Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Павлов, Описание пар совместимых дифференциально-геометрических скобок Пуассона первого порядка, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 293–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:30:03

© 2005 г.

М. В. Павлов*

ОПИСАНИЕ ПАР СОВМЕСТИМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СКОБОК ПУАССОНА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Показано, что бигамильтоны структуры систем гидродинамического типа описываются решениями нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, как в случае плоских метрик, так и для произвольных кривизн. В частности, если одна метрика плоская, а другая постоянной кривизны, то соответствующая интегрируемая система уравнений является редукцией модели киральных полей Чередника.

Ключевые слова: гамильтонова структура, инвариант Римана, система гидродинамического типа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из самых интересных вопросов классической дифференциальной геометрии, возникших при изучении полугамильтоновых систем гидродинамического типа, является описание поверхностей, допускающих нетривиальные деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн. При этом число существенных параметров, от которых зависят такие деформации, фактически равно числу различных локальных гамильтоновых структур соответствующей системы гидродинамического типа [1]. Такие локальные гамильтоновы структуры задаются дифференциально-геометрическими скобками Пуассона первого порядка (см. [2]). В этой же работе была рассмотрена система усредненных однофазных решений уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) и две ее локальные гамильтоновы структуры. Позднее мультигамильтоновы структуры систем гидродинамического типа изучались в [3], [4]. Данная работа посвящена описанию бигамильтоновых структур на языке ортогональных криволинейных систем координат. Альтернативный подход (метод обратной задачи) был использован в [5]. В работе [6] было показано, что описание пар совместимых дифференциально-геометрических скобок Пуассона первого порядка эквивалентно решению следующей переопределенной системы уравнений на коэффициенты вращения β_{ik} ортогональных криволинейных систем

*Loughborough University, Loughborough, UK. E-mail: m.v.pavlov@lboro.ac.uk

координат:

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ik} + \partial_k \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} \beta_{mi} \beta_{mk} &= 0, \quad i \neq k, \\ \eta_i \partial_i \beta_{ik} + \eta_k \partial_k \beta_{ki} + \frac{1}{2} \eta'_i \beta_{ik} + \frac{1}{2} \eta'_k \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} \eta_m \beta_{mi} \beta_{mk} &= 0, \quad i \neq k, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\eta_i(r^i)$ – некоторые функции, $\partial_k \equiv \partial/\partial r^k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Общий случай $\eta_i(r^i) \neq \text{const}$ и частный случай $\eta_i(r^i) = c_i = \text{const}$ были рассмотрены в [6], где было показано, что система уравнений (1) является интегрируемой системой. В частном случае $\eta_i(r^i) = c_i = \text{const}$ система уравнений

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ik} + \partial_k \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} \beta_{mi} \beta_{mk} &= 0, \quad i \neq k, \\ c_i \partial_i \beta_{ik} + c_k \partial_k \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} c_m \beta_{mi} \beta_{mk} &= 0, \quad i \neq k, \end{aligned} \quad (2)$$

при $N = 3$ была сведена к трем попарно коммутирующим неэволюционным уравнениям (см. [6])

$$q_{xt} = \text{ch } q \sqrt{1 - q_x^2}, \quad q_{yt} = \text{sh } q \sqrt{1 - q_y^2}, \quad q_{xy} = -\sqrt{(1 - q_x^2)(1 - q_y^2)},$$

которые являются не чем иным, как двумя модифицированными уравнениями sin -Гордон и вырожденным дважды модифицированным уравнением sin -Гордон, соответственно. В данной работе предлагается обобщение этой системы уравнений на общий случай $\eta_i(r^i) \neq \text{const}$ для бигамильтоновой структуры, где одна метрика плоская, а вторая имеет кривизну коразмерности один.

2. ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

Условием совместности линейной системы уравнений в частных производных

$$\partial_i H_k = \beta_{ik} H_i, \quad i \neq k, \quad (3)$$

и сопряженной к ней системы

$$\partial_i \psi_k = \beta_{ki} \psi_i, \quad i \neq k, \quad (4)$$

является нелинейная многомерная интегрируемая система N волн (см., например, [7], [8])

$$\partial_i \beta_{jk} = \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k. \quad (5)$$

Любая пара $H_i^{(1)}, H_i^{(2)}$ решений первой линейной системы (3) задает систему гидродинамического типа, интегрируемую методом обобщенного годографа [9]

$$r_t^i = \frac{H_i^{(2)}}{H_i^{(1)}} r_x^i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

записанную в инвариантах Римана r^i . Частные решения $\psi_i^{(k)}$ сопряженной линейной системы уравнений (4) определяют плотности a^k и токи c^k законов сохранения:

$$a_t^k = \partial_x c^k(\mathbf{a}),$$

где

$$da^k = \sum_{m=1}^N \psi_m^{(k)} H_m^{(1)} dr^m, \quad dc^k = \sum_{m=1}^N \psi_m^{(k)} H_m^{(2)} dr^m.$$

Существование линейного дифференциального оператора первого порядка

$$H_i = \partial_i \psi_i + \sum_{m \neq i} \beta_{mi} \psi_m, \quad (6)$$

связывающего решения обеих линейных систем (см., например, [4]), эквивалентно существованию локальной гамильтоновой структуры

$$a_t^i = \partial_x \left[g^{ik} \frac{\partial h}{\partial a^k} \right],$$

где плоские координаты a^k определяются “нулевыми” решениями линейной системы уравнений (4):

$$0 = \partial_i \psi_i^{(k)} + \sum_{m \neq i} \beta_{mi} \psi_m^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

а невырожденная симметричная метрика

$$ds^2 = \sum_{m=1}^N (H_m^{(1)} dr^m)^2 = g_{jk} da^j da^k$$

является постоянной в плоских координатах a^k :

$$g^{jk} = \sum_{m=1}^N \psi_m^{(j)} \psi_m^{(k)} = \text{const.}$$

Существование оператора (6) накладывает ограничение на коэффициенты вращения ортогональных систем координат β_{ik} :

$$\partial_i \beta_{ik} + \partial_k \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} \beta_{mi} \beta_{mk} = 0, \quad i \neq k, \quad (7)$$

которое хорошо известно в дифференциальной геометрии как уравнение Гаусса, в данном случае означающее нулевую кривизну метрики.

Легко видеть, что система N волн инвариантна относительно преобразования $R^i = R^i(r^i)$, $\bar{H}_i^{(1)} = H_i^{(1)} \mu_i^{-1/2}(r^i)$, где $\mu_i(r^i)$ и $R^i(r^i)$ – произвольные функции. Если инварианты Римана не подвергаются преобразованию ($R^i(r^i) \equiv r^i$), то условие “плоскости” метрики уже не выполняется, и тогда решения сопряженной задачи преобразуются по правилу $\bar{\psi}_i = \psi_i \mu_i^{1/2}(r^i)$; если же $\mu_i(r^i) = R^{i'2}(r^i)$, то метрика остается плоской,

$$ds^2 = \sum_{m=1}^N (H_m^{(1)} dr^m)^2 = \sum_{m=1}^N (\bar{H}_m^{(1)} dR^m)^2,$$

а решения сопряженной задачи не меняются:

$$da^k = \sum_{m=1}^N \psi_m^{(k)} H_m^{(1)} dr^m = \sum_{m=1}^N \bar{\psi}_m^{(k)} \bar{H}_m^{(1)} dR^m.$$

Таким образом, с каждой системой гидродинамического типа связано бесконечное количество метрик

$$ds^2 = \sum_{m=1}^N \mu_m^{-1}(r^m) (H_m^{(1)} dr^m)^2, \quad (8)$$

причем только для конечного числа значений $\mu_i(r^i)$ (не более чем $N+1$, см. [10]) условие плоскости метрики выполняется. В данной работе рассматривается случай, когда только два различных значения $\mu_i(r^i)$ определяют плоские метрики. Так как коэффициенты диагональной метрики H_i^2 определены с точностью до умножения на произвольную функцию от соответствующего инварианта Римана, то первую плоскую метрику всегда можно выбрать так, чтобы одно из значений $\mu_i(r^i)$ можно было положить равным единице. Вопрос совместности пары локальных гамильтоновых операторов, заданных такими метриками, изучен достаточно подробно в [5]. Такие пары являются совместными, если их произвольная линейная комбинация также является локальным гамильтоновым оператором. Таким образом, интегрируемая нелинейная система уравнений (см. [6])

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_i \bar{\beta}_{jk} &= \bar{\beta}_{ji} \bar{\beta}_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ (\lambda + R^i) \bar{\partial}_i \bar{\beta}_{ik} + (\lambda + R^k) \bar{\partial}_k \bar{\beta}_{ki} + \frac{1}{2}(\bar{\beta}_{ik} + \bar{\beta}_{ki}) + \\ &+ \sum_{m \neq i, k} (\lambda + R^m) \bar{\beta}_{mi} \bar{\beta}_{mk} = 0, \quad i \neq k. \end{aligned} \quad (9)$$

является условием совместности линейной системы уравнений

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_i \bar{\psi}_j^{(k)} &= \bar{\beta}_{ji} \bar{\psi}_i^{(k)}, \quad i \neq j, \\ 0 &= (\lambda + R^i) \bar{\partial}_i \bar{\psi}_i^{(k)} + \frac{1}{2} \bar{\psi}_i^{(k)} + \sum_{m \neq i} (\lambda + R^m) \bar{\beta}_{mi} \bar{\psi}_m^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{\partial} = \partial/\partial R^i$, $\bar{\beta}_{ik}(\mathbf{R}) = \beta_{ik}(\mathbf{r})/R^{i'2}(r^i)$, $\bar{\psi}_j^{(k)} = \psi_j^{(k)}$, λ – произвольная константа плоской метрики $\tilde{g}^{ii}(\mathbf{r}) = (\lambda + R^i)g^{ii}$.

Таким образом, доказана

ЛЕММА. Система N волн (5) с редукцией

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{ik} + \partial_k \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} \beta_{mi} \beta_{mk} &= 0, \quad i \neq k, \\ \eta_i(r^i) \partial_i \beta_{ik} + \eta_k(r^k) \partial_k \beta_{ki} + \frac{1}{2} \eta'_i(r^i) \beta_{ik} + \\ + \frac{1}{2} \eta'_k(r^k) \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} \eta_m(r^m) \beta_{mi} \beta_{mk} &= 0, \quad i \neq k, \end{aligned}$$

где $\eta_i(r^i)$ – второе из значений $\mu_i(r^i)$, приводима к форме (9) преобразованием

$$H_i(r) = \eta'_i(r^i) \tilde{H}_i(R), \quad \frac{\partial}{\partial r^i} = \eta'_i(r^i) \frac{\partial}{\partial R^i}, \quad \eta_i(r^i) = \tilde{\eta}_i(R^i) \equiv R^i,$$

если $\eta_i(r^i) \neq c_i = \text{const.}$

Итак, в общем случае бигамильтоновы структуры систем гидродинамического типа описываются решениями интегрируемой системы уравнений

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ik} + \partial_k \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} \beta_{mi} \beta_{mk} &= 0, \quad i \neq k, \\ r^i \partial_i \beta_{ik} + r^k \partial_k \beta_{ki} + \frac{1}{2} \beta_{ik} + \frac{1}{2} \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} r^m \beta_{mi} \beta_{mk} &= 0, \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Ее спектральная задача

$$\begin{aligned} \partial_i \psi_j^{(k)} &= \beta_{ji} \psi_i^{(k)}, \quad i \neq j, \\ 0 &= (\lambda + r^i) \partial_i \psi_i^{(k)} + \frac{1}{2} \psi_i^{(k)} + \sum_{m \neq i} (\lambda + r^m) \beta_{mi} \psi_m^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

есть не что иное, как N коммутирующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно каждой независимой переменной (инвариантов Римана).

ПРИМЕЧАНИЕ. Данная многомерная спектральная задача имеет многомерный аналог определителя Вронского – $N(N+1)/2$ “первых интегралов” (связи)

$$g^{sn} = \sum_{m=1}^N (\lambda + r^m) \psi_m^{(s)} \psi_m^{(n)} = \text{const}, \quad (11)$$

которые являются коэффициентами метрики в плоских координатах *смешанной* локальной гамильтоновой структуры.

Для изложения содержания следующего раздела необходимо, следуя Дарбу, найти первые интегралы уравнения Гаусса (см. (7)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Скалярным потенциалом* коэффициентов вращения ортогональных систем координат называется функция V , вторые производные от которой удовлетворяют уравнению $V_{ik} = \beta_{ik}\beta_{ki}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Векторным потенциалом* коэффициентов вращения ортогональных систем координат называется такая функция S_k , что $\partial_i S_k = \beta_{ik}\partial_k \beta_{ki}$, $i \neq k$.

Дарбу заметил (см. [11]), что уравнение Гаусса, записанное через коэффициенты вращения ортогональных систем координат (7), имеет N “первых интегралов”

$$S_i + \frac{1}{2} \sum_{m \neq i} \beta_{mi}^2 = n_i(r^i), \quad (12)$$

где $n_i(r^i)$ – произвольные функции (“константы интегрирования”). Аналогичное условие нулевой кривизны

$$\eta_i(r^i)\partial_i\beta_{ik} + \eta_k(r^k)\partial_k\beta_{ki} + \frac{1}{2}\eta'_i(r^i)\beta_{ki} + \frac{1}{2}\eta'_k(r^k)\beta_{ik} + \sum_{m \neq i,k} \eta_m(r^m)\beta_{mi}\beta_{mk} = 0, \quad i \neq k,$$

для метрики $\eta_i(r^i)g^{ii}$ имеет N “первых интегралов”

$$\eta_i S_i + \frac{1}{2} \eta'_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{m \neq i} \eta_m \beta_{mi}^2 = k_i(r^i), \quad (13)$$

где $k_i(r^i)$ – другие произвольные функции.

2.1. Частный случай $\eta_i(r^i) = c_i = \text{const}$. Этот частный случай был рассмотрен в работе [6]. Спектральная задача

$$\begin{aligned} \partial_i \psi_j^{(k)} &= \beta_{ji} \psi_i^{(k)}, \quad i \neq j, \\ 0 &= (\lambda + c_i) \partial_i \psi_i^{(k)} + \sum_{m \neq i} (\lambda + c_m) \beta_{mi} \psi_m^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

задает нелинейную систему

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ik} &= - \sum_{m \neq i,k} \frac{c_m - c_k}{c_i - c_k} \beta_{mi} \beta_{mk}, \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Легко видеть, что из (12) и (13) для частного случая $\eta_i(r^i) = c_i = \text{const}$ получаем

$$\begin{aligned} S_i + \frac{1}{2} \sum_{m \neq i} \beta_{mi}^2 &= n_i(r^i), \\ c_i S_i + \frac{1}{2} \sum_{m \neq i} c_m \beta_{mi}^2 &= k_i(r^i), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\sum_{m \neq i} (c_m - c_i) \beta_{mi}^2 = 2[k_i(r^i) - c_i n_i(r^i)].$$

При $N = 3$ последняя система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{aligned} (c_2 - c_1) \beta_{21}^2 + (c_3 - c_1) \beta_{31}^2 &= l_1(r^1), \\ (c_1 - c_2) \beta_{12}^2 + (c_3 - c_2) \beta_{32}^2 &= l_2(r^2), \\ (c_1 - c_3) \beta_{13}^2 + (c_2 - c_3) \beta_{23}^2 &= l_3(r^3), \end{aligned}$$

и параметризована следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_{21} &= \sqrt{\frac{l_1(r^1)}{c_2 - c_1}} \operatorname{ch} u, & \beta_{31} &= \sqrt{\frac{l_1(r^1)}{c_1 - c_3}} \operatorname{sh} u, \\ \beta_{12} &= \sqrt{\frac{l_2(r^2)}{c_1 - c_2}} \operatorname{ch} v, & \beta_{32} &= \sqrt{\frac{l_2(r^2)}{c_2 - c_3}} \operatorname{sh} v, \\ \beta_{13} &= \sqrt{\frac{l_3(r^3)}{c_1 - c_3}} \operatorname{ch} w, & \beta_{23} &= \sqrt{\frac{l_3(r^3)}{c_3 - c_2}} \operatorname{sh} w. \end{aligned}$$

Система трех волн принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{l_1(r^1)}} \partial_1 w &= \sqrt{\frac{c_2 - c_3}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)}} \operatorname{ch} u, & \frac{1}{\sqrt{l_3(r^3)}} \partial_3 u &= \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{(c_1 - c_3)(c_2 - c_3)}} \operatorname{sh} w, \\ \frac{1}{\sqrt{l_1(r^1)}} \partial_1 v &= \sqrt{\frac{c_2 - c_3}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)}} \operatorname{sh} u, & \frac{1}{\sqrt{l_2(r^2)}} \partial_2 u &= \sqrt{\frac{c_1 - c_3}{(c_2 - c_1)(c_2 - c_3)}} \operatorname{sh} v, \\ \frac{1}{\sqrt{l_2(r^2)}} \partial_2 w &= \sqrt{\frac{c_1 - c_3}{(c_1 - c_2)(c_3 - c_2)}} \operatorname{ch} v, & \frac{1}{\sqrt{l_3(r^3)}} \partial_3 v &= \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{(c_1 - c_3)(c_2 - c_3)}} \operatorname{ch} w. \end{aligned}$$

Вводя новые независимые переменные (растягивая инварианты Римана)

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{c_2 - c_3}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)}} \int \sqrt{l_1(r^1)} dr^1, \\ q &= i \sqrt{\frac{c_1 - c_3}{(c_1 - c_2)(c_2 - c_3)}} \int \sqrt{l_2(r^2)} dr^2, \\ s &= \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{(c_1 - c_3)(c_2 - c_3)}} \int \sqrt{l_3(r^3)} dr^3, \end{aligned}$$

окончательно получаем систему уравнений (см. [6])

$$\begin{aligned} \partial_p w &= \operatorname{ch} u, & \partial_s u &= \operatorname{sh} w, \\ \partial_p v &= \operatorname{sh} u, & \partial_q u &= \operatorname{sh} v, \\ \partial_q w &= \operatorname{ch} v, & \partial_s v &= \operatorname{ch} w. \end{aligned}$$

Исключая, например, полевые переменные v и w ($v = \operatorname{arcsch} u_q$, $w = \operatorname{arcsch} u_s$), получаем два модифицированных уравнения sh-Гордон

$$u_{pq} = \operatorname{sh} u \sqrt{u_q^2 + 1}, \quad u_{sp} = \operatorname{ch} u \sqrt{u_s^2 + 1}$$

и вырожденное дважды модифицированное уравнение sh-Гордон

$$u_{sq} = \sqrt{(u_q^2 + 1)(u_s^2 + 1)}.$$

Аналогичные уравнения получаются и по двум другим полевым переменным v и w :

$$\begin{aligned} v_{pq} &= \operatorname{sh} v \sqrt{v_p^2 + 1}, & v_{sq} &= \operatorname{ch} v \sqrt{v_s^2 - 1}, & v_{sp} &= \sqrt{(v_p^2 + 1)(v_s^2 - 1)}, \\ w_{sq} &= \operatorname{ch} w \sqrt{w_q^2 - 1}, & w_{sp} &= \operatorname{sh} w \sqrt{w_p^2 - 1}, & w_{pq} &= \sqrt{(w_p^2 - 1)(w_q^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Подстановка $z = v + w = w + \ln \left[w_q + \sqrt{w_q^2 - 1} \right]$ переводит эти уравнения в

$$z_{sq} = \operatorname{sh} z, \quad z_{ssp} = z_s \sqrt{z_p^2 + z_{sp}^2} - z_p. \quad (14)$$

Первое из них представляет собой хорошо известное уравнение Бонне (sh-Гордон), а второе – следующий негативный коммутирующий поток из иерархии потенцированного модифицированного уравнения КдФ (см. [12]) $z_\tau = z_{sss} - z_s^3/2$. Таким образом, спектральная задача для тройки модифицированных уравнений sh-Гордон имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}_p &= \begin{pmatrix} 0 & (1 - \frac{1}{\zeta}) \operatorname{ch} u & \frac{1}{\zeta} \operatorname{sh} u \\ \operatorname{ch} u & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} u & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}_q &= \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{ch} v & 0 \\ -\frac{\zeta}{1-\zeta} \operatorname{ch} v & 0 & \frac{1}{1-\zeta} \operatorname{sh} v \\ 0 & \operatorname{sh} v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}_s &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \operatorname{ch} w \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} w \\ \zeta \operatorname{ch} w & (1 - \zeta) \operatorname{sh} w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\zeta = -\frac{(\lambda + c_1)(c_2 - c_3)}{(\lambda + c_3)(c_1 - c_2)}$$

– спектральный параметр, $\psi_1 = \sqrt{c_2 - c_3} \psi$, $\psi_2 = \sqrt{c_3 - c_1} \bar{\psi}$, $\psi_3 = \sqrt{c_1 - c_2} \tilde{\psi}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Каждая из этих трех линейных систем уравнений может быть сведена к известной спектральной задаче 2×2 для модифицированного уравнения sh-Гордон (см. [13]) с помощью преобразований, описанных в [14]. Это становится очевидным, если принять во внимание, что все три вышеприведенные спектральные задачи 3×3 имеют связь вида (11):

$$\zeta \psi^2 + (1 - \zeta) \bar{\psi}^2 - \tilde{\psi}^2 = \text{const},$$

и это означает, что функции ψ , $\bar{\psi}$, $\tilde{\psi}$ являются “квадратами базисных функций” для соответствующей спектральной задачи 2×2 (см. [14]). С другой стороны, каждая спектральная задача 3×3 может быть записана как скалярная спектральная задача третьего порядка. Например, последняя из линейных систем уравнений эквивалентна уравнению третьего порядка

$$\tilde{\psi}_{sss} - \frac{w_{ss}}{w_s} \tilde{\psi}_{ss} - (\zeta + \text{sh}^2 w + w_s^2) \tilde{\psi}_s + \left[(\zeta + \text{sh}^2 w) \frac{w_{ss}}{w_s} - 3w_s \text{sh} w \text{ch} w \right] \tilde{\psi} = 0. \quad (15)$$

В то же время хорошо известно (см., например, [15]), что иерархия уравнения Яджима–Оикава (также известная как длинно-короткий резонанс) задается спектральной задачей

$$\hat{L} \tilde{\psi} = \zeta \tilde{\psi}, \quad (16)$$

где

$$\hat{L} = \partial_s^2 - a_0 + a_1 \partial_s^{-1} a_2. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и сравнивая с (15), находим выражения коэффициентов a_k :

$$a_0 = \text{sh}^2 w + w_s^2, \quad a_1 = w_s, \quad a_2 = w_{ss} - \text{sh} w \text{ch} w,$$

что означает, что уравнение sh-Гордон вложено не только в иерархию КдФ, но и в иерархию уравнения Яджима–Оикава. Можно сказать и иначе: псевдодифференциальный оператор Манина–Сато $\hat{L} = \partial_s + A_0 \partial_s^{-1} + A_1 \partial_s^{-2} + \dots$, задающий иерархию Кадомцева–Петвиашвили (КП), допускает конечно-компонентные редукции [8]

$$\hat{L}^n = \partial_s^n + A_{0,n} \partial_s^{n-2} + \dots + A_{n-2,n} + \sum_{k=1}^N B_{k,n} \partial_s^{-1} C_{k,n},$$

где n, N – любые натуральные числа. Таким образом, редукция иерархии КП, заданная оператором

$$\hat{L} = \partial_s^2 - [\text{sh}^2 w + w_s^2] + w_s \partial_s^{-1} [w_{ss} - \text{sh} w \text{ch} w],$$

описывает трехкомпонентные бигамильтоновы структуры систем гидродинамического типа.

ПРИМЕЧАНИЕ. Введем новую полевую переменную $c = z_p$, а затем растянем независимые переменные $\partial_s \rightarrow \varepsilon \partial_s$, $\partial_p \rightarrow \varepsilon^{-1} \partial_p$, тогда второе из уравнений (14) принимает вид

$$\varepsilon^2 \partial_s c = \partial_p \frac{c + \varepsilon^2 c_{ss}}{\sqrt{c^2 + \varepsilon^2 c_s^2}}.$$

Разложим правую часть уравнения в формальный ряд Тейлора по параметру ε , получим в первом порядке по ε (при $\varepsilon \rightarrow 0$) уравнение

$$\partial_s c = \partial_p \left[\frac{c_{ss}}{c} - \frac{c_s^2}{2c^2} \right],$$

которое снова есть уравнение sh-Гордона $b_{sp} = \text{sh } b$, где $\ln c = b$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Подстановки $z^1 = w \pm v$, $z^2 = v \pm u$, $z^3 = u \pm w$ связывают решения уравнения sh-Гордона: $z_{sq}^1 = \text{sh } z^1$, $z_{pq}^2 = \text{sh } z^2$, $z_{sp}^3 = \text{ch } z^3$.

2.2. Общий случай $\eta_i(r^i) = r^i$.

В общем случае $\eta_i(r^i) = r^i$ спектральная задача (10) задает нелинейную систему

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ik} &= \frac{1}{r^i - r^k} \left[-\frac{1}{2} (\beta_{ik} + \beta_{ki}) + \sum_{m \neq i, k} (r^k - r^m) \beta_{mi} \beta_{mk} \right], \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Легко видеть, что из (12) и (13) следуют “первые интегралы”

$$\sum_{m \neq i} (r^i - r^m) \beta_{mi}^2 = V_i.$$

Например, при $N = 3$ получаем систему уравнений, описывающую бигамильтонову структуру, заданную плоскими метриками g^{ii} и $r^i g^{ii}$:

$$\begin{aligned} (r^1 - r^2) \beta_{21}^2 + (r^1 - r^3) \beta_{31}^2 &= V_1, \\ (r^2 - r^1) \beta_{12}^2 + (r^2 - r^3) \beta_{32}^2 &= V_2, \\ (r^3 - r^1) \beta_{13}^2 + (r^3 - r^2) \beta_{23}^2 &= V_3. \end{aligned}$$

Используя параметризацию

$$\begin{aligned} \beta_{21} &= \sqrt{\frac{V_1}{r^1 - r^2}} \text{ch } u, & \beta_{31} &= \sqrt{\frac{V_1}{r^3 - r^1}} \text{sh } u, \\ \beta_{32} &= \sqrt{\frac{V_2}{r^2 - r^3}} \text{ch } v, & \beta_{12} &= \sqrt{\frac{V_2}{r^1 - r^2}} \text{sh } v, \\ \beta_{13} &= \sqrt{\frac{V_3}{r^3 - r^1}} \text{ch } w, & \beta_{23} &= \sqrt{\frac{V_3}{r^2 - r^3}} \text{sh } w, \end{aligned}$$

систему уравнений (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\partial_1 w &= -\frac{\sqrt{V_1/V_3}}{2(r^3 - r^1)} \operatorname{sh} u \operatorname{sh} w + \sqrt{\frac{r^2 - r^3}{(r^1 - r^2)(r^3 - r^1)}} \sqrt{V_1} \operatorname{ch} u, \\
\partial_3 u &= -\frac{\sqrt{V_3/V_1}}{2(r^3 - r^1)} \operatorname{ch} w \operatorname{ch} u + \sqrt{\frac{r^1 - r^2}{(r^3 - r^1)(r^2 - r^3)}} \sqrt{V_3} \operatorname{sh} w, \\
V_{13} &= \frac{\sqrt{V_1 V_3}}{r^3 - r^1} \operatorname{ch} w \operatorname{sh} u, \\
\partial_1 v &= -\frac{\sqrt{V_1/V_2}}{2(r^1 - r^2)} \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \sqrt{\frac{r^2 - r^3}{(r^1 - r^2)(r^3 - r^1)}} \sqrt{V_1} \operatorname{sh} u, \\
\partial_2 u &= -\frac{\sqrt{V_2/V_1}}{2(r^1 - r^2)} \operatorname{sh} v \operatorname{sh} u + \sqrt{\frac{r^3 - r^1}{(r^1 - r^2)(r^2 - r^3)}} \sqrt{V_2} \operatorname{ch} v, \\
V_{12} &= \frac{\sqrt{V_1 V_2}}{r^1 - r^2} \operatorname{sh} v \operatorname{ch} u, \\
\partial_2 w &= -\frac{\sqrt{V_2/V_3}}{2(r^2 - r^3)} \operatorname{ch} v \operatorname{ch} w + \sqrt{\frac{r^3 - r^1}{(r^1 - r^2)(r^2 - r^3)}} \sqrt{V_2} \operatorname{sh} v, \\
\partial_3 v &= -\frac{\sqrt{V_3/V_2}}{2(r^2 - r^3)} \operatorname{sh} w \operatorname{sh} v + \sqrt{\frac{r^1 - r^2}{(r^3 - r^1)(r^2 - r^3)}} \sqrt{V_3} \operatorname{ch} w, \\
V_{23} &= \frac{\sqrt{V_2 V_3}}{r^2 - r^3} \operatorname{ch} v \operatorname{sh} w,
\end{aligned}$$

где $V_{ik} = \beta_{ik} \beta_{ki}$. В каждую тройку уравнений третья независимая переменная (третий инвариант Римана) входит как параметр, который можно удалить сдвигом вдоль каждой из двух других переменных. Таким образом, переобозначая как независимые переменные (инварианты Римана), так и зависимые функции, каждую из систем уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\partial_x w &= \frac{\sqrt{V_x/V_y}}{2(x - y)} \operatorname{sh} u \operatorname{sh} w + \sqrt{\frac{y}{x(x - y)}} \sqrt{V_x} \operatorname{ch} u, \\
\partial_y u &= \frac{\sqrt{V_y/V_x}}{2(x - y)} \operatorname{ch} w \operatorname{ch} u + \sqrt{\frac{x}{y(x - y)}} \sqrt{V_y} \operatorname{sh} w, \\
V_{xy} &= -\frac{\sqrt{V_x V_y}}{x - y} \operatorname{ch} w \operatorname{sh} u.
\end{aligned}$$

3. КОРАЗМЕРНОСТЬ ОДИН

В предыдущем разделе был рассмотрен плоский случай, когда связь между сопряженными линейными задачами (3), (4) была задана с помощью линейного дифференциального оператора первого порядка (6). В общем случае для метрики (8) произвольной

кривизны, как было показано в [16], связь уже становится нелокальной:

$$H_i = \partial_i \psi_i + \sum_{m \neq i} \beta_{mi} \psi_m + \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^M \varepsilon_{kn} H_i^{(k)} a^{(n)}, \quad (18)$$

где $\partial_i a^{(n)} = \psi_i H_i^{(n)}$, ε_{kn} – постоянная невырожденная матрица, а набор частных решений первой линейной системы уравнений (3) определяется из соответствующего уравнения Гаусса (см. [16])

$$\partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} \beta_{mi} \beta_{mj} = \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^M \varepsilon_{kn} H_i^{(k)} H_j^{(n)}, \quad i \neq j.$$

Таким образом, аналогично плоскому случаю в общем случае описание пар нелокальных дифференциальных операторов вида (18) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} \beta_{mi} \beta_{mj} &= \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^M \varepsilon_{kn} H_i^{(k)} H_j^{(n)}, \quad i \neq j, \\ r^i \partial_i \beta_{ij} + r^j \partial_j \beta_{ji} + \frac{1}{2} \beta_{ij} + \frac{1}{2} \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} r^m \beta_{mi} \beta_{mj} &= \sum_{k=1}^{\widetilde{M}} \sum_{n=1}^{\widetilde{M}} \widetilde{\varepsilon}_{kn} \widetilde{H}_i^{(k)} \widetilde{H}_j^{(n)}, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

И в этом случае для метрики $\eta_i(r^i) g^{ii}$ произвольной кривизны уравнение Гаусса

$$\begin{aligned} \eta_i(r^i) \partial_i \beta_{ij} + \eta_j(r^j) \partial_j \beta_{ji} + \frac{1}{2} \eta'_i(r^i) \beta_{ij} + \frac{1}{2} \eta'_j(r^j) \beta_{ji} + \\ + \sum_{m \neq i, j} \eta_m(r^m) \beta_{mi} \beta_{mj} &= \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^M \varepsilon_{kn} H_i^{(k)} H_j^{(n)}, \quad i \neq k, \end{aligned}$$

имеет N “первых интегралов”

$$\eta_i S_i + \frac{1}{2} \eta'_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{m \neq i} \eta_m \beta_{mi}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^M \varepsilon_{kn} H_i^{(k)} H_i^{(n)} + k_i(r^i),$$

где $k_i(r^i)$ – некоторые функции.

В данном разделе мы ограничимся рассмотрением двух простейших случаев: плоской метрики g^{ii} и метрики $\tilde{g}^{ii}$ коразмерности один, причем потребуем $\tilde{g}^{ii} = c_i g^{ii}$ или $\tilde{g}^{ii} = r^i g^{ii}$. В первом случае система уравнений

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} \beta_{mi} \beta_{mj} &= 0, \quad i \neq j, \\ c_i \partial_i \beta_{ij} + c_j \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} c_m \beta_{mi} \beta_{mj} &= H_i H_j, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (19)$$

является условием совместности линейной системы уравнений (см. [5])

$$\begin{aligned}\partial_i \psi_j &= \beta_{ji} \psi_i, \quad i \neq j, \\ 0 &= (\lambda + c_i) \partial_i \psi_i + \sum_{m \neq i} (\lambda + c_m) \beta_{mi} \psi_m + H_i a, \\ \partial_i a &= H_i \psi_i.\end{aligned}$$

Во втором случае система уравнений

$$\begin{aligned}\partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} \beta_{mi} \beta_{mj} &= 0, \quad i \neq j, \\ r^i \partial_i \beta_{ij} + r^j \partial_j \beta_{ji} + \frac{1}{2} \beta_{ij} + \frac{1}{2} \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} r^m \beta_{mi} \beta_{mj} &= H_i H_j, \quad i \neq j,\end{aligned}\tag{20}$$

является условием совместности линейной системы уравнений (см. [5])

$$\begin{aligned}\partial_i \psi_j &= \beta_{ji} \psi_i, \quad i \neq j, \\ 0 &= (\lambda + r^i) \partial_i \psi_i + \frac{1}{2} \psi_i + \sum_{m \neq i} (\lambda + r^m) \beta_{mi} \psi_m + H_i a, \\ \partial_i a &= H_i \psi_i.\end{aligned}$$

3.1. Частный случай $\eta_i(r^i) = c_i = \text{const.}$ Так же как и в плоском случае, для системы уравнений

$$\begin{aligned}\partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ik} &= \frac{1}{c_i - c_k} \left[H_i H_k + \sum_{m \neq i, k} (c_k - c_m) \beta_{mi} \beta_{mk} \right], \quad i \neq k,\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}S_i + \frac{1}{2} \sum_{m \neq i} \beta_{mi}^2 &= n_i(r^i), \\ c_i S_i + \frac{1}{2} \sum_{m \neq i} c_m \beta_{mi}^2 &= \frac{1}{2} H_i^2 + k_i(r^i),\end{aligned}$$

откуда следует

$$\sum_{m \neq i} (c_i - c_m) \beta_{mi}^2 + H_i^2 = 2[c_i n_i(r^i) - k_i(r^i)].$$

Так как при $N = 3$ последняя система уравнений может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}(c_1 - c_2)\beta_{21}^2 + (c_1 - c_3)\beta_{31}^2 + H_1^2 &= l_1(r^1), \\ (c_2 - c_1)\beta_{12}^2 + (c_2 - c_3)\beta_{32}^2 + H_2^2 &= l_2(r^2), \\ (c_3 - c_1)\beta_{13}^2 + (c_3 - c_2)\beta_{23}^2 + H_3^2 &= l_3(r^3),\end{aligned}$$

то, вводя новые независимые переменные (растягивая инварианты Римана)

$$\begin{aligned}p &= i\sqrt{\frac{c_2 - c_3}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)}} \int \sqrt{l_1(r^1)} dr^1, \\ q &= \sqrt{\frac{c_1 - c_3}{(c_1 - c_2)(c_2 - c_3)}} \int \sqrt{l_2(r^2)} dr^2, \\ s &= \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{(c_1 - c_3)(c_2 - c_3)}} \int \sqrt{l_3(r^3)} dr^3,\end{aligned}$$

и новые зависимые функции

$$\begin{aligned}H_1 &= \sqrt{l_1}R_1, & H_2 &= \sqrt{l_2}S_2, & H_3 &= \sqrt{l_3}P_3, \\ \beta_{13} &= i\sqrt{\frac{l_3}{c_1 - c_3}}P_2, & \beta_{31} &= \sqrt{\frac{l_1}{c_1 - c_3}}R_2, & \beta_{21} &= \sqrt{\frac{l_1}{c_1 - c_2}}R_3, \\ \beta_{23} &= -i\sqrt{\frac{l_3}{c_2 - c_3}}P_1, & \beta_{12} &= i\sqrt{\frac{l_2}{c_1 - c_2}}S_3, & \beta_{32} &= \sqrt{\frac{l_2}{c_2 - c_3}}S_1,\end{aligned}$$

запишем систему уравнений (5) в форме трех попарно коммутирующих гиперболических систем

$$\begin{aligned}\partial_p P_1 &= iR_3 P_2, & \partial_s R_1 &= \frac{\Delta}{\sqrt{1 - \Delta^2}} P_3 R_2, \\ \partial_p P_2 &= -iP_1 R_3 - \frac{\sqrt{1 - \Delta^2}}{\Delta} P_3 R_1, & \partial_s R_2 &= iR_3 P_1 - \frac{\Delta}{\sqrt{1 - \Delta^2}} R_1 P_3, \\ \partial_p P_3 &= \frac{\sqrt{1 - \Delta^2}}{\Delta} R_1 P_2, & \partial_s R_3 &= -iP_1 R_2, \\ \partial_p S_1 &= R_2 S_3, & \partial_q R_1 &= \Delta S_2 R_3, \\ \partial_p S_2 &= \frac{1}{\Delta} R_1 S_3, & \partial_q R_2 &= S_1 R_3, \\ \partial_p S_3 &= -R_2 S_1 - \frac{1}{\Delta} R_1 S_2, & \partial_q R_3 &= -S_1 R_2 - \Delta S_2 R_1, \\ \partial_q P_1 &= iS_3 P_2 + i\sqrt{1 - \Delta^2} P_3 S_2, & \partial_s S_1 &= -S_3 P_2 - \frac{1}{\sqrt{1 - \Delta^2}} S_2 P_3, \\ \partial_q P_2 &= -iS_3 P_1, & \partial_s S_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \Delta^2}} P_3 S_1, \\ \partial_q P_3 &= -i\sqrt{1 - \Delta^2} S_2 P_1, & \partial_s S_3 &= P_2 S_1,\end{aligned}$$

где

$$\Delta^2 = \frac{c_2 - c_3}{c_1 - c_3}, \quad P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1, \quad R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1, \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1.$$

Отметим, что каждая из этих трех систем уравнений есть редукция модели Чередника киральных полей, связанная с иерархией магнетика Гейзенберга (см. [17]).

3.2. Общий случай $\eta_i(r^i) = r^i$. В общем случае система уравнений

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{jk} &= \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ik} &= \frac{1}{r^i - r^k} \left[H_i H_k - \frac{1}{2}(\beta_{ik} + \beta_{ki}) + \sum_{m \neq i, k} (r^k - r^m) \beta_{mi} \beta_{mk} \right], \quad i \neq k, \end{aligned} \quad (21)$$

имеет набор “первых интегралов”

$$\begin{aligned} S_i + \frac{1}{2} \sum_{m \neq i} \beta_{mi}^2 &= n_i(r^i), \\ r^i S_i + \frac{1}{2} V_i + \frac{1}{2} \sum_{m \neq i} r^m \beta_{mi}^2 &= \frac{1}{2} H_i^2 + k_i(r^i), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$V_i + \sum_{m \neq i} (r^m - r^i) \beta_{mi}^2 = H_i^2 + 2[k_i(r^i) - c_i n_i(r^i)].$$

Таким образом, при $N = 3$ система из восемнадцати уравнений (21), записанная в форме трех попарно коммутирующих гиперболических систем

$$\begin{aligned} 1a: \quad \partial_1 \beta_{23} &= \beta_{21} \beta_{13}, \quad \partial_1 H_3 = \beta_{13} H_1, \\ \partial_1 \beta_{13} &= \frac{H_1 H_3}{r^1 - r^3} - \frac{\beta_{13} + \beta_{31}}{2(r^1 - r^3)} - \frac{r^2 - r^3}{r^1 - r^3} \beta_{21} \beta_{23}, \\ 1b: \quad \partial_3 \beta_{21} &= \beta_{23} \beta_{31}, \quad \partial_3 H_1 = \beta_{31} H_3, \\ \partial_3 \beta_{31} &= -\frac{H_1 H_3}{r^1 - r^3} + \frac{\beta_{13} + \beta_{31}}{2(r^1 - r^3)} - \frac{r^1 - r^2}{r^1 - r^3} \beta_{21} \beta_{23}, \\ 2a: \quad \partial_1 \beta_{32} &= \beta_{31} \beta_{12}, \quad \partial_1 H_2 = \beta_{12} H_1, \\ \partial_1 \beta_{12} &= \frac{H_1 H_2}{r^1 - r^2} - \frac{\beta_{12} + \beta_{21}}{2(r^1 - r^2)} + \frac{r^2 - r^3}{r^1 - r^2} \beta_{31} \beta_{32}, \\ 2b: \quad \partial_2 \beta_{31} &= \beta_{32} \beta_{21}, \quad \partial_2 H_1 = \beta_{21} H_2, \\ \partial_2 \beta_{21} &= -\frac{H_1 H_2}{r^1 - r^2} + \frac{\beta_{12} + \beta_{21}}{2(r^1 - r^2)} - \frac{r^1 - r^3}{r^1 - r^2} \beta_{31} \beta_{32}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{За: } \quad & \partial_2 \beta_{13} = \beta_{12} \beta_{23}, \quad \partial_2 H_3 = \beta_{23} H_2, \\
& \partial_2 \beta_{23} = \frac{H_2 H_3}{r^2 - r^3} - \frac{\beta_{23} + \beta_{32}}{2(r^2 - r^3)} - \frac{r^1 - r^3}{r^2 - r^3} \beta_{12} \beta_{13}, \\
\text{Зб: } \quad & \partial_3 \beta_{12} = \beta_{13} \beta_{32}, \quad \partial_3 H_2 = \beta_{32} H_3, \\
& \partial_3 \beta_{32} = -\frac{H_2 H_3}{r^2 - r^3} + \frac{\beta_{23} + \beta_{32}}{2(r^2 - r^3)} + \frac{r^1 - r^2}{r^2 - r^3} \beta_{12} \beta_{13},
\end{aligned}$$

имеет три “первых интеграла”

$$\begin{aligned}
(r^1 - r^2) \beta_{21}^2 + (r^1 - r^3) \beta_{31}^2 + H_1^2 &= V_1, \\
(r^2 - r^1) \beta_{12}^2 + (r^2 - r^3) \beta_{32}^2 + H_2^2 &= V_2, \\
(r^3 - r^1) \beta_{13}^2 + (r^3 - r^2) \beta_{23}^2 + H_3^2 &= V_3.
\end{aligned}$$

Для более высоких размерностей и коразмерностей наличие “первых интегралов” уже не приводит к существенному сокращению числа уравнений в каждой из таких гиперболических систем. Например, при $N = 3$, имея исходно восемнадцать уравнений, получаем следующее. В случае двух плоских метрик, где отношения соответствующих диагональных коэффициентов являются различными константами, остаются шесть уравнений первого порядка. Если отношения соответствующих диагональных коэффициентов являются произвольными функциями от инвариантов Римана, остаются девять уравнений первого порядка. Если одна из метрик плоская, а вторая коразмерности один, причем отношения соответствующих диагональных коэффициентов являются различными константами, остаются двенадцать уравнений первого порядка. Наконец, если отношения соответствующих диагональных коэффициентов являются произвольными функциями, остаются пятнадцать уравнений первого порядка (см. ниже). Во всех остальных более сложных случаях (произвольная размерность пространства N и произвольная коразмерность M) после использования “первых интегралов” уравнений в системе в инволюции будет больше, чем в исходной системе уравнений. Например, в последнем из приведенных примеров система содержит восемнадцать уравнений. Использование трех связей на первом шаге понижает число уравнений до двенадцати. Однако, поскольку связи содержат первые производные от скалярного потенциала коэффициентов вращения ортогональных систем координат V , то необходимо добавить еще три уравнения, выражающие вторые производные от V через коэффициенты вращения ортогональных систем координат. Таким образом, на самом деле система содержит то же самое число уравнений (восемнадцать), так как всякое уравнение второго порядка эквивалентно паре уравнений первого порядка.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, что задача классификации полугамильтоновых систем гидродинамического типа с такими дополнительными и важными свойствами, как нулевая кривизна диагональной метрики или ее кривизна коразмерности один, сводится к

решению хорошо известных интегрируемых методом обратной задачи уравнений (негативные потоки уравнения Ландау–Лифшица и обобщения уравнений типа Эрнста, известного в общей теории относительности).

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность Е. В. Ферапонтову, В. В. Соколову и А. М. Камчатнову за многочисленные и стимулирующие обсуждения, живой интерес и удачные советы, а также рецензенту, указавшему на ряд небрежностей, допущенных в первоначальном варианте статьи.

Список литературы

- [1] *Е. В. Ферапонтов.* Гамильтоновы системы гидродинамического типа и их реализация на гиперповерхностях псевдоевклидова пространства. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. Т. 22. Ред. Н. М. Остиану. М.: ВИНТИ, 1990. С. 59–96.
- [2] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков.* УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98.
- [3] *М. В. Павлов.* Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 1. С. 21–23; Т. 338. № 2. С. 165–167.
- [4] *М. В. Павлов, С. П. Царев.* УМН. 1991. Т. 46. № 4. С. 169–170.
- [5] *О. И. Мозов.* УМН. 2002. Т. 57. № 6. С. 189–190; Функц. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. № 3. С. 36–47; С. 96; УМН. 2002. Т. 57. № 3(345). С. 155–156.
- [6] *Е. В. Ferapontov.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 1–12.
- [7] *Б. А. Dubrovin.* Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups. Lectures given at the 1st session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) (Montecatini Terme, Italy, June 14–22). Lecture Notes in Math. V. 1620. Eds. M. Francaviglia, S. Greco. Berlin: Springer, 1996. P. 120–348.
- [8] *А. Yu. Orlov.* Volterra operator algebra for zero curvature representation. Universality of KP. In: Proceedings of the III Potsdam–Kiev Workshop at Clarkson University, Potsdam, NY, USA, August, 1–11, 1991. Eds. A. S. Fokas, D. J. Kaup, A. C. Newell, V. E. Zakharov. Berlin: Springer, 1993. P. 126–131.
- [9] *С. П. Царев.* Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 3. С. 534–537; Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1991. Т. 54. № 5. С. 1048–1068.
- [10] *Е. В. Ferapontov, М. В. Pavlov.* Physica D. 1991. V. 52. P. 211–219.
- [11] *G. Darboux.* Leçons sur les Systèmes Orthogonaux et les Coordonnées Curvilignes. Paris: Gauthier-Villar, 1910.
- [12] *А. М. Kamchatnov, М. В. Pavlov.* Phys. Lett. A. 2002. V. 301. № 3–4. P. 269–274.
- [13] *А. Б. Борисов, С. А. Зыков.* ТМФ. 1998. Т. 115. С. 199–214.
- [14] *М. А. Kamchatnov, R. A. Kraenkel.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. L13–L18.
- [15] *W. Oevel, W. Strampp.* Commun. Math. Phys. 1993. Т. 157. С. 51–81.
- [16] *Е. В. Ферапонтов.* Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 3. С. 37–49.
- [17] *И. В. Cherednik.* J. Nucl. Phys. 1981. V. 33. P. 278–282.