа была выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 04-01-00642, гранта INTAS № 00-561, Программы поддержки ведущих научных школ 1578.2003.2 и Фонда поддержки российской науки.

Список литературы

- [1] А. М. Поляков. Калибровочные поля и струны. Черноголовка: ИТФ им. Ландау, 1995.
- [2] F. David. Nucl. Phys. B. 1985. V. 257. P. 543.

- [3] V. A. Kazakov. Phys. Lett. B. 1985. V. 150. P. 282.
- [4] J. M. Maldacena. Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 231; hep-th/9711200.
- [5] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov. Phys. Lett. B. 1998. V. 428. P. 105; hep-th/9802109.
- [6] E. Witten. Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 253; hep-th/9802150.
- [7] Л. Н. Липатов. Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. С. 571; hep-th/9311037; A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, V. N. Velizhanin. Phys. Lett. B. 2003. V. 557. P. 114; hep-ph/0301021; A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, V. N. Velizhanin. Phys. Lett. B. 2004. V. 595. P. 521; hep-th/0404092.
- [8] S. E. Derkachov, A. N. Manashov. Nucl. Phys. B. 1998. V. 522. P. 301; hep-th/9710015; V. M. Braun, S. E. Derkachov, A. N. Manashov. Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 2020; hep-ph/9805225; A. V. Belitsky, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov. Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 045021; hep-th/0311104; A. V. Belitsky, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky. Nucl. Phys. B. 2003. V. 667. P. 3; hep-th/0304028.
- [9] J. A. Minahan, K. Zarembo. JHEP. 2003. V. 0303. P. 013; hep-th/0212208.
- [10] D. Berenstein, J. M. Maldacena, H. Nastase. JHEP. 2002. V. 0204. P. 013; hep-th/0202021.
- [11] D. J. Gross, A. Mikhailov, R. Roiban. Ann. Phys. 2002. V. 301. P. 31; hep-th/0205066.
- [12] H. Bethe. Z. Phys. 1931. V. 71. P. 205.
- [13] L. D. Faddeev. How algebraic Bethe Ansatz works for integrable models. In: Quantum Symmetries/Symétries Quantiques. Proc. of the Les Houches Summer School, Session LXIV, Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995. Eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin. Amsterdam: North-Holland, 1998. P. 149; hep-th/9605187.
- [14] C. G. Callan, H. K. Lee, T. McLoughlin, J. H. Schwarz, I. Swanson, X. Wu. Nucl. Phys. B. 2003. V. 673. P. 3; hep-th/0307032.
- [15] R. R. Metsaev. Nucl. Phys. B. 2002. V. 625. P. 70; hep-th/0112044.
- [16] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov. Nucl. Phys. B. 2002. V. 636. P. 99; hep-th/0204051.
- [17] N. Beisert, C. Kristjansen, M. Staudacher. Nucl. Phys. B. 2003. V. 664. P. 131; hep-th/0303060; N. Beisert, J. A. Minahan, M. Staudacher, K. Zarembo. JHEP. 2003. V. 0309. P. 010; hep-th/0306139; N. Beisert. Nucl. Phys. B. 2004. V. 676. P. 3; hep-th/0307015; N. Beisert. JHEP. 2003. V. 0309. P. 062; hep-th/0308074; Nucl. Phys. B. 2004. V. 682. P. 487; hep-th/0310252; N. Beisert, M. Staudacher. Nucl. Phys. B. 2003. V. 670. P. 439; hep-th/0307042; N. Beisert, S. Frolov, M. Staudacher, A. A. Tseytlin. JHEP. 2003. V. 0310. P. 037; hep-th/0308117.
- [18] S. Frolov, A. A. Tseytlin. JHEP. 2002. V. 0206. P. 007; hep-th/0204226; Nucl. Phys. B. 2003. V. 668. P. 77; hep-th/0304255; JHEP. 2003. V. 0307. P. 016; hep-th/0306130; Phys. Lett. B. 2003. V. 570. P. 96; hep-th/0306143; G. Arutyunov, S. Frolov, J. Russo, A. A. Tseytlin. Nucl. Phys. B. 2003. V. 671. P. 3; hep-th/0307191; G. Arutyunov, J. Russo, A. A. Tseytlin. Phys. Rev. D. 2004. V. 69. P. 086009; hep-th/0311004; A. A. Tseytlin. Spinning strings and AdS/CFT duality. In: From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics. Eds. M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler. Singapore: World Scientific, 2004 (in press); hep-th/0311139.
- [19] G. Arutyunov, M. Staudacher. JHEP. 2004. V. 04003. P. 4; hep-th/0310182.
- [20] V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan, K. Zarembo. JHEP. 2004. V. 0405. P. 024; hep-th/0402207.
- [21] F. David. Nucl. Phys. B. 1991. V. 348. P. 507.
- [22] G. P. Korchemsky. Nucl. Phys. B. 1996. V. 462. P. 333; hep-th/9508025; Nucl. Phys. B. 1997. V. 498. P. 68; hep-th/9609123.

- [23] *A. Mikhailov*. JHEP. 2003. V. 0312. P. 058; hep-th/0311019; Slow evolution of nearly-degenerate extremal surfaces. hep-th/0402067; JHEP. 2004. V. 0409. P. 068; hep-th/0404173.
- [24] *Н. Ю. Решетихин, Ф. А. Смирнов*. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 131. С. 128.
- [25] *И. М. Кривевер*. Функци. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 1. С. 26.
- [26] *L. D. Faddeev, N. Y. Reshetikhin*. Ann. Phys. 1986. V. 167. P. 227.
- [27] *M. Kruczenski*. Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 161602; hep-th/0311203; *M. Kruczenski, A. V. Ryzhov, A. A. Tseytlin*. Nucl. Phys. B. 2004. V. 692. P. 3; hep-th/0403120.
- [28] *C. Kristjansen*. Phys. Lett. B. 2004. V. 586. P. 106; hep-th/0402033; *J. Enquist, J. A. Minahan, K. Zarembo*. JHEP. 2003. V. 0311. P. 063; hep-th/0310188; *J. A. Minahan*. JHEP. 2004. V. 0410. P. 053; hep-th/0405243.
- [29] *И. В. Чередник*. Функци. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. С. 45.
- [30] *В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян*. ТМФ. 1979. Т. 38. С. 26.
- [31] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [32] *N. Beisert, V. Dippel, M. Staudacher*. JHEP. 2004. V. 0407. P. 75; hep-th/0405001.
- [33] *A. Gorsky*. Spin chains and gauge / string duality. hep-th/0308182 (см. статью в этом номере).
- [34] *D. Serban, M. Staudacher*. JHEP. 2004. V. 0406. P. 1; hep-th/0401057.
- [35] *В. И. Иноземцев*. ЭЧАЯ. 2003. Т. 34. С. 332; hep-th/0201001.
- [36] *M. Lubcke, K. Zarembo*. JHEP. 2004. V. 0405. P. 49; hep-th/0405055.
- [37] *I. Krichever, A. Zabrodin*. Spin generalization of the Ruijsenaars–Schneider model, nonAbelian 2-d Toda chain and representations of Sklyanin algebra. hep-th/9505039; *I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin*. Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 267; hep-th/9604080; *A. Zabrodin*. Discrete Hirota's equation in quantum integrable models. hep-th/9610039.