Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Ковальский, Г. П. Пронько, Q -операторы Бакстера для интегрируемой DST-цепочки, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 310–321

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1784>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:10:32

© 2005 г.

А.Э. Ковальский*, Г.П. Пронько†

Q-ОПЕРАТОРЫ БАКСТЕРА ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМОЙ DST-ЦЕПОЧКИ

Построены операторы Бакстера для интегрируемой DST-цепочки в виде следа от монодромий некоторых M -операторов, которые действуют в квантовом и вспомогательном пространствах. В рамках этой процедуры получены два базисных M -оператора и установлены некоторые функциональные соотношения между ними, такие как переплетающие соотношения и соотношения вронскианного типа между двумя базисными Q -операторами.

Ключевые слова: интегрируемые цепочки, алгебраический анзац Бете, функциональные уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемая периодическая квантовая DST-цепочка¹⁾ является квантовой системой, гамильтониан для которой мы выберем в следующем виде (он соответствует определенному выбору параметров $\omega_0, \gamma, \epsilon$ и m_{ij} в гамильтониане из работы [1]):

$$H = \sum_{k=1}^N \left[\varphi_k^+ \varphi_k + \frac{(\varphi_k^+ \varphi_k)^2}{2} + \varphi_{k+1}^+ \varphi_k \right], \quad (1)$$

где канонические переменные φ_k^+ и φ_k удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\varphi_i, \varphi_j^+] = \delta_{ij}$ и периодическим условиям $\varphi_{k+N} = \varphi_k, \varphi_{k+N}^+ = \varphi_k^+$. Эта система может быть рассмотрена в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния или метода R -матрицы. С квантовой DST-цепочкой связан оператор Лакса, действующий в тензорном произведении n -го квантового пространства и двумерного вспомогательного пространства $\mathbb{C}^2$ (см. [2], [3]), вида

$$L_n(x) = \begin{pmatrix} x - i/2 - i\varphi_n^+ \varphi_n & \varphi_n^+ \\ \varphi_n & i \end{pmatrix}, \quad (2)$$

---

¹⁾DST-цепочка (discrete self-trapping) – цепочка с дискретным самозахватом.

---

*ГНЦ ИФВЭ, Протвино, Московская обл., Россия; МФТИ, г. Долгопрудный, Московская обл., Россия.

†ГНЦ ИФВЭ, Протвино, Московская обл., Россия, International Solvay Institute, Брюссель, Бельгия. E-mail: pronko@mx.ihep.su

где x – спектральный параметр. При этом фундаментальные коммутационные соотношения для элементов оператора Лакса могут быть записаны в следующей R -матричной форме:

$$R_{12}(x-y)L_n^1(x)L_n^2(y) = L_n^2(y)L_n^1(x)R_{12}(x-y), \quad (3)$$

где индексы 1 и 2 обозначают различные вспомогательные пространства,

$$R_{12}(x) = x + iP_{12}, \quad (4)$$

P_{12} – оператор перестановки во вспомогательных пространствах 1 и 2. Такие же коммутационные соотношения верны и для матрицы монодромии $T(x) = \prod_{n=1}^N L_n(x)$ (множители упорядочены справа налево), и это, в свою очередь, означает, что $[t(x), t(y)] = 0$, где $t(x) = \text{Tr } T(x)$ (в этом выражении след берется по вспомогательному пространству). Коэффициенты полинома $t(x)$ являются, таким образом, семейством коммутирующих операторов, причем гамильтониан H и оператор числа частиц принадлежат этому семейству (а именно, если $t(x) = \sum_{k=0}^N (x - i/2)^k H^{(k)}$, то оператор числа частиц $\hat{n} = \sum_{k=1}^N \varphi_k^+ \varphi_k = iH^{(N-1)}$, гамильтониан $H = iH^{(N-1)} - (H^{(N-1)})^2/2 + H^{(N-2)}$).

Собственные векторы и собственные значения оператора $t(x)$ могут быть построены с помощью алгебраического анзаца Бете (далее ААБ, см., например, [4]). При этом подходе рассматривается матрица монодромии

$$T(x) = \prod_{n=1}^N L_n(x) = \begin{pmatrix} \hat{A}(x) & \hat{B}(x) \\ \hat{C}(x) & \hat{D}(x) \end{pmatrix}.$$

Для DST-модели существует так называемый вакуум Бете $C(x)\Omega = 0$ (здесь $\Omega = \prod \otimes \omega_k$, где $\varphi_k \omega_k = 0$). Векторы $\hat{B}(x_1) \dots \hat{B}(x_l)\Omega$ являются собственными векторами оператора $\text{Tr } T(x) = \hat{A}(x) + \hat{D}(x)$ с собственными значениями

$$t(x) = \left(x - \frac{i}{2}\right)^N \prod_{j=1}^l \frac{(x - x_j + i)}{(x - x_j)} + i^N \prod_{j=1}^l \frac{(x - x_j - i)}{(x - x_j)},$$

причем x_i подчиняются уравнениям Бете

$$\prod_{j=1}^l \frac{(x_i - x_j - i)}{(x_i - x_j + i)} = -\frac{(x_i - i/2)^N}{i^N}.$$

Таким образом, полиномы $q(x) = \prod_{j=1}^l (x - x_j)$ удовлетворяют уравнению Бакстера

$$t(x)q(x) = \left(x - \frac{i}{2}\right)^N q(x - i) + i^N q(x + i). \quad (5)$$

Следуя Бакстеру [5], определим оператор $Q(x)$ с помощью следующего соотношения:

$$t(x)Q(x) = \left(x - \frac{i}{2}\right)^N Q(x - i) + i^N Q(x + i), \quad (6)$$

при этом $[t(x), Q(y)] = 0$, $[Q(x), Q(y)] = 0$.

Рассматриваемая модель занимает промежуточное место между двумя другими интегрируемыми моделями: спиновой XXX -цепочкой и цепочкой Тоды (операторы Лакса этих моделей также переплетаются рациональной R -матрицей (4)). Как и в случае спиновой XXX -цепочки, для DST-модели существует Q -оператор с полиномиальными собственными значениями по спектральному параметру. Он соответствует ААБ. Если мы рассмотрим уравнение (5) как дискретный аналог дифференциального уравнения, сразу возникнет вопрос о существовании второго решения уравнения (5). Вторые решения интенсивно изучались в последнее время [6], [7]. Собственные значения второго Q -оператора для DST-модели являются мероморфными функциями (в случае цепочки Тоды нельзя построить ААБ, однако существует два Q -оператора: один с целыми собственными значениями, другой с мероморфными [8]). В следующей части эти два решения, удовлетворяющие (6), будут построены.

Существование второго Q -оператора, линейно независимого от первого, видно из следующих простых соображений (аналогичные рассуждения для случая спиновой XXX -цепочки см. в [7]). Рассмотрим уравнение Бакстера для собственного значения первого Q -оператора $q(x)$, которое является полиномом степени n (в случае DST-цепочки n равно числу частиц, находящихся на узлах, т.е. собственному значению оператора числа частиц $\sum_{i=1}^N \varphi_i^+ \varphi_i$), и собственного значения следа матрицы монодромии $t(x)$, являющегося полиномом степени N . Имеем

$$t(x)q(x) = \left(x - \frac{i}{2}\right)^N q(x-i) + i^N q(x+i), \quad (7)$$

или

$$\frac{t(x)}{q(x+i)q(x-i)} = \frac{(x-i/2)^N}{q(x)q(x+i)} + \frac{i^N}{q(x)q(x-i)}. \quad (8)$$

Умножим это соотношение на $\Gamma^N(-i(x-i/2))$, получим

$$\frac{t(x)\Gamma^N(-i(x-i/2))}{q(x+i)q(x-i)} = \frac{i^N\Gamma^N(-i(x+i/2))}{q(x)q(x+i)} + \frac{i^N\Gamma^N(-i(x-i/2))}{q(x)q(x-i)}. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$S(x) = \frac{i^N\Gamma^N(-i(x+i/2))}{q(x)q(x+i)}, \quad (10)$$

тогда

$$\frac{t(x)\Gamma^N(-i(x-i/2))}{q(x+i)q(x-i)} = S(x) - S(x-i). \quad (11)$$

Перепишем $S(x)$ в виде

$$S(x) = i^N\Gamma^N\left(-i\left(x + \frac{i}{2}\right)\right) \left[\frac{q_1(x)}{q(x+i)} + \frac{q_2(x)}{q(x)} \right], \quad (12)$$

где $q_1(x)$ и $q_2(x)$ — полиномы степени, меньшей n . Подставим это разложение в уравнение Бакстера (8):

$$\frac{t(x)}{q(x+i)q(x-i)} = \left(x - \frac{i}{2}\right)^N \left[\frac{q_1(x)}{q(x+i)} + \frac{q_2(x)}{q(x)} \right] + i^N \left[\frac{q_1(x-i)}{q(x)} + \frac{q_2(x-i)}{q(x-i)} \right]. \quad (13)$$

Так как $t(x)$ — полином, то $(x - i/2)^N q_2(x) + i^N q_1(x-i) = r(x)q(x)$, где $r(x)$ — полином степени, меньшей N . Выразив функцию $q_1(x)$ через $q_2(x)$ и $r(x)$, подставим ее в $S(x)$, получим

$$\begin{aligned} S(x) = & i^N \Gamma^N \left(-i \left(x + \frac{i}{2} \right) \right) r(x+i) + i^N \Gamma^N \left(-i \left(x + \frac{i}{2} \right) \right) \frac{q_2(x)}{q(x)} - \\ & - \Gamma^N \left(-i \left(x + \frac{3i}{2} \right) \right) \frac{q_2(x+i)}{q(x+i)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы представить $S(x)$ в виде

$$S(x) = \frac{p(x+i)}{q(x+i)} - \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (15)$$

тогда $p(x)$ будет искомым собственным значением второго Q -оператора. Действительно, из (10) получаем

$$i^N \Gamma^N \left(-i \left(x + \frac{i}{2} \right) \right) = p(x+i)q(x) - p(x)q(x+i), \quad (16)$$

и $i^N \Gamma^N (-i(x - i/2)) = p(x)q(x-i) - p(x-i)q(x)$. Умножая последнее равенство на $(-i(x - i/2))^N$ и вычитая из предыдущего, мы видим, что $p(x)$ удовлетворяет тому же уравнению Бакстера, что и $q(x)$:

$$t(x)p(x) = \left(x - \frac{i}{2}\right)^N p(x-i) + i^N p(x+i). \quad (17)$$

Видно, что необходимо найти такую функцию $g(x)$, что

$$g(x+i) - g(x) = i^N \Gamma^N \left(-i \left(x + \frac{i}{2} \right) \right) r(x+i). \quad (18)$$

Будем искать $g(x)$ в виде

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(-ix - k), \quad (19)$$

тогда $g(x+i) - g(x) = -f(-ix)$, т.е. $f(-ix) = -i^N \Gamma^N (-i(x + i/2))r(x+i)$, и

$$g(x) = -i^N \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^N \left(-i \left(x + \frac{i}{2} \right) - k \right) r(x+i-ik). \quad (20)$$

Искомое собственное значение есть

$$p(x) = g(x)q(x) - i^N \Gamma^N \left(-i \left(x + \frac{i}{2} \right) \right) q_2(x). \quad (21)$$

Оно является мероморфной функцией от x с полюсами при целых значениях $y = -ix + 1/2$ (сходимость ряда для $g(x)$ при нецелом $-i(x + i/2)$ обеспечивается слагаемым $-k$ в аргументе гамма-функции).

В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример полиномиального решения уравнения Бакстера в случае двух степеней свободы

$$q(x) = x^2 - 2ix + \frac{1}{4}.$$

Это решение соответствует собственному вектору $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 0\rangle - |0, 2\rangle)$ и собственному значению матрицы монодромии

$$t(x) = x^2 - 3ix - \frac{9}{4}.$$

Здесь введено следующее обозначение для векторов квантового пространства:

$$|k_1, k_2\rangle = (\varphi_1^+)^{k_1} (\varphi_2^+)^{k_2} |0, 0\rangle,$$

где $|0, 0\rangle$ – бетеvский вакуум (т.е. $\varphi_1|0, 0\rangle = \varphi_2|0, 0\rangle = 0$).

Явное построение полиномов q_1, q_2, r по методу, описанному выше, дает

$$q_1(x) = -\frac{i}{2}x + \frac{1}{4}, \quad q_2(x) = \frac{i}{2}x + \frac{3}{4}, \quad r(x) = \frac{i}{2}x + \frac{1}{4}.$$

При этом для собственного значения второго Q -оператора получаем

$$p(x) = \left(x^2 - 2ix + \frac{1}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^2 \left(-ix + \frac{1}{2} - k \right) \left(\frac{i}{2}x + \frac{k}{2} - \frac{1}{4} \right) + \Gamma^2 \left(-ix + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{i}{2}x + \frac{3}{4} \right).$$

2. БАЗИСНЫЕ Q -ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ DST-МОДЕЛИ

Будем искать базисные Q -операторы с помощью метода, описанного в [8]. Согласно этому методу $Q^{(1,2)}$ -операторы суть следы операторов $\widehat{Q}^{(1,2)}$, которые представляют собой произведения $M^{(1,2)n}$ -операторов, действующих в n -м квантовом пространстве и во вспомогательном пространстве Γ (пространстве представления алгебры Гейзенберга $[\rho, \rho^+] = 1$). Так как мы будем рассматривать произведение $L(x)M^{(1,2)}(x)$, то общим вспомогательным пространством для этого объекта будет $\Gamma \otimes \mathbb{C}^2$, где мы можем ввести проекторы

$$\Pi_{ij}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_i \frac{1}{(\rho^+ \rho + 1)} (1, \rho^+)_j, \quad \Pi_{ij}^- = \begin{pmatrix} -\rho^+ \\ 1 \end{pmatrix}_i \frac{1}{(\rho^+ \rho + 2)} (-\rho, 1)_j. \quad (22)$$

Следуя [9], мы налагаем на произведения $L(x)M^{(1,2)}(x)$ и $M^{(1,2)}(x)L(x)$ условие, что они являются треугольными в смысле проекторов $\Pi^\pm$: для $M_n^{(1)}(x)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\Pi_{ik}^-(L_n(x))_{kl}M_n^{(1)}(x)\Pi_{lj}^+ &= 0, \\ \Pi_{ik}^+M_n^{(1)}(x)(L_n(x))_{kl}\Pi_{lj}^- &= 0;\end{aligned}\tag{23}$$

для $M_n^{(2)}(x)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\Pi_{ik}^+(L_n(x))_{kl}M_n^{(2)}(x)\Pi_{lj}^- &= 0, \\ \Pi_{ik}^-M_n^{(2)}(x)(L_n(x))_{kl}\Pi_{lj}^+ &= 0.\end{aligned}\tag{24}$$

Рассмотрим систему уравнений для $M^{(1)}$. Из первого уравнения в (23) следует, что

$$\begin{aligned}M^{(1)}(x)\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_i &= \tilde{L}(x)_{ij}\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_j A^{(1)}(x), \\ B^{(1)}(x)\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_i &= \tilde{L}(x+i)_{ij}\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_j M^{(1)}(x),\end{aligned}\tag{25}$$

где мы ввели оператор

$$\tilde{L}(x) = \begin{pmatrix} i & -\varphi^+ \\ -\varphi & x - 3i/2 - \varphi^+\varphi \end{pmatrix},$$

который обладает следующими свойствами: $L(x)\tilde{L}(x) = i(x-i/2)I$ (I — единичная матрица), $L(x) + \tilde{L}(x+i) = \text{Tr } L(x) \cdot I$ (это тождество обеспечивает сдвиг аргумента в (25), что и приводит в итоге к уравнению в конечных разностях). Система (25) допускает решение в виде $B^{(1)}(x) = cM^{(1)}(x+i)$, $A^{(1)}(x) = c^{-1}M^{(1)}(x)$, где c — число. Выберем $c = i$. Рассматривая аналогично условие треугольности для правого умножения (второе из уравнений (23)), мы приходим к системе

$$\begin{aligned}\tilde{L}(x+i)_{ij}\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_j M^{(1)}(x) &= M^{(1)}(x+i)\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_i, \\ M^{(1)}(x)L(x)_{ij}\begin{pmatrix} -\rho^+ \\ 1 \end{pmatrix}_j &= i\begin{pmatrix} -\rho^+ \\ 1 \end{pmatrix}_i M^{(1)}(x+i).\end{aligned}\tag{26}$$

Такое же рассмотрение для $M^{(2)}$ приводит к системе

$$\begin{aligned}\tilde{L}(x+i)_{ij}\begin{pmatrix} -\rho^+ \\ 1 \end{pmatrix}_j M^{(2)}(x) &= M^{(2)}(x+i)\begin{pmatrix} -\rho^+ \\ 1 \end{pmatrix}_i, \\ M^{(2)}(x)L(x)_{ij}\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_j &= i\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_i M^{(2)}(x+i).\end{aligned}\tag{27}$$

При этом верны следующие правила умножения:

$$(L_n(x))_{ij}M_n^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}_i M_n^{(1)}(x-i) \frac{1}{\rho^+\rho+1} (1, \rho^+)_{j+}$$

$$+ \binom{-\rho^+}{1}_i \frac{1}{\rho^+ \rho + 2} M_n^{(1)}(x+i)(-\rho, 1)_j + \Pi_{ik}^+(L_n(x))_{kl} M_n^{(1)}(x) \Pi_{lj}^-; \quad (28)$$

$$(L_n(x))_{ij} M_n^{(2)}(x) = \binom{1}{\rho}_i \frac{1}{\rho^+ \rho + 1} M_n^{(2)}(x+i)(1, \rho^+)_j + \\ + \binom{-\rho^+}{1}_i M_n^{(2)}(x-i) \frac{1}{\rho^+ \rho + 2} (-\rho, 1)_j + \Pi_{ik}^-(L_n(x))_{kl} M_n^{(2)}(x) \Pi_{lj}^+; \quad (29)$$

$$M_n^{(1)}(x)(L_n(x))_{ij} = \binom{1}{\rho}_i \frac{1}{\rho^+ \rho + 1} M_n^{(1)}(x-i)(1, \rho^+)_j + \\ + \binom{-\rho^+}{1}_i M_n^{(1)}(x+i) \frac{1}{\rho^+ \rho + 2} (-\rho, 1)_j + \Pi_{ik}^-(L_n(x))_{kl} M_n^{(1)}(x) \Pi_{lj}^+; \quad (30)$$

$$M_n^{(2)}(x)(L_n(x))_{ij} = \binom{1}{\rho}_i M_n^{(2)}(x+i) \frac{1}{\rho^+ \rho + 1} (1, \rho^+)_j + \\ + \binom{-\rho^+}{1}_i \frac{1}{\rho^+ \rho + 2} M_n^{(2)}(x-i)(-\rho, 1)_j + \Pi_{ik}^+(L_n(x))_{kl} M_n^{(2)}(x) \Pi_{lj}^-. \quad (31)$$

Мы не рассматриваем структуры последних членов в правых частях этих правил умножения. Действительно, треугольная структура (23), (24) будет верна также и для произведений L_n и M_n , так как квантовые операторы с разными n коммутируют друг с другом. Поэтому эти соотношения гарантируют, что следы монодромий $M^{(1,2)}$ по вспомогательному пространству (если они существуют),

$$Q^{(1,2)}(x) = \text{Tr} \widehat{Q}^{(1,2)}(x) = \text{Tr} \prod_{k=1}^N M_k^{(1,2)}(x), \quad (32)$$

удовлетворяют уравнению Бакстера (6).

Для решения систем (26), (27) мы будем использовать голоморфное представление операторов ρ, ρ^+ . При этом оператор ρ^+ становится оператором умножения $(\rho^+ \psi)(\alpha) = \alpha \psi(\alpha)$, а оператор ρ — оператором дифференцирования: $(\rho \psi)(\alpha) = \partial \psi(\alpha) / \partial \alpha$. Действие оператора в голоморфном представлении определяется его ядром:

$$(\widehat{M} \psi)(\alpha) = \int d^2 \mu(\beta) M(\alpha, \bar{\beta}) \psi(\beta), \quad (33)$$

где мера интегрирования определена следующим образом: $d^2 \mu(\beta) = e^{-\beta \bar{\beta}} d\beta d\bar{\beta}$. В этом представлении операторы, удовлетворяющие системам (26), (27), выглядят следующим образом:

$$M^{(1)}(x, \alpha, \bar{\beta}) = e^{-i\bar{\beta}\varphi^+} \frac{\Gamma(-i(x-i/2))}{\Gamma(-\varphi^+ \varphi - i(x-i/2))} e^{-i\alpha\varphi}, \\ M^{(2)}(x, \alpha, \bar{\beta}) = e^{i\alpha\varphi} e^{i\pi\varphi^+ \varphi} \Gamma(-\varphi^+ \varphi - i(x-i/2)) e^{i\bar{\beta}\varphi^+}. \quad (34)$$

Для нахождения монодромии $\widehat{Q}^{(1,2)}(x, \alpha, \bar{\beta})$ необходимо взять упорядоченное произведение $M^{(1,2)}$ -операторов:

$$\widehat{Q}^{(i)}(x, \alpha, \bar{\beta}) = \int \prod_{i=1}^{N-1} d^2 \mu(\gamma_i) M_N^{(i)}(x, \alpha, \bar{\gamma}_{N-1}) M_{N-1}^{(i)}(x, \gamma_{N-1}, \bar{\gamma}_{N-2}) \times \cdots \\ \cdots \times M_2^{(i)}(x, \gamma_2, \bar{\gamma}_1) M_1^{(i)}(x, \gamma_1, \bar{\beta}). \quad (35)$$

Для нахождения $Q^{(1,2)}$ -операторов необходимо взять след операторов $\widehat{Q}^{(1,2)}$. След оператора Q в голоморфном представлении имеет вид

$$\mathrm{Tr} Q = \int d^2 \mu(\alpha) \widehat{Q}(\alpha, \bar{\alpha}), \quad (36)$$

где $\widehat{Q}(\alpha, \bar{\alpha})$ – ядро оператора $\widehat{Q}$.

Собственные значения $Q^{(1)}(x)$ являются полиномами по x . В самом деле, $Q^{(1)}$ действует на базисные векторы $|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = (\varphi_1^+)^{n_1} (\varphi_2^+)^{n_2} \dots (\varphi_N^+)^{n_N} |0\rangle$, где $|0\rangle$ – бегтевский вакуум, $\varphi_k |0\rangle = 0$, $k = 1, \dots, N$, следующим образом:

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(x) |n_1, \dots, n_N\rangle &= \sum_{m_1, \dots, m_N=0}^{n_1, \dots, n_N} \prod_{k=1}^N \frac{(-1)^{m_k}}{m_k!} \times \\ &\times \frac{\Gamma(-i(x - i/2))}{\Gamma(-i(x - i/2) - n_k + m_k)} \frac{n_k!}{(n_k - m_k)!} |\dots, n_k - m_k + m_{k-1}, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Отсюда видно, что $Q^{(1)}(x)$ оставляет инвариантным подпространство векторов с одинаковым общим числом частиц $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$, и все матричные элементы $Q^{(1)}$ являются полиномами по x . В дальнейшем будет доказано, что $[Q^{(1)}(x_1), Q^{(1)}(x_2)] = 0$, поэтому собственные значения операторов $Q^{(1)}$ являются полиномами по x . Построенный в работе [3] Q -оператор соответствует $Q^{(1)}$. Его действие на базисные векторы (в [3] выбрано координатное представление для квантовых операторов, в котором базисными векторами являются полиномы $x_1^{n_1} \dots x_N^{n_N}$) схоже с действием $Q^{(1)}$ в (37).

Для сравнения приведем действие оператора $Q^{(2)}$ на те же базисные векторы:

$$\begin{aligned} Q^{(2)}(x) |n_1, \dots, n_N\rangle &= e^{i\pi N} \sum_{m_1, \dots, m_N=0}^{\infty} \prod_{k=1}^N \Gamma(-ix - 1/2 - n_k - m_{k-1}) \times \\ &\times \frac{(m_{k-1} + n_k)!}{m_k! (n_k + m_{k-1} - m_k)!} |\dots, n_k + m_{k-1} - m_k, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

В отличие от первого оператора здесь суммирование ведется по бесконечному набору m_k , который, однако, ограничен условиями $m_k - m_{k-1} \leq n_k$.

Отметим, что при выборе некоторых реализаций для квантовых операторов и операторов вспомогательного пространства возможна факторизация Q -операторов, впервые рассмотренная в работе [10] (см. также [9]). Например, в координатном представлении для квантовых операторов и операторов во вспомогательном пространстве ядро Q -оператора имеет следующий вид (см. [3], [9]):

$$Q(x_1, \dots, x_N, x'_1, \dots, x'_N) = \prod_{k=1}^N q_k(x_k, x'_{k+1}, x'_k). \quad (39)$$

В работе [3] построен один из Q -операторов в форме (39). В подобной факторизованной форме можно также построить второй Q -оператор (это было отмечено в [3]). Однако с точки зрения подхода работы [8] происхождение такой факторизации неясно.

В простейшем случае $N = 1$ получаем ($n = \varphi^+ \varphi$)

$$Q^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(-ix + 1/2)}{\Gamma(-ix + 1/2 - n - k)}, \quad (40)$$

$$Q^{(2)}(x) = e^{i\pi n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!n!} \Gamma(-ix - 1/2 - n - m). \quad (41)$$

Как и ожидалось, собственные значения $Q^{(1)}$ являются полиномами степени n , а собственные значения $Q^{(2)}$ являются мероморфными функциями спектрального параметра.

Можно найти решения систем (26), (27) в следующем виде:

$$\begin{aligned} M^{(1)}(x, \rho) &= P^{\rho\varphi} (i - \varphi \rho^+)^{-i(x-i/2)} e^{-x\pi/2}, \\ M^{(2)}(x, \rho) &= P^{\rho\varphi} \Gamma(-\rho^+ \rho - \varphi^+ \varphi - i(x - i/2)), \end{aligned} \quad (42)$$

где оператор $P^{\rho\varphi} = e^{\pi/2(\varphi^+ \rho - \varphi \rho^+)} e^{i\pi/2(\rho^+ \rho - \varphi^+ \varphi)}$ обладает свойствами оператора перестановки:

$$\begin{aligned} P^{\rho\varphi} \varphi &= i \rho P^{\rho\varphi}, & P^{\rho\varphi} \varphi^+ &= -i \rho^+ P^{\rho\varphi}, \\ \varphi P^{\rho\varphi} &= -i P^{\rho\varphi} \rho, & \varphi P^{\rho\varphi} \rho^+ &= i P^{\rho\varphi} \rho^+, \end{aligned} \quad (43)$$

$P^{\rho\varphi}$ – оператор со следующими свойствами: $\varphi P^{\rho\varphi} = -i \rho P^{\rho\varphi}$, $P^{\rho\varphi} \varphi^+ = -i P^{\rho\varphi} \rho^+$. При этом, однако, $\varphi^+ P^{\rho\varphi} = i [P^{\rho\varphi}, \rho^+]$, $P^{\rho\varphi} \varphi = -i [P^{\rho\varphi}, \rho]$. Явное выражение для оператора $P^{\rho\varphi}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} P^{\rho\varphi} &= \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (i\varphi \rho^+)^k \frac{\Gamma(\rho^+ \rho + 1)}{\Gamma(\rho^+ \rho + k + 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (i\varphi^+ \rho)^k \frac{\Gamma(\varphi^+ \varphi + 1)}{\Gamma(\varphi^+ \varphi + k + 1)} \right] \times \\ &\times \frac{\Gamma(\rho^+ \rho + \varphi^+ \varphi + 1)}{\Gamma(\rho^+ \rho + 1) \Gamma(\varphi^+ \varphi + 1)} e^{i\pi \varphi^+ \varphi}. \end{aligned} \quad (44)$$

Операторы $M_n^{(1,2)}$ и $L_n(x)$ удовлетворяют определенным переплетающим соотношениям, из которых следует, что Q -операторы и трансфер-матрица коммутируют. Так как метод получения перелетающих соотношений такой же, как и в случае цепочки Тоды, более того, все переплетающие R -матрицы совпадают с переплетающими матрицами для цепочки Тоды, то ниже мы приводим все переплетающие соотношения без их вывода. Подробности можно найти в работе [8].

Для оператора Лакса и M -операторов справедливо равенство

$$R_{kl}^{(i)}(x-y) (L_n(x))_{lm} M_n^{(i)}(y) = M_n^{(i)}(y) (L_n(x))_{kl} R_{lm}^{(i)}(x-y). \quad (45)$$

Соответствующие R -матрицы имеют вид

$$R_{kl}^{(1)}(x-y) = \begin{pmatrix} x-y+i\rho^+\rho & -i\rho^+ \\ -i\rho & i \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$R_{kl}^{(2)}(x-y) = \begin{pmatrix} i & i\rho^+ \\ i\rho & x-y+i+i\rho^+\rho \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Отметим, что в работе [3] уравнение (45) для матрицы $R^{(1)}$ было рассмотрено как определяющее для элементарных блоков, из которых потом строится матрица монодромии, след которой есть Q -оператор.

Для операторов $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$, действующих в разных вспомогательных пространствах, верно соотношение

$$M_n^{(1)}(x, \rho) M_n^{(2)}(y, \tau) R^{12}(x - y) = R^{12}(x - y) M_n^{(2)}(y, \tau) M_n^{(1)}(x, \rho), \quad (48)$$

где переплетающая матрица R^{12} задана в виде ядра в голоморфном представлении,

$$R^{12}(x, \alpha, \bar{\beta}; \gamma, \bar{\delta}) = \sum_{n=0} \frac{((\alpha - \gamma)(\bar{\beta} - \bar{\delta}))^n}{n! \Gamma(-ix + n + 1)}. \quad (49)$$

Здесь $\alpha, \bar{\beta}$ – голоморфные переменные для вспомогательного пространства представления операторов ρ и ρ^+ , и $\gamma, \bar{\delta}$ – голоморфные переменные для вспомогательного пространства представления операторов τ и τ^+ .

Для $M^{(1)}$ -операторов, действующих в различных вспомогательных пространствах, имеем

$$R^{(11)}(x - y) M^{(1)}(x, \rho) M^{(1)}(y, \tau) = M^{(1)}(y, \tau) M^{(1)}(x, \rho) R^{(11)}(x - y), \quad (50)$$

где

$$R^{(11)}(x) = P_{\rho\tau} (1 + \rho^+ \tau)^{-ix}, \quad (51)$$

$P_{\rho\tau}$ – оператор перестановки во вспомогательных пространствах.

Для $M^{(2)}$ -операторов, действующих в различных вспомогательных пространствах, справедливо соотношение

$$R^{(22)}(x - y) M^{(2)}(x, \rho) M^{(2)}(y, \tau) = M^{(2)}(y, \tau) M^{(2)}(x, \rho) R^{(22)}(x - y), \quad (52)$$

где

$$R^{(22)}(x) = P_{\rho\tau} (1 + \tau^+ \rho)^{-ix}. \quad (53)$$

Эти переплетающие соотношения приводят к взаимной коммутации Q -операторов и t -матрицы:

$$[t(x), Q^{(i)}(y)] = 0, \quad [Q^{(i)}(x), Q^{(j)}(y)] = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (54)$$

Итак, нами построено два решения операторного уравнения Бакстера. Докажем теперь линейную независимость этих решений, определив однопараметрическое семейство конечноразностных аналогов определителя Вронского

$$W_m = Q_1(x - im) Q_2(x + i) - Q_1(x + i) Q_2(x - im), \quad (55)$$

где m – неотрицательное целое число. Рассмотрим свойства этих объектов, вытекающие непосредственно из уравнения Бакстера:

$$\begin{aligned} t(x)Q_1(x) &= \left(x - \frac{i}{2}\right)^N Q_1(x-i) + i^N Q_1(x+i), \\ t(x)Q_2(x) &= \left(x - \frac{i}{2}\right)^N Q_2(x-i) + i^N Q_2(x+i). \end{aligned} \quad (56)$$

Умножим первое уравнение на $Q_2(x)$, второе – на $Q_1(x)$ и вычтем одно уравнение из другого, получим

$$\left(x - \frac{i}{2}\right)^N W_0(x-i) = i^N W_0(x),$$

т.е. W_0 обязательно содержит множитель $\Gamma^N(-i(x+i/2))$. Далее, умножим первое из уравнений (56) на $Q_2(x-i)$, второе – на $Q_1(x-i)$. Получим

$$W_1(x) = (-i)^N t(x)W_0(x-i).$$

В случае произвольного m , умножая первое уравнение на $Q_2(x-im)$, второе – на $Q_1(x-im)$, получаем

$$\left(x - \frac{i}{2}\right)^N W_{m-2}(x-2i) + i^N W_m(x) = t(x)W_{m-1}(x-i). \quad (57)$$

Из этих уравнений видно, что можно найти все W_m , если известно W_0 . Конечно, все эти рассуждения имеют смысл при наличии двух решений уравнения Бакстера, если $W_0 \neq 0$ тождественно (как раз такие и были построены в данной работе). Рекуррентным соотношениям вида (57) удовлетворяют собственные значения трансфер-матриц $t_l(x)$ (матриц монодромии во вспомогательном пространстве представления спина $l = m/2$). Семейство t_l можно получить, используя следующее выражение для операторов Лакса во вспомогательных пространствах со спинами l :

$$L_l(x) = i^{2l} e^{-il^+ \varphi^+} \frac{\Gamma(l^3 - ix)}{\Gamma(-ix - l)} e^{-il^- \varphi}. \quad (58)$$

Здесь операторы l^k – операторы спина l , множитель $i^{2l} \Gamma^{-1}(-i(x+i/2))$ введен для того, чтобы при $l = 0$ и $l = 1$ получались, соответственно, $L_0 = 1$ и $L_{1/2}(x) = L(x)$ ($L(x)$ – оператор Лакса (2)). Из соотношения (16) видно, что

$$W_0(x) = i^N \Gamma^N(-i(x+i/2)).$$

Явное вычисление W_0 для решений, построенных методом, описанным в работе [8], дает

$$W_0(x) = e^{i\pi \hat{n}} \Gamma^N(-i(x+i/2)), \quad (59)$$

где $\hat{n}$ – оператор полного числа частиц. Для этой пары, таким образом, получаем, что

$$W_m(x) = e^{i\pi \hat{n}} (-i)^{2lN} \Gamma^N(-ix - 1/2) t_l(x), \quad (60)$$

или

$$Q_1(x-im)Q_2(x+i) - Q_1(x+i)Q_2(x-im) = e^{i\pi \hat{n}} (-i)^{2lN} \Gamma^N(-ix - 1/2) t_l(x). \quad (61)$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нашей работе мы построили базисные Q -операторы в форме следов монодромий базисных локальных M -операторов для случая интегрируемой DST-модели. Q -операторы представлены в виде рядов по каноническим операторам φ_k , φ_k^+ с хорошо определенным действием на векторы квантового пространства. Получены переплетающие соотношения, означающие, что Q -операторы и след матрицы монодромии t коммутируют. Получены функциональные соотношения вронскианного типа, показывающие линейную независимость Q -операторов и связь между Q -операторами и трансфер-матрицами во вспомогательных пространствах представлений высших спинов.

Отметим некоторые нерешенные задачи. Было бы интересно построить Q -операторы для небольшого числа степеней свободы как функции семейства коммутирующих операторов, связанных с $t(x)$. Неясным остается происхождение факторизаций Q -операторов, возникающих в некоторых представлениях [3], [9].

Метод, описанный в данной работе, позволяет найти M -операторы в наиболее интересном случае спиновой XXX -цепочки (они совпадают с операторами Лакса $L(x)$ и $\tilde{L}(x)$, если поменять местами вспомогательное и квантовое пространство), но при этом следы их монодромий расходятся. Однако существует процедура построения Q -операторов, аналогичная описанной в [9], для случая спиновой XXX $SL(2, \mathbb{C})$ -цепочки [11]. Таким образом, случай спиновой XXX -цепочки заслуживает дальнейшего исследования.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 00-15-96645, № 01-02-16585, CRDF MO-011-0, Министерства образования E00-3.3-62 и INTAS 00-00561.

Список литературы

- [1] A. C. Scott, J. C. Eilbeck. Phys. Lett. A. 1986. V. 119. P. 60–64.
- [2] V. Z. Enolskii, M. Salerno, N. A. Kostov, A. C. Scott. Physica Scripta. 1991. V. 43. P. 229–235.
- [3] V. B. Kuznetsov, M. Salerno, E. K. Sklyanin. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 171–189.
- [4] L. D. Faddeev. How algebraic Bethe Ansatz works for integrable models. In: Quantum Symmetries/Symmetries Quantiques. Proc. of the Les Houches Summer School, Session LXIV, Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995. Eds. A. Connes, K. Gawedski, J. Zinn-Justin. Amsterdam: North-Holland, 1998. P. 149; hep-th/9605187.
- [5] R. J. Baxter. Stud. Appl. Math. 1971. P. L51–69; Ann. Phys. N. Y. 1972. V. 70. P. 193–228; 1973. V. 76. P. 1–71.
- [6] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov. Commun. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 247–78; 1998. V. 200. P. 297–324.
- [7] G. P. Pronko, Yu. G. Stroganov. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 2333–2340; hep-th/9808153.
- [8] G. P. Pronko. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 8251–8266; nlin.SI/0003002.
- [9] V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov. J. Statist. Phys. 1990. V. 59. P. 799–817.
- [10] V. Pasquier, M. Gaudin. J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 5243–5252.
- [11] S. E. Derkachov. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 5299–5316; solv-int/9902015.