Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Д. МакКай, Интегрируемость нелинейных сигма-моделей с границей, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 322–328

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:51:21

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИГМА-МОДЕЛЕЙ С ГРАНИЦЕЙ

Приведены результаты по классической интегрируемости главной киральной модели и общих сигма-моделей с границами в (компактных) симметрических пространствах.

Ключевые слова: интегрируемая теория поля, сигма-модели, интегрируемость теорий с границей.

1. ВВЕДЕНИЕ

С начала 1990-х годов параллельно с “революцией D-бран” в теории струн большое внимание было посвящено интегрируемым моделям с границей (работы [1] содержат ряд плодотворных идей, а [2] представляют собой ранние обзоры). Вместо того чтобы испортить “хорошие” алгебраические и аналитические свойства объемной интегрируемости, аккуратный выбор граничного условия может не только не нарушить интегрируемости, а привести к элегантным дополнительным структурам.

Однако внимание, посвященное нелинейной сигма-модели (т.е. гармоническим отображениям из полуплоскости), было относительно невелико и ограничивалось в основном анализом $O(N)$ -модели (модели на $SO(N)/SO(N-1)$) [3]–[6]. Здесь мы представляем работу, начинающуюся с рассмотрения главного кирального поля (на компактной группе Ли G) [7], [8], которое затем распространяется на компактные симметрические пространства G/H (с главным киральным полем, реализованным как симметрическое пространство $G \times G/G$) [9].

2. ГЛАВНОЕ КИРАЛЬНОЕ ПОЛЕ

Главное киральное поле определяется плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \langle g^{-1} \partial_\mu g, g^{-1} \partial^\mu g \rangle, \quad (1)$$

*Department of Mathematics, University of York, UK. E-mail: nm15@york.ac.uk

где определенное на пространстве Минковского при $-\infty < x \leq 0$ поле $g(t, x)$ принимает значения в компактной классической группе Ли G и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – отрицательно-определенное инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ этой группы. Граничное уравнение движения имеет вид

$$\langle g^{-1} \partial_1 g, g^{-1} \delta g \rangle = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

где вариация берется по всем δg таким, что $g^{-1} \delta g \in \mathfrak{g}$. Ясно, что граничные условия Неймана $\partial_1 g = 0$ или Дирихле $\delta g = 0$ удовлетворяют этому уравнению. Однако ему удовлетворяют также и два типа смешанных условий,

$$g(t, 0) \in g_L H g_R^{-1}, \quad (2)$$

$$g(t, 0) \in g_L \frac{G}{H_\alpha} g_R^{-1}, \quad (3)$$

где $G/H_\alpha \cong \{\alpha(g)g^{-1} \mid g \in G\}$ – вложение Картана G/H_α в G , H_α – инвариантная относительно инволютивного (т.е. удовлетворяющего условию $\alpha^2 = 1$) автоморфизма α ¹⁾ подгруппа группы G , g_L, g_R – фиксированные элементы группы G . (В действительности нужно соблюдать известную осторожность: вложение Картана является локальным диффеоморфизмом, однако, как показано в [10], может не быть (в конечной части) ни взаимно однозначным отображением, ни отображением на.)

Чтобы убедиться в этом, определим сохраняющиеся токи со значениями в алгебре $\mathfrak{g}$, которые порождают $G \times G$ симметрию $g \mapsto UgV^{-1}$, как

$$j_\mu^L = \partial_\mu g g^{-1}, \quad j_\mu^R = -g^{-1} \partial_\mu g, \quad (4)$$

и заметим, что граничное уравнение движения эквивалентно условию $\langle j_0, j_1 \rangle = 0$ или, в компонентах светового конуса, $\langle j_+, j_- \rangle = 0$ (в силу цикличности следа неважно, используется ли j^L или j^R). Наше киральное граничное условие эквивалентно условиям

$$g_L^{-1} j_0^L g_L = \alpha(g_L^{-1} j_0^L g_L) \in \mathfrak{h}_\alpha, \quad g_R^{-1} j_0^L g_R = \alpha(g_R^{-1} j_0^L g_R) \in \mathfrak{h}_\alpha \quad \text{при } x = 0, \quad (5)$$

где $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{m}_\alpha$; $\mathfrak{h}_\alpha$ порождает H_α и является собственным пространством с собственным значением $+1$, в то время как $\mathfrak{m}_\alpha$ является собственным пространством с собственным значением -1 . Граничное уравнение движения требует в таком случае, чтобы пространственные компоненты принимали значения в $\mathfrak{m}_\alpha$. Все вместе это дает

$$g_L^{-1} j_+^L g_L = \alpha(g_L^{-1} j_-^L g_L) \quad \text{при } x = 0 \quad (6)$$

и аналогичную формулу для j^R . Аналогично можно показать, что некиральное граничное условие (3) влечет $g_L^{-1} j_0^L g_L = \alpha(g_R^{-1} j_0^R g_R)$, и, таким образом, необходимо

$$g_L^{-1} j_+^L g_L = \alpha(g_R^{-1} j_-^R g_R) \quad \text{при } x = 0. \quad (7)$$

¹⁾ Впредь мы будем называть такие отображения *инволюциями*.

Для построения сохраняющихся коммутирующих локальных зарядов модели используются некоторые специальные способы выбора инвариантных тензоров [11]. То, что локальные заряды при наличии этих граничных условий остаются сохраняющимися и коммутирующими на полупрямой, следует из простого поведения этих тензоров под действием преобразования α . Если α является внутренним автоморфизмом, то тензоры являются, конечно, инвариантными относительно α , однако если α является внешним автоморфизмом, то они могут таковыми и не быть. На самом деле, они всегда имеют собственные значения ± 1 относительно α [12], и этого достаточно, чтобы обеспечить возможность построения одного сохраняющегося заряда из каждой пары локальных зарядов со спинами ± 1 (например, энергии, но не импульса). Это, а также совместимость скобок Пуассона с рассматриваемыми граничными условиями, детально описаны в [7].

В дополнение к локальным модель имеет нелокальные сохраняющиеся заряды. В объемной модели $G_L \times G_R$ симметрия, порождаемая токами j^L и j^R , находится внутри большей $Y(\mathfrak{g}) \times Y(\mathfrak{g})$ симметрии, где $Y(\mathfrak{g})$ – алгебра янгианов. Эта симметрия порождается зарядами

$$\begin{aligned} Q^{(0)a} &= \int j_0^a dx, \\ Q^{(1)a} &= \int j_1^a dx - \frac{1}{2} f^a_{bc} \int j_0^b(x) \int^x j_0^c(y) dy dx, \end{aligned} \quad (8)$$

используемыми, соответственно, токи j^L и j^R , представленные в виде разложения $j = j^a t_a$, где t^a – генераторы алгебры $\mathfrak{g}$, $[t_a, t_b] = f_{ab}^c t_c$. Для объемной модели интегрирование ведется по всей прямой $(-\infty, \infty)$. Однако на полупрямой $(-\infty, 0]$ эти заряды, вообще говоря, более не сохраняются. Тем не менее существуют два важных набора зарядов, которые остаются (классически) сохраняющимися. Используем буквы $i, j, k, \dots$ для записи $\mathfrak{h}_\alpha$ -индексов и $p, q, r, \dots$ для $\mathfrak{m}_\alpha$ -индексов и заметим, что единственными не обращающимися в нуль структурными константами являются f^i_{jk} и f^i_{pq} (и их циклические перестановки); тогда, как показано в [8], искомыми зарядами будут

$$\begin{aligned} Q^{(0)i}, \\ \tilde{Q}^{(1)p} \equiv Q^{(1)p} + \frac{1}{2} f^p_{qi} Q^{(0)i} Q^{(0)q}. \end{aligned} \quad (9)$$

Первое множество порождает H_α , в то время как второе представляет собой некоторый остаток нелокальных зарядов. В предположении, что второе множество зарядов выдерживает квантование, оно может быть записано в виде

$$\tilde{Q}^{(1)p} = Q^{(1)p} + \frac{1}{4} [C_2^{\mathfrak{h}}, Q^{(0)p}], \quad (10)$$

где $C_2^{\mathfrak{h}} \equiv \gamma_{ij} Q^{(0)i} Q^{(0)j}$ – сужение квадратичного оператора Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}_\alpha$, $\gamma_{ij} = f_{ia}^b f_{jb}^a$ ($\hbar = 1$). Сохранение этих зарядов может быть далее использовано для определения S -матриц моделей с границами с точностью до общего скалярного

множителя. Метод основан на том, что, во-первых, из сохранения заряда $Q^{(0)i}$ следует тривиальность действия матрицы отражения на неприводимых представлениях H_α , а во-вторых, сохранение зарядов $\tilde{Q}^{(1)p}$ определяет относительные значения коэффициентов этих проекторов в терминах значений оператора $C_2^{\mathfrak{h}}$. Подробности можно найти в работе [8] и для всех $\mathfrak{g}$ в работе [13], из которых видно, что состоятельность рассматриваемого подхода обусловлена “теоремой о симметрических пространствах” из [14].

Подобно тому как алгебра $Y(\mathfrak{g})$ может рассматриваться как деформация полиномиальной алгебры $\mathfrak{g}[z]$ (с $Q_1^a = zQ_0^a$), на алгебру, порожденную зарядами $Q^{(0)i}$ и $\tilde{Q}^{(1)p}$, можно смотреть как на инвариант деформации подалгебры “твистованных” полиномов в $\mathfrak{g}[z]$ относительно совместного действия σ и $z \mapsto -z$. По этой причине она известна как алгебра “твистованных янгианов”, и мы обозначаем ее $Y(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_\alpha)$. Эта алгебра хорошо известна и изучена в литературе (см., например, [15]), хотя и не в общей форме.

3. СИГМА-МОДЕЛИ В СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Объемная модель на общем компактном симметрическом пространстве G/H подробно описана в работах [10], [16]. Заметим, что необходимо отличать инволюцию, которая определяет пространство G/H (мы будем использовать для нее обозначение σ), от инволюции, которая появляется в граничных условиях. По этой причине мы были внимательны и использовали индекс α везде в предыдущем разделе.

Коротко говоря, калибровка инварианта подгруппы H относительно σ достигается требованием локальной симметрии модели $g(t, x) \mapsto g(t, x)h(t, x)$. Чтобы достигнуть этого, введем калибровочное поле $A_\mu(t, x) \in \mathfrak{h}$ и ковариантную производную $D_\mu g \equiv \delta_\mu g - gA_\mu$. Тогда плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \langle J_{R\mu}, J_{R\mu} \rangle = -\frac{1}{2} \langle J_{L\mu}, J_{L\mu} \rangle = -\frac{1}{8} \langle q^{-1} \partial_\mu q, q^{-1} \partial^\mu q \rangle. \quad (11)$$

Ток

$$J_R^\mu \equiv g^{-1} D^\mu g = j^\mu - A^\mu, \quad (12)$$

связанный с локальной правой H -симметрией, является калибровочно-ковариантным, и уравнения движения суть $D_\mu J_R^\mu = 0$, тогда как уравнения движения для A_μ накладывают ограничение $J_R^\mu = 0$ на $\mathfrak{h}$. Другой способ состоит в том, чтобы выразить плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ в терминах калибровочно-инвариантного тока

$$J_L^\mu \equiv -(D^\mu g)g^{-1}, \quad (13)$$

который (нековариантно) сохраняется, $\partial_\mu J_L^\mu = 0$. Существует также описание модели исключительно в терминах (калибровочно-инвариантного) поля $q = \sigma(g)g^{-1}$ тако-го, что $q(t, x)$ – поле, принимающее значения во вложении Картана; в этом случае $J_L^\mu = q^{-1} \partial^\mu q / 2$.

Уравнения движения позволяют построить локальные сохраняющиеся заряды, плотности которых являются полиномами по J_R^μ или J_L^μ [12]. Можно подумать, что инвариантная формулировка удобнее для работы, но в ней труднее оперировать скобками Пуассона [17], чем при использовании калибровочной формулировки. Нелокальные заряды могут быть построены обычным способом из $2J_L^\mu$; они порождают алгебру $Y(\mathfrak{g})$.

Отступая от наших рассуждений, отметим, что различные аспекты объемной квантовой G/H -модели все еще не вполне поняты. Существуют потенциальные аномалии для непростых групп H [18], [19], и даже для простых групп H нет общего описания характера спектра. Частицы должны образовывать $Y(\mathfrak{g})$ -мультиплеты, но какие именно, предстоит определить на основании допустимых значений локальных зарядов, которые должны быть связаны с системами корней пространства G/H [20].

Поскольку здесь мы не собираемся вдаваться в детали канонического формализма, зададим граничные условия, используя калибровочно-инвариантный ток J_L^μ , в терминах которого граничное уравнение движения может быть записано как

$$\langle J_L^+, J_L^- \rangle = 0. \quad (14)$$

Этому уравнению удовлетворяет $g(t, 0) = g_0 l(t)$ с фиксированным g_0 и $l \in H_\tau$, где H_τ — инвариант подгруппы относительно некоторой дополнительной инволюции τ . Основной доказанный в работе [9] результат состоит в том, что для совместимости со скобками Пуассона и для сохранения локальных зарядов эта инволюция должна коммутировать с инволюцией σ . В таком случае условие склеивания для токов, аналогичное (6), (7), имеет вид

$$\tau(g_0^{-1} J_L^+ g_0) = g_0^{-1} J_L^- g_0. \quad (15)$$

Тривиальные случаи $\tau = 1$ и $\tau = \sigma$ отвечают чистым граничным условиям Неймана и Дирихле, соответственно.

Первый естественный пример — это пример главного кирального поля, реализованного как симметрическое пространство $G \times G / G_{\text{diagonal}}$, где $G_{\text{diagonal}} = \{(g, g) \mid g \in G\}$ (подробности приведены в [9]). Суть в том, что когда σ — оператор перестановки в $G \times G$, единственными допустимыми нетривиальными τ являются (α, α) и $\sigma(\alpha, \alpha)$ (где α — произвольно выбранная инволюция), и это приводит к двум типам граничных условий (2), (6) и (3), (7), соответственно.

Следующий пример, также содержащийся в [9], есть $SO(3)/SO(2)$; некоторые подробные результаты для этого примера имеются в [3], [6]. Если допустить, что τ — произвольная инволюция, и потому H_τ — произвольная $SO(2)'$ группа, то это даст D-подмногообразие $\{\sigma(g_0 l)(g_0 l)^{-1} \mid l \in SO(2)'\} \subset S^2$, которое есть произвольная окружность. Если потребовать, чтобы τ и σ коммутировали, то эта окружность становится окружностью большого круга.

Нетрудно, по крайней мере для классических групп G , составить список других примеров пар коммутирующих инволюций. Например, в грассмановом случае $SU(N)/S(U(N-M) \times SU(M))$, $SO(N)/SO(N-M) \times SO(M)$ или $Sp(2n)/Sp(2n-2m) \times Sp(2m)$;

для любого другого M' существует группа $SU(N - M') \times SU(M')$ (SO, Sp), определяющая инволюция которой коммутирует с σ . Поэтому для $\mathbb{C}P^{N-1}$ (S^{N-1})-модели находим, что $\mathbb{C}P^{M'-1}$ ($S^{M'-1}$, см. [5]) есть допустимое (нетривиальное) D-многообразие для всех $M' = 2, \dots, N - 1$.

4. ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КВАНТОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Программа исследования квантовой модели для главного кирального поля в известной степени не содержит трудностей. Локальные [18], [21] и нелокальные [22] заряды выдерживают квантование и согласуются с предложенными точными S -матрицами объемной модели [23] и модели с границей [7]. Остается только достичь полного понимания в вопросах того, как устроен спектр модели с границей и его взаимодействия.

Для общего случая моделей в симметрическом пространстве мы, однако, далеки от такого положения дел. Как было сказано выше, в настоящее время существует убеждение, что объемные модели не являются интегрируемыми для непростых групп H , хотя результаты последнего времени снова возвращают нас к этому вопросу [24]: кажется вероятным, что, по крайней мере, некоторые такие модели являются интегрируемыми в квантовом случае. Даже для тех объемных моделей, которые непременно являются таковыми, не существует общего описания характера их спектра, имеющего столь же элегантный вид, как для главного кирального поля [25]. Для моделей в симметрическом пространстве с границей мы имеем теперь, по крайней мере, общую постановку проблемы их классической интегрируемости. Квантовые модели с границей имеют $Y(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_\tau)$ -симметрию там, где они существуют, и поэтому для них можно использовать известные решения уравнения отражения. Однако первоочередная задача состоит в том, чтобы установить условия интегрируемости квантовой модели, возможно, посредством распространения на общий случай G/H граничного варианта [5] техники исчисления аномалий для локальных зарядов [18].

Благодарности. Автор благодарен Королевскому обществу за грант на оплату транспортных расходов и организаторам конференции за гостеприимство.

Список литературы

- [1] И. В. Чередник. ТМФ. 1984. Т. 61. № 1. С. 35; *S. Ghoshal, A. Zamolodchikov*. Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 3841; Erratum. V. 9. P. 4353; hep-th/9306002.
- [2] *E. Corrigan*. Reflections. hep-th/9601055; Integrable field theory with boundary conditions. In: *Frontiers in Quantum Field Theory*. Eds. Chao-Zheng Zha, Ke Wu. Singapore: World Scientific, 1998. P. 9; hep-th/9612138.
- [3] *E. Corrigan, Z.-M. Sheng*. Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 2825; hep-th/9612150.
- [4] *S. Ghoshal*. Phys. Lett. B. 1994. V. 334. P. 363; hep-th/9401008.
- [5] *M. Moriconi*. Nucl. Phys. B. 2001. V. 619. P. 396; hep-th/0108039; Integrable boundary conditions for the $O(N)$ nonlinear sigma model. In: *Statistical Field Theories. Proc. of the NATO Adv. Res. Working. Como, Italy, 18–23 June, 2001. Part II*. NATO Sci. Ser. II. Math. Phys. Chem. V. 73. Eds. A. Capelli, G. Mussardo. Dordrecht: Kluwer, 2002; hep-th/0111195.
- [6] *W. He, L. Zhao*. Phys. Lett. B. 2003. V. 570. P. 251; hep-th/0307002.

- [7] *N. MacKay, B. Short.* Commun. Math. Phys. 2003. V. 233. P. 313; Erratum. 2004. V. 245. P. 401; hep-th/0104212.
- [8] *G. Delius, N. MacKay, B. Short.* Phys. Lett. B. 2001. V. 522. P. 335; Erratum. 2002. V. 524. P. 401; hep-th/0109115.
- [9] *N. MacKay, C. A. S. Young.* Phys. Lett. B. 2004. V. 588. P. 221; hep-th/0402182.
- [10] *H. Eichenherr.* Nucl. Phys. B. 1980. V. 164. P. 528; 1987. V. 282. P. 745; *J.-P. Antoine, B. Piette.* J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 2753.
- [11] *J. M. Evans, M. Hassan, N. J. MacKay, A. Mountain.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 561. P. 385; hep-th/9902008.
- [12] *J. M. Evans, A. J. Mountain.* Phys. Lett. B. 2000. V. 483. P. 290; hep-th/0003264.
- [13] *N. MacKay.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 7865; math.QA/0205155.
- [14] *P. Goddard, W. Nahm, D. Olive.* Phys. Lett. B. 1985. V. 160. P. 111; *C. Daboul.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 3576; hep-th/9604108.
- [15] *А. Молев, М. Назаров, Г. Ольшанский.* УМН. 1996. Т. 51. № 2. С. 27.
- [16] *H. Eichenherr, M. Forger.* Nucl. Phys. B. 1978. V. 155. P. 381.
- [17] *M. Forger, J. Laartz, U. Schaeper.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 146. P. 397; hep-th/9201025.
- [18] *Y. Y. Goldschmidt, E. Witten.* Phys. Lett. B. 1980. V. 91. P. 392.
- [19] *E. Abdalla, M. C. B. Abdalla.* Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 1800; *E. Abdalla, M. Gomes, M. Forger.* Nucl. Phys. B. 1982. V. 210. P. 181.
- [20] *J. M. Evans.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 608. P. 591; hep-th/0101231.
- [21] *J. M. Evans, M. Hassan, N. J. MacKay, A. J. Mountain.* Conserved charges and supersymmetry in principal chiral models. hep-th/9711140.
- [22] *D. Bernard.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 137. P. 191.
- [23] *E. Ogievetsky, N. Reshetikhin, P. Wiegmann.* Nucl. Phys. B. 1987. V. 280. P. 45; *E. Ogievetsky, P. Wiegmann.* Phys. Lett. B. 1986. V. 168. P. 360.
- [24] *P. Fendley.* Phys. Rev. B. 2001. V. 63. P. 104429; cond-mat/0008372; JHEP. 2001. V. 0105. P. 050; Integrable sigma models and perturbed coset models. hep-th/0101034; *A. Babichenko.* Phys. Lett. B. 2003. V. 554. P. 96; hep-th/0211114.
- [25] *P. E. Dorey.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 358. P. 654.