Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. З. Иоргов, В. Н. Шадура, Волновые функции цепочки Тоды с взаимодействием на границе, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 346–364

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 03:29:33

© 2005 г.

Н. З. Иоргов*, В. Н. Шадура*

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ НА ГРАНИЦЕ

Дано интегральное представление для волновых функций квантовой N -частичной цепочки Тоды с взаимодействием на концах цепочки со стенками. В случае цепочки Тоды с взаимодействием на одном конце волновые функции получены при помощи интегрального преобразования из волновых функций открытой цепочки Тоды. Ядро этого преобразования явно выражено через Γ -функцию. Волновые функции цепочки Тоды с взаимодействием на обоих концах получены из предыдущих волновых функций с помощью интегрального преобразования. В этом случае разностное уравнение для ядра интегрального преобразования допускает разделение переменных. Разностные уравнения с разделенными переменными совпадают с уравнениями Бакстера.

Ключевые слова: квантовая цепочка Тоды, метод разделения переменных, взаимодействие со стенкой.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в нахождении собственных волновых функций коммутирующих гамильтонианов некоторых интегрируемых квантовых цепочек с конечным числом частиц был достигнут определенный прогресс [1]–[7], связанный с развитием метода разделения переменных [1] для квантовых интегрируемых моделей. Разработка этого метода была начата Гутцвиллером [2], который нашел решение задачи на собственные значения для $N = 2, 3, 4$ -частичной периодической цепочки Тоды.

Используя R -матричный формализм, Складина [3] предложил алгебраическую формулировку метода разделения переменных, которая позволила применить метод к широкому классу интегрируемых квантовых цепочек. Следующий важный шаг был сделан Харчевым и Лебедевым [4], которые объединили аналитический метод Гутцвиллера и алгебраический подход Складина. Они получили собственные волновые функции N -частичной периодической цепочки Тоды при помощи интегрального преобразования собственных функций для открытой $(N - 1)$ -частичной цепочки Тоды, нахождение которых рассматривалось как вспомогательная задача. Оказалось, что ядро этого преобразования допускает разделение переменных. Уравнение на ядро, записанное в разде-

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев, Украина.
E-mail: iorgov@bitp.kiev.ua

ленных переменных, совпадает с уравнением Бакстера. Решение этого уравнения было найдено в [8] (см. также [4]).

Позднее Харчев и Лебедев [5] нашли замечательное рекуррентное соотношение между собственными функциями N - и $(N - 1)$ -частичных открытых цепочек Тоды. Осмысление этих формул с точки зрения теории представлений [6] позволило распространить их подход на другие интегрируемые системы [6], [7].

В настоящей работе мы используем метод разделения переменных для получения собственных функций коммутирующих гамильтонианов N -частичной цепочки Тоды с взаимодействием частиц на концах цепочки со стенками. Мы применяем подход Скляни-на [9] к задачам с границами для квантовых интегрируемых моделей. N -частичные собственные функции квантовой цепочки Тоды, в которой первая и последняя частицы экспоненциально взаимодействуют со стенками (взаимодействие на обоих концах), строятся с помощью некоторого интегрального преобразования собственных функций для цепочки Тоды с взаимодействием на одном конце (вспомогательная задача). Эти собственные функции, в свою очередь, строятся с помощью собственных функций N -частичной открытой цепочки Тоды. Такая сложная иерархия позволяет разделить переменные в разностном уравнении для ядра указанного интегрального преобразования и сводит его к некоторому варианту уравнения Бакстера. Отметим, что разделение переменных для классической цепочки Тоды с взаимодействием на границе общего вида было осуществлено Кузнецовым [10].

2. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ОТКРЫТОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Для того чтобы описать интегралы движения квантовой N -частичной открытой цепочки Тоды, используем L -операторы (по одному для каждой частицы)

$$L_k(u) = \begin{pmatrix} u - p_k & e^{-q_k} \\ -e^{q_k} & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где N — число частиц в цепочке, p_k и q_k — операторы импульса и координаты k -й частицы, соответственно. Матрица монодромии определяется следующим образом:

$$T(u) := L_N(u)L_{N-1}(u) \dots L_2(u)L_1(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Коммутационные соотношения для элементов матрицы $T(u)$ вытекают из канонических коммутационных соотношений $[p_k, q_l] = -i\hbar\delta_{kl}$ и могут быть записаны в виде

$$R(u - v)(T(u) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes T(v)) = (\mathbf{1} \otimes T(v))(T(u) \otimes \mathbf{1})R(u - v), \quad (2)$$

где

$$R(u) = \begin{pmatrix} 1 + i\hbar/u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i\hbar/u & 0 \\ 0 & i\hbar/u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + i\hbar/u \end{pmatrix} \quad (3)$$

– рациональная R -матрица. Из (1) следует, что матричный элемент $A(u)$ является полиномом степени N по u :

$$\begin{aligned} A(u) &= \sum_{m=0}^N (-1)^m u^{N-m} H_m(p_1, q_1; p_2, q_2; \dots; p_N, q_N) = \\ &= u^N - H_1 u^{N-1} + H_2 u^{N-2} - \dots + (-1)^N H_N. \end{aligned}$$

В частности, соотношения (2) дают $[A(u), A(v)] = 0$, и поэтому $[H_m, H_k] = 0$, т.е. $A(u)$ является производящей функцией для коммутирующих операторов H_m . Поскольку

$$H_1 = \sum_{k=1}^N p_k, \quad H_2 = \sum_{\substack{k,l \\ k < l}} p_k p_l - \sum_{k=1}^{N-1} e^{q_k - q_{k+1}},$$

мы получаем гамильтониан для открытой цепочки Тоды в виде

$$H = \frac{H_1^2}{2} - H_2 = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} e^{q_k - q_{k+1}}.$$

Поэтому операторы H_m являются гамильтонианами для открытой цепочки Тоды.

3. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОТКРЫТОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Пусть волновая функция $\psi(q_1, \dots, q_N)$ есть общая собственная функция коммутирующих гамильтонианов H_m открытой цепочки Тоды:

$$H_m \psi(q_1, \dots, q_N) = E_m \psi(q_1, \dots, q_N).$$

Тогда

$$A(u) \psi_{\gamma_N}(q_1, \dots, q_N) = \prod_{l=1}^N (u - \gamma_{Nl}) \psi_{\gamma_N}(q_1, \dots, q_N),$$

где $\gamma_N = (\gamma_{N1}, \gamma_{N2}, \dots, \gamma_{NN})$ суть квантовые числа N -частичной системы, $E_m = e_m(\gamma_{N1}, \gamma_{N2}, \dots, \gamma_{NN})$, e_m – m -й элементарный симметрический полином. Для любого множества квантовых чисел γ_N пространство собственных функций имеет размерность $N!$. Физическая собственная функция ψ_{γ_N} выделяется условием быстрого убывания ψ_{γ_N} в классически запрещенной области, т.е. при $q_k \gg q_{k+1}$ для некоторого k . При $q_1 \ll q_2 \ll \dots \ll q_N$ функция ψ_{γ_N} представляет собой суперпозицию плоских волн.

Недавно Харчев и Лебедев [5] нашли рекурсивную процедуру построения N -частичной волновой функции $\psi_{\gamma_N}(q_1, q_2, \dots, q_N)$ по $(N-1)$ -частичным волновым функциям $\psi_{\gamma_{N-1}}(q_1, q_2, \dots, q_{N-1})$. Рекуррентное соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{\gamma_N}(q_1, q_2, \dots, q_N) &= \int \mu(\gamma_{N-1}) Q(\gamma_{N-1} | \gamma_N) \psi_{\gamma_{N-1}}(q_1, q_2, \dots, q_{N-1}) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\sum_{j=1}^N \gamma_{N,j} - \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_{N-1,k} \right) q_N \right\} d\gamma_{N-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где интегрирование ведется по переменным $\gamma_{N-1,k}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, вдоль любого множества прямых, параллельных вещественной оси и удовлетворяющих условию

$$\min_k \operatorname{Im} \gamma_{N-1,k} > \max_j \operatorname{Im} \gamma_{N,j}, \quad j = 1, \dots, N; \quad (5)$$

$$Q(\gamma_{N-1} | \gamma_N) = \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{j=1}^N \hbar^{\frac{\gamma_{N-1,k} - \gamma_{N,j}}{i\hbar}} \Gamma\left(\frac{\gamma_{N-1,k} - \gamma_{N,j}}{i\hbar}\right), \quad (6)$$

$$\mu^{-1}(\gamma_{N-1}) = \prod_{\substack{k,l \\ k \neq l}} \Gamma\left(\frac{\gamma_{N-1,k} - \gamma_{N-1,l}}{i\hbar}\right).$$

Аналогичным образом $(N-1)$ -частичные волновые функции могут быть выражены через $(N-2)$ -частичные волновые функции, и т. д. Волновая функция одночастичной открытой цепочки Тоды есть просто плоская волна $\psi_{\gamma_{11}}(q_1) = e^{i\gamma_{11}q_1/\hbar}$.

Далее мы будем использовать обозначения $\gamma := \gamma_N$, $\gamma_k := \gamma_{N,k}$. Как показано в [5], волновая функция ψ_γ удовлетворяет соотношениям

$$A(u)\psi_\gamma = \prod_{l=1}^N (u - \gamma_l)\psi_\gamma, \quad (7)$$

$$B(u)\psi_\gamma = i^{N-1} \sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{u - \gamma_l}{\gamma_p - \gamma_l} \right) \psi_{\gamma+p}, \quad (8)$$

$$C(u)\psi_\gamma = i^{-N-1} \sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{u - \gamma_l}{\gamma_p - \gamma_l} \right) \psi_{\gamma-p}, \quad (9)$$

где $\psi_{\gamma \pm p} := \psi_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p \pm i\hbar, \dots, \gamma_N}$.

Для того чтобы найти действие оператора $D(u)$ на функцию ψ_γ , используем следующее свойство квантового детерминанта матрицы монодромии $T(u)$ для цепочки Тоды:

$$D(u)A(u - i\hbar) - C(u)B(u - i\hbar) = 1. \quad (10)$$

В результате имеем

$$D(u)\psi_\gamma = \sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{u - \gamma_l}{\gamma_p - \gamma_l} \right) \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{1}{\prod_{l \neq p} (\gamma_p - \gamma_l + i\hbar)} - \frac{1}{\prod_{l \neq p} (\gamma_p - \gamma_l - i\hbar)} \right) \psi_{\gamma-p} - \sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} \frac{1}{\gamma_q - \gamma_p - i\hbar} \frac{1}{\prod_{l \neq p} (\gamma_p - \gamma_l)} \prod_{l \neq p,q} \frac{u - \gamma_l}{\gamma_q - \gamma_l} \psi_{\gamma+p,-q}. \quad (11)$$

4. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ НА ГРАНИЦЕ

В этом разделе мы в общих чертах опишем R -матричный формализм для цепочки Тоды с взаимодействием частиц на концах цепочки, предложенный Складниным [9]. Этот формализм важен для построения волновых функций. Основным объектом в данном подходе является матрица

$$U(u) := T(u)K^{(-)}\left(u - \frac{i\hbar}{2}\right)\tilde{T}(-u) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(u) & \mathcal{B}(u) \\ \mathcal{C}(u) & \mathcal{D}(u) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $T(u)$ – матрица монодромии (1) N -частичной открытой цепочки Тоды,

$$\tilde{T}(-u) = \sigma_2 T^t(-u) \sigma_2 = (\sigma_2 L_1^t(-u) \sigma_2) (\sigma_2 L_2^t(-u) \sigma_2) \dots (\sigma_2 L_N^t(-u) \sigma_2),$$

σ_2 – матрица Паули,

$$K^{(-)}\left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & u - i\hbar/2 \\ -\beta_1(u - i\hbar/2) & \alpha_1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Как показано в работе [9], матрица $U(u)$ удовлетворяет уравнению отражения

$$R(u-v)(U(u) \otimes \mathbf{1})R(u+v-i\hbar)(\mathbf{1} \otimes U(v)) = (\mathbf{1} \otimes U(v))R(u+v-i\hbar)(U(u) \otimes \mathbf{1})R(u-v), \quad (14)$$

где $R(u)$ задается формулой (3).

Из этого уравнения следует, что $\mathcal{B}(u)\mathcal{B}(v) = \mathcal{B}(v)\mathcal{B}(u)$. Поэтому разложение $\mathcal{B}(u)$ по степеням u дает коммутирующие операторы, которые являются гамильтонианами цепочки Тоды с взаимодействием на одном конце:

$$\mathcal{B}(u) = (-1)^N \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) (u^{2N} - u^{2N-2} H_1^B + u^{2N-4} H_2^B - \dots + (-1)^N H_N^B), \quad (15)$$

где

$$H_1^B = \sum_{k=1}^N p_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} e^{q_k - q_{k+1}} - 2\alpha_1 e^{-q_1} + \beta_1 e^{-2q_1}.$$

Здесь два последних члена описывают взаимодействие первой частицы со стенкой.

Трансфер-матрица Складнина

$$t(u) := \text{Tr } K^{(+)}\left(u + \frac{i\hbar}{2}\right)U(u), \quad (16)$$

где

$$K^{(+)}\left(u + \frac{i\hbar}{2}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_N & \beta_N(u + i\hbar/2) \\ -(u + i\hbar/2) & \alpha_N \end{pmatrix},$$

удовлетворяет коммутационному соотношению [9]

$$t(u)t(v) = t(v)t(u). \quad (17)$$

Следовательно, $t(u)$ есть порождающая функция для коммутирующих операторов, которые являются гамильтонианами цепочки Тоды с взаимодействием на обоих концах.

Далее для простоты зафиксируем $\beta_1 = \beta_N = 0$ и будем использовать обозначения $e^{\kappa_1} := -2\alpha_1$, $e^{-\kappa_N} := -2\alpha_N$. В этом случае имеем

$$t(u) = (-1)^{N-1} \left(u^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right) (u^{2N} - u^{2N-2} H_1^{\text{BB}} + u^{2N-4} H_2^{\text{BB}} - \dots + (-1)^N H_N^{\text{BB}}) + 2\alpha_1 \alpha_N, \quad (18)$$

где

$$H_1^{\text{BB}} = \sum_{k=1}^N p_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} e^{q_k - q_{k+1}} - 2\alpha_1 e^{-q_1} - 2\alpha_N e^{q_N}.$$

Для цепочки Тоды матрица $U(u)$ обладает некоторой дополнительной симметрией (унитарностью) [9]:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(-u) & \mathcal{B}(-u) \\ \mathcal{C}(-u) & \mathcal{D}(-u) \end{pmatrix} = \frac{1}{2u - i\hbar} \begin{pmatrix} -i\hbar \mathcal{A}(u) + 2u \mathcal{D}(u) & -(2u + i\hbar) \mathcal{B}(u) \\ -(2u + i\hbar) \mathcal{C}(u) & 2u \mathcal{A}(u) - i\hbar \mathcal{D}(u) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

В частности, это приводит к равенству

$$\mathcal{A}(u) = \frac{1}{u} \left(\left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) \mathcal{D}(-u) + \frac{i\hbar}{2} \mathcal{D}(u) \right). \quad (20)$$

Используя это равенство и определение (16), получаем

$$t(u) = \alpha_N \frac{(u + \frac{i\hbar}{2})}{u} \mathcal{D}(u) + \alpha_N \frac{(u - \frac{i\hbar}{2})}{u} \mathcal{D}(-u) - \left(u + \frac{i\hbar}{2} \right) \mathcal{B}(u). \quad (21)$$

Матричные элементы $U(n)$, определенные в (12), можно выразить через элементы матрицы монодромии $T(u)$ для N -частичной открытой цепочки Тоды:

$$\mathcal{A}(u) = \alpha_1 (A(u)D(-u) - B(u)C(-u)) - \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) A(u)C(-u), \quad (22)$$

$$\mathcal{B}(u) = -\alpha_1 (A(u)B(-u) - B(u)A(-u)) + \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) A(u)A(-u), \quad (23)$$

$$\mathcal{C}(u) = \alpha_1 (C(u)D(-u) - D(u)C(-u)) - \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) C(u)C(-u), \quad (24)$$

$$\mathcal{D}(u) = \alpha_1 (D(u)A(-u) - C(u)B(-u)) + \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) C(u)A(-u). \quad (25)$$

Рассмотрим частные случаи: при $N = 1$

$$\mathcal{B}(u) = -\left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) (u^2 - (p_1^2 + e^{\kappa - q_1})),$$

$$t(u) = \left(u^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right) (u^2 - (p^2 + e^{\kappa - q_1} + e^{q_1 - \kappa'})) + 2\alpha\alpha';$$

при $N = 2$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(u) &= \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right)(u^4 - u^2(p_1^2 + p_2^2 + 2e^{q_1 - q_2} + e^{\kappa_1 - q_1}) + \\ &\quad + (p_1 p_2 - e^{q_1 - q_2})^2 - \alpha_1 p_2^2 e^{-q_1} - 2\alpha_1 e^{-q_2}), \\ t(u) &= -\left(u^2 + \frac{\hbar^2}{4}\right)(u^4 - u^2(p_1^2 + p_2^2 + 2e^{q_1 - q_2} + e^{\kappa_1 - q_1} + e^{q_2 - \kappa_2}) + \dots) + 2\alpha_1 \alpha_2.\end{aligned}$$

5. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ НА ОДНОМ КОНЦЕ

Определим функцию $\Psi_{\lambda} \equiv \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$ выражением

$$\Psi_{\lambda}(q_1, \dots, q_N) = \int \mu(\gamma) Q(\gamma|\lambda) e^{-i\kappa_1(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)/\hbar} \psi_{\gamma}(q_1, \dots, q_N) d\gamma_1 \dots d\gamma_N, \quad (26)$$

где $e^{\kappa_1} = -2\alpha_1$ и

$$Q(\gamma|\lambda) = \frac{\prod_{k,l} \Gamma\left(\frac{\lambda_l - \gamma_k}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{-\lambda_l - \gamma_k}{i\hbar}\right)}{\prod_{\substack{k,l \\ k < l}} \Gamma\left(-\frac{\gamma_k + \gamma_l}{i\hbar}\right)} \prod_k \hbar^{-\frac{(N+1)\gamma_k}{i\hbar}}, \quad \mu^{-1}(\gamma) = \prod_{\substack{k,l \\ k \neq l}} \Gamma\left(\frac{\gamma_k - \gamma_l}{i\hbar}\right). \quad (27)$$

Покажем, что Ψ_{λ} есть волновая функция для квантовой цепочки Тоды с взаимодействием на одном конце, причем

$$\mathcal{B}(u) \Psi_{\lambda}(q_1, \dots, q_N) = (-1)^N \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) \prod_{l=1}^N (u^2 - \lambda_l^2) \Psi_{\lambda}(q_1, \dots, q_N), \quad (28)$$

где структура правой части соответствует формуле (15). Интегрирование в формуле (26) ведется вдоль любого множества прямых, параллельных вещественной оси и удовлетворяющих условию

$$\max_k \operatorname{Im} \gamma_k < -\min_j \operatorname{Im} \lambda_j, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N. \quad (29)$$

Докажем сначала абсолютную сходимость интеграла в (26). Для этого используем неравенства

$$|\Gamma(x + iy)| \leq \Gamma(x) p_x(|y|) e^{-\frac{\pi|y|}{2}}, \quad x > 0,$$

где $p_x(|y|)$ — некоторый полином по $|y|$, степень которого линейно зависит от x ,

$$\frac{1}{|\Gamma(x + iy)|} \leq \frac{(1 + |y|/x) e^{\pi|y|/2}}{\Gamma(x)}, \quad x > 0,$$

а также неравенство (36) из приложения А, в котором положим $\tilde{\lambda}_k$ ($\tilde{\gamma}_{r,l}$) равным $\operatorname{Re} \lambda_k$ ($\operatorname{Re} \gamma_{r,l}$).

Представляя (26) в виде

$$\Psi_{\lambda}(q_1, \dots, q_N) = \int \prod_{r=1}^N \prod_{k=1}^r F(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N, \lambda; q_1, \dots, q_N) d\tilde{\gamma}_{r,k},$$

получаем следующее неравенство для подынтегрального выражения в зависимости от величин $\gamma_{r,k}$:

$$|F(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N, \lambda; q_1, \dots, q_N)| \leq P(\{\tilde{\gamma}_{r,k}\}) \exp\left(-\frac{\pi}{\hbar N} \sum_{r=1}^N \sum_{k=1}^r |\tilde{\gamma}_{r,k}|\right), \quad (30)$$

где $P(\{\tilde{\gamma}_{r,k}\})$ полиномиально зависит от переменных $\tilde{\gamma}_{r,k}$ и некоторым определенным образом от других переменных. Данная оценка приводит к абсолютной сходимости интеграла в правой части (26). Отметим, что этот интеграл не зависит от значений мнимых частей величин $\gamma_{r,k}$ (т.е. от прямых интегрирования) при условии, что выполняются упомянутые выше неравенства (5) и (29). Это следует из двух обстоятельств. Во-первых, при сдвиге контура интегрирования мы не наталкиваемся на полюса. Во-вторых, согласно оценке (30) подынтегральное выражение стремится к нулю на бесконечностях контуров интегрирования. Это доказывает корректность процедуры сдвига контуров интегрирования, которая используется в дальнейшем.

С физической точки зрения заданная формулой (26) функция $\Psi_{\lambda}(q_1, \dots, q_N)$ имеет правильное асимптотическое поведение: она быстро убывает в классически запрещенной области, т.е. при $q_k \gg q_{k+1}$ для некоторого k или при $q_1 \ll 0$. В области $0 \ll q_1 \ll q_2 \ll \dots \ll q_N$ функция $\Psi_{\lambda}(q_1, \dots, q_N)$ представляет собой суперпозицию плоских волн.

Формулы, определяющие действие матричных элементов матрицы $U(u)$ на функцию Ψ_{λ} , в частности формула (28), выведены в приложении Б.

Приведем здесь некоторое эвристическое объяснение формул

$$\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\lambda} = \alpha_1 \Psi_{\lambda-r}, \quad \mathcal{D}(-\lambda_r)\Psi_{\lambda} = \alpha_1 \Psi_{\lambda+r},$$

которые доказаны в приложении Б. Пусть $\Psi_{\lambda}(q_1, \dots, q_N)$ – собственная функция оператора $\mathcal{B}(u)$, удовлетворяющая (28). Тогда коммутационное соотношение

$$(u^2 - (v - i\hbar)^2)\mathcal{D}(v)\mathcal{B}(u) - (u^2 - v^2)\mathcal{B}(u)\mathcal{D}(v) = i\hbar(u + v - i\hbar)\mathcal{D}(u)\mathcal{B}(v) + i\hbar(u - v)\mathcal{A}(u)\mathcal{B}(v),$$

вытекающее из (14), дает

$$\mathcal{B}(u)\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\lambda} = (-1)^N \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) (u^2 - (\lambda_r - i\hbar)^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^N (u^2 - \lambda_k^2) \cdot \mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\lambda}$$

при $v = \lambda_r$, и поэтому $\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\lambda}$ является собственной функцией $\mathcal{B}(u)$ аналогично (28) с заменой λ_r на $(\lambda_r - i\hbar)$. Ясно, что этого наблюдения не достаточно для доказательства соотношения $\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\lambda} = \alpha_1 \Psi_{\lambda-r}$.

6. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ НА ОБОИХ КОНЦАХ

Принимая во внимание формулу (18), удобно определить матрицу

$$\tilde{t}(u) := (-1)^{N-1} \frac{t(u) - 2\alpha_1\alpha_N}{u^2 + \hbar^2/4} = u^{2N} - u^{2N-2} H_1^{\text{BB}} + u^{2N-4} H_2^{\text{BB}} - \dots + (-1)^N H_N^{\text{BB}}.$$

Пусть $\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{q})$ – волновая функция для цепочки Тоды с взаимодействием на обоих концах:

$$\tilde{t}(u)\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{q}) = \prod_{k=1}^N (u^2 - \rho_k^2)\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{q}) =: \tilde{t}(u|\boldsymbol{\rho})\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{q}),$$

где $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$ – квантовые числа соответствующего состояния.

Будем искать функцию $\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{q})$ в виде

$$\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{q}) = \int \tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho}) \Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{q}) d\lambda_1 \dots d\lambda_N, \quad (31)$$

где

$$\tilde{\mu}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{\substack{i,j \\ i < j}} \left(\Gamma\left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{i\hbar}\right) \Gamma\left(-\frac{\lambda_i - \lambda_j}{i\hbar}\right) \right) \prod_{\substack{i,j \\ i \leq j}} \left(\Gamma\left(\frac{\lambda_i + \lambda_j}{i\hbar}\right) \Gamma\left(-\frac{\lambda_i + \lambda_j}{i\hbar}\right) \right),$$

и интегрирование ведется по переменным $\{\lambda_k\}$ вдоль произвольных прямых, параллельных вещественной оси. Используя формулы (39) и равенство

$$\frac{\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda}^{+p})}{\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda})} = \frac{(\lambda_p + i\hbar)}{\lambda_p} \prod_{l \neq p} \frac{(\lambda_p + i\hbar)^2 - \lambda_l^2}{\lambda_p^2 - \lambda_l^2},$$

получаем

$$\begin{aligned} (-1)^{N-1} \tilde{t}(u|\boldsymbol{\rho}) \Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{q}) &= \int \Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{q}) \times \\ &\times \left[\alpha_1 \alpha_N \sum_{p=1}^N \left[\frac{\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda}^{+p}) C(\boldsymbol{\lambda}^{+p}|\boldsymbol{\rho})}{(\lambda_p + i\hbar)(\lambda_p + i\hbar/2)} \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{(\lambda_p + i\hbar)^2 - \lambda_l^2} \right) + \right. \right. \\ &+ \frac{\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda}^{-p}) C(\boldsymbol{\lambda}^{-p}|\boldsymbol{\rho})}{(\lambda_p - i\hbar)(\lambda_p - i\hbar/2)} \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{(\lambda_p - i\hbar)^2 - \lambda_l^2} \right) - \\ &- \frac{2\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})}{(\lambda_p^2 + \hbar^2/4)} \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{\lambda_p^2 - \lambda_l^2} \right) \left. \right] - \prod_{l=1}^N (\lambda_l^2 - u^2) \Big] d\lambda_1 \dots d\lambda_N = \\ &= \int \mu(\boldsymbol{\lambda}) C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho}) \Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{q}) \times \\ &\times \left[\alpha_1 \alpha_N \sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{(\lambda_p + i\hbar)^2 - \lambda_l^2} \right) \left[\frac{1}{\lambda_p(\lambda_p + i\hbar/2)} \frac{C(\boldsymbol{\lambda}^{+p}|\boldsymbol{\rho})}{C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})} + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{\lambda_p(\lambda_p - i\hbar/2)} \frac{C(\boldsymbol{\lambda}^{-p}|\boldsymbol{\rho})}{C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})} - \frac{2}{(\lambda_p^2 + \hbar^2/4)} \left. \right] - \prod_{l=1}^N (\lambda_l^2 - u^2) \Big] d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_N. \end{aligned}$$

Положим $u = \lambda_p$. Тогда предыдущее соотношение выполнено, если

$$\begin{aligned} (-1)^{N-1} \tilde{t}(\lambda_p | \rho) &= \frac{t(\lambda_p | \rho) - 2\alpha_1 \alpha_N}{\lambda_p^2 + \hbar^2/4} = \\ &= \alpha_1 \alpha_N \left[\frac{1}{\lambda_p(\lambda_p + i\hbar/2)} \frac{C(\lambda^+ | \rho)}{C(\lambda | \rho)} + \frac{1}{\lambda_p(\lambda_p - i\hbar/2)} \frac{C(\lambda^+ | \rho)}{C(\lambda | \rho)} - \frac{2}{(\lambda_p^2 + \hbar^2/4)} \right], \end{aligned}$$

где $t(u | \rho) = (-1)^{N-1} (u^2 + \hbar^2/4) \prod_{k=1}^N (u^2 - \rho_k^2) + 2\alpha_1 \alpha_N$. Это многомерное разностное уравнение допускает разделение переменных. А именно, предположим, что имеет место факторизация

$$C(\lambda | \rho) = \prod_{p=1}^N c(\lambda_p | \rho).$$

Тогда $c(\lambda | \rho)$ удовлетворяют уравнению Бакстера

$$\frac{1}{\lambda(\lambda + i\hbar/2)} c(\lambda + i\hbar | \rho) + \frac{1}{\lambda(\lambda - i\hbar/2)} c(\lambda - i\hbar | \rho) = \frac{t(\lambda | \rho) c(\lambda | \rho)}{\alpha_1 \alpha_N (\lambda^2 + \hbar^2/4)},$$

или, что эквивалентно,

$$\left(\lambda - \frac{i\hbar}{2} \right) c(\lambda + i\hbar | \rho) + \left(\lambda + \frac{i\hbar}{2} \right) c(\lambda - i\hbar | \rho) = \frac{\lambda t(\lambda | \rho) c(\lambda | \rho)}{\alpha_1 \alpha_N}.$$

Решения этого уравнения могут быть построены в терминах отношений бесконечномерных детерминантов, как это было сделано в случае периодической цепочки Тоды [8], [4]. Мы предполагаем, что, так же как и в случае периодической цепочки Тоды, требование аналитических свойств величин $c(\lambda | \rho)$ (важных, в частности, для сходимости интеграла (31)) сведет возможные значения ρ к дискретному спектру квантовой цепочки Тоды с взаимодействием на обоих концах.

Благодарности. Авторы выражают благодарность С. Харчеву, Д. Лебедеву и С. Пакуляку за полезные стимулирующие обсуждения и организаторам конференции “Классические и квантовые интегрируемые системы” за поддержку, которая сделала возможным представление результатов этой работы на конференции. Данная работа была частично поддержана грантом INTAS № 03-51-3350 и Фондом фундаментальных исследований Украины, грант № 2.7/00152.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство некоторых неравенств

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любых двух множеств вещественных переменных $\tilde{\gamma}_{N-1} = \{\tilde{\gamma}_{N-1,1}, \tilde{\gamma}_{N-1,2}, \dots, \tilde{\gamma}_{N-1,N-1}\}$ и $\tilde{\gamma}_N = \{\tilde{\gamma}_{N,1}, \tilde{\gamma}_{N,2}, \dots, \tilde{\gamma}_{N,N}\}$ справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} F(\tilde{\gamma}_{N-1}, \tilde{\gamma}_N) &:= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{N-1} |\tilde{\gamma}_{N,k} - \tilde{\gamma}_{N-1,l}| - \sum_{\substack{k_1, k_2=1 \\ k_1 < k_2}}^N |\tilde{\gamma}_{N,k_1} - \tilde{\gamma}_{N,k_2}| - \\ &\quad - \sum_{\substack{l_1, l_2=1 \\ l_1 < l_2}}^{N-1} |\tilde{\gamma}_{N-1,l_1} - \tilde{\gamma}_{N-1,l_2}| \geq 0. \end{aligned} \tag{32}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку величина $F(\tilde{\gamma}_{N-1}, \tilde{\gamma}_N)$ инвариантна относительно перестановок элементов во множествах $\tilde{\gamma}_{N-1}$ и $\tilde{\gamma}_N$, можно ограничиться рассмотрением случая $\tilde{\gamma}_{N-1,1} \geq \tilde{\gamma}_{N-1,2} \geq \dots \geq \tilde{\gamma}_{N-1,N-1}$ и $\tilde{\gamma}_{N,1} \geq \tilde{\gamma}_{N,2} \geq \dots \geq \tilde{\gamma}_{N,N}$. В этом случае простая комбинаторика показывает, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1 < k_2}^N |\tilde{\gamma}_{N,k_1} - \tilde{\gamma}_{N,k_2}| + \sum_{l_1 < l_2}^{N-1} |\tilde{\gamma}_{N-1,l_1} - \tilde{\gamma}_{N-1,l_2}| = \\ & = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{l=1}^{k-1} (\tilde{\gamma}_{N-1,l} - \tilde{\gamma}_{N,k}) + \sum_{l=k}^{N-1} (\tilde{\gamma}_{N,k} - \tilde{\gamma}_{N-1,l}) \right). \end{aligned}$$

Действительно, обе части равенства совпадают с

$$\sum_{k=1}^N (N+1-2k)\tilde{\gamma}_{N,k} + \sum_{l=1}^{N-1} (N-2k)\tilde{\gamma}_{N-1,l}.$$

Поскольку $|a| - a \geq 0$ для любого вещественного a , имеем

$$\begin{aligned} F(\tilde{\gamma}_{N-1}, \tilde{\gamma}_N) &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{l=1}^{k-1} (|\tilde{\gamma}_{N-1,l} - \tilde{\gamma}_{N,k}| - (\tilde{\gamma}_{N-1,l} - \tilde{\gamma}_{N,k})) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=k}^{N-1} (|\tilde{\gamma}_{N,k} - \tilde{\gamma}_{N-1,l}| - (\tilde{\gamma}_{N,k} - \tilde{\gamma}_{N-1,l})) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $F(\tilde{\gamma}_{N-1}, \tilde{\gamma}_N) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\gamma}_{N,1} \geq \tilde{\gamma}_{N-1,1} \geq \tilde{\gamma}_{N,2} \geq \tilde{\gamma}_{N-1,2} \geq \dots \geq \tilde{\gamma}_{N,N-1} \geq \tilde{\gamma}_{N-1,N-1} \geq \tilde{\gamma}_{N,N}.$$

Как следствие имеем неравенство

$$\begin{aligned} G(\tilde{\gamma}_{N-1}, \tilde{\gamma}_N) &:= F(\tilde{\gamma}_N, \{\tilde{\gamma}_{N-1,1}, \tilde{\gamma}_{N-1,2}, \dots, \tilde{\gamma}_{N-1,N-1}, 0, 0\}) = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{N-1} |\tilde{\gamma}_{N,k} - \tilde{\gamma}_{N-1,l}| - \sum_{k_1 < k_2}^N |\tilde{\gamma}_{N,k_1} - \tilde{\gamma}_{N,k_2}| - \\ & \quad - \sum_{l_1 < l_2}^{N-1} |\tilde{\gamma}_{N-1,l_1} - \tilde{\gamma}_{N-1,l_2}| + 2 \sum_{k=1}^N |\tilde{\gamma}_{N,k}| - 2 \sum_{l=1}^{N-1} |\tilde{\gamma}_{N-1,l}| \geq 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Для N произвольных множеств $\tilde{\gamma}_s = \{\tilde{\gamma}_{s,1}, \tilde{\gamma}_{s,2}, \dots, \tilde{\gamma}_{s,s}\}$, $s = 1, \dots, N$, вещественных чисел, объединяя неравенства (32) и (33), получим

$$H_s := \sum_{r=1}^{s-1} F(\tilde{\gamma}_r, \tilde{\gamma}_{r+1}) + \sum_{r=s}^{N-1} G(\tilde{\gamma}_r, \tilde{\gamma}_{r+1}) \geq 0, \quad s = 1, \dots, N,$$

или в явном виде,

$$H_s := \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{r+1} \sum_{l=1}^r |\tilde{\gamma}_{r+1,k} - \tilde{\gamma}_{r,l}| - \sum_{k < l}^N |\tilde{\gamma}_{N,k} - \tilde{\gamma}_{N,l}| - 2 \sum_{r=2}^{N-1} \sum_{k < l}^r |\tilde{\gamma}_{r,k} - \tilde{\gamma}_{r,l}| + \\ + 2 \sum_{k=1}^N |\tilde{\gamma}_{N,k}| - 2 \sum_{l=1}^s |\tilde{\gamma}_{s,l}| \geq 0, \quad s = 1, \dots, N.$$

Поэтому неравенство $\sum_{s=1}^N H_s / N \geq 0$ эквивалентно неравенству

$$\sum_{r=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{r+1} \sum_{l=1}^r |\tilde{\gamma}_{r+1,k} - \tilde{\gamma}_{r,l}| - \sum_{k < l}^N |\tilde{\gamma}_{N,k} - \tilde{\gamma}_{N,l}| - 2 \sum_{r=2}^{N-1} \sum_{k < l}^r |\tilde{\gamma}_{r,k} - \tilde{\gamma}_{r,l}| \geq \\ \geq -2 \sum_{k=1}^N |\tilde{\gamma}_{N,k}| + \frac{2}{N} \sum_{s=1}^N \sum_{l=1}^s |\tilde{\gamma}_{s,l}|. \quad (34)$$

Нам потребуется еще одно неравенство для вещественных $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N$ и $\tilde{\gamma}_{N,1}, \tilde{\gamma}_{N,2}, \dots, \tilde{\gamma}_{N,N}$. Это неравенство (33) для $G(\{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N, -\tilde{\lambda}_1, -\tilde{\lambda}_2, \dots, -\tilde{\lambda}_N\}, \{\tilde{\gamma}_{N,1}, \tilde{\gamma}_{N,2}, \dots, \tilde{\gamma}_{N,N}, 0, 0, \dots, 0\})$ с $N-1$ нулевым значением переменных:

$$\sum_{k,l=1}^N (|\tilde{\lambda}_k - \tilde{\gamma}_{N,l}| + |\tilde{\lambda}_k + \tilde{\gamma}_{N,l}|) - \sum_{k < l}^N (|\tilde{\gamma}_{N,k} - \tilde{\gamma}_{N,l}| + |\tilde{\gamma}_{N,k} + \tilde{\gamma}_{N,l}|) \geq \\ \geq -2N \sum_{k=1}^N |\tilde{\lambda}_k| + 2 \sum_{k < l}^N (|\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_l| + |\tilde{\lambda}_k + \tilde{\lambda}_l|) + 2 \sum_{k=1}^N |\tilde{\gamma}_{N,k}|. \quad (35)$$

Складывая (34) и (35), получаем основное неравенство

$$\sum_{k,l=1}^N (|\tilde{\lambda}_k - \tilde{\gamma}_{N,l}| + |\tilde{\lambda}_k + \tilde{\gamma}_{N,l}|) + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{k,l} |\tilde{\gamma}_{r+1,k} - \tilde{\gamma}_{r,l}| - \\ - 2 \sum_{r=2}^N \sum_{k < l} |\tilde{\gamma}_{r,k} - \tilde{\gamma}_{r,l}| - \sum_{k < l} |\tilde{\gamma}_{N,k} + \tilde{\gamma}_{N,l}| \geq \\ \geq -2N \sum_{k=1}^N |\tilde{\lambda}_k| + 2 \sum_{k < l}^N (|\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_l| + |\tilde{\lambda}_k + \tilde{\lambda}_l|) + \frac{2}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{k=1}^r |\tilde{\gamma}_{r,k}|. \quad (36)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Формулы для действия матричных элементов $U(u)$ на Ψ_{λ}

В данном приложении мы докажем следующие формулы:

$$\mathcal{B}(u)\Psi_{\lambda} = (-1)^N \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) \prod_{l=1}^N (u^2 - \lambda_l^2) \Psi_{\lambda}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(u)\Psi_{\lambda} = & \alpha_1 \sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{\lambda_p^2 - \lambda_l^2} \right) \left[\frac{(u + \lambda_p)}{2\lambda_p} \frac{(u - i\hbar/2)}{(\lambda_p - i\hbar/2)} \Psi_{\lambda^{-p}} + \right. \\ & \left. + \frac{(u - \lambda_p)}{2\lambda_p} \frac{(u - i\hbar/2)}{(\lambda_p + i\hbar/2)} \Psi_{\lambda^{+p}} \right] + \alpha_1 \left(\prod_{l=1}^N \frac{\lambda_l^2 - u^2}{\lambda_l^2 + \hbar^2/4} \right) \Psi_{\lambda}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u)\Psi_{\lambda} = & (-1)^{N-1} \frac{t(u) - 2\alpha_1\alpha_N}{u^2 + \hbar^2/4} \Psi_{\lambda} = \prod_{l=1}^N (u^2 - \lambda_l^2) \Psi_{\lambda} + \\ & + (-1)^{N-1} \alpha_1 \alpha_N \sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{\lambda_p^2 - \lambda_l^2} \right) \left[\frac{1}{\lambda_p(\lambda_p - i\hbar/2)} \Psi_{\lambda^{-p}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda_p(\lambda_p + i\hbar/2)} \Psi_{\lambda^{+p}} - \frac{2}{\lambda_p^2 + \hbar^2/4} \Psi_{\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Формула (38), в частности, дает

$$\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\lambda} = \alpha_1 \Psi_{\lambda^{-r}}, \quad \mathcal{D}(-\lambda_r)\Psi_{\lambda} = \alpha_1 \Psi_{\lambda^{+r}}, \quad \mathcal{D}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)\Psi_{\lambda} = \alpha_1 \Psi_{\lambda}. \quad (40)$$

Действие операторов $\mathcal{A}(u)$ и $\mathcal{C}(u)$ на функцию Ψ_{λ} может быть выведено с использованием (20) и детерминанта Складина [9] для $U(u)$, соответственно.

Прежде чем дать доказательство формул для действия, приведем полезные соотношения для $\mu(\gamma)$ и $Q(\gamma|\lambda)$, вытекающие из (27):

$$\frac{\mu(\gamma^{+q})}{\mu(\gamma)} = \prod_{l \neq q} \frac{\gamma_l - \gamma_q - i\hbar}{\gamma_q - \gamma_l}, \quad \frac{\mu(\gamma^{-p})}{\mu(\gamma)} = \prod_{l \neq p} \frac{\gamma_p - \gamma_l - i\hbar}{\gamma_l - \gamma_p}, \quad (41)$$

$$\frac{\mu(\gamma^{-p,+q})}{\mu(\gamma)} = \frac{\gamma_p - \gamma_q - 2i\hbar}{\gamma_p - \gamma_q} \prod_{l \neq p,q} \frac{\gamma_p - \gamma_l - i\hbar}{\gamma_l - \gamma_p} \cdot \frac{\gamma_l - \gamma_q - i\hbar}{\gamma_q - \gamma_l}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q(\gamma^{+q}|\lambda)}{Q(\gamma|\lambda)} &= -i^{N+1} \frac{\prod_{l \neq q} (\gamma_q + \gamma_l + i\hbar)}{\prod_l (\lambda_l^2 - (\gamma_q + i\hbar)^2)}, \\ \frac{Q(\gamma^{-p}|\lambda)}{Q(\gamma|\lambda)} &= i^{-N+1} \frac{\prod_l (\lambda_l^2 - \gamma_p^2)}{\prod_{l \neq p} (\gamma_p + \gamma_l)}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{Q(\gamma^{-p,+q}|\lambda)}{Q(\gamma|\lambda)} = \prod_l \frac{\gamma_p^2 - \lambda_l^2}{(\gamma_q + i\hbar)^2 - \lambda_l^2} \cdot \prod_{l \neq p,q} \frac{\gamma_l + \gamma_q + i\hbar}{\gamma_l + \gamma_p}. \quad (44)$$

Формула для действия $\mathcal{B}(u)$. Чтобы доказать формулу (37), используем (23). Принимая во внимание (7) и (8), получаем

$$(A(u)B(-u) - B(u)A(-u))\Psi_{\lambda} = 2i^{N-1} \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) \sum_{p=1}^N \int \mu(\gamma)Q(\gamma|\lambda) \times \\ \times e^{-i\kappa_1(\gamma_1+\dots+\gamma_N)/\hbar} \left(\prod_{l \neq p} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{\gamma_p - \gamma_l}\right) \psi_{\gamma+p} d\gamma_1 \dots d\gamma_N.$$

В каждом слагаемом с фиксированным значением p сделаем замену переменных $\gamma_p \rightarrow \gamma_p - i\hbar$. Затем используем формулы (41) и (43), чтобы преобразовать $\mu(\gamma)$ и $Q(\gamma|\lambda)$ к первоначальному виду. Это приводит к появлению дополнительного множителя. Наконец, сдвинем контур интегрирования по γ_p в исходное положение. Такая возможность была объяснена в разделе 5. Таким образом, имеем

$$- \alpha_1(A(u)B(-u) - B(u)A(-u))\Psi_{\lambda} = -2\alpha_1 i^{N-1} \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) e^{-\kappa_1} \times \\ \times \sum_{p=1}^N \int \mu(\gamma^{-p})Q(\gamma^{-p}|\lambda) e^{-i\kappa_1(\gamma_1+\dots+\gamma_N)/\hbar} \left(\prod_{l \neq p} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{\gamma_p - \gamma_l - i\hbar}\right) \psi_{\gamma} d\gamma_1 \dots d\gamma_N = \\ = \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) \sum_{p=1}^N \int \mu(\gamma)Q(\gamma|\lambda) \times \\ \times e^{-i\kappa_1(\gamma_1+\dots+\gamma_N)/\hbar} \left(\prod_{l \neq p} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{\gamma_l^2 - \gamma_p^2}\right) \prod_l (\lambda_l^2 - \gamma_p^2) \psi_{\gamma} d\gamma_1 \dots d\gamma_N,$$

где мы использовали равенство $e^{\kappa_1} = -2\alpha_1$. Поскольку

$$\left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) A(u)A(-u)\Psi_{\lambda} = \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) \int \mu(\gamma) \times \\ \times Q(\gamma|\lambda) e^{-i\kappa_1(\gamma_1+\dots+\gamma_N)/\hbar} \prod_l (\gamma_l^2 - u^2) \psi_{\gamma} d\gamma_1 \dots d\gamma_N,$$

получаем

$$\mathcal{B}(u)\Psi_{\lambda} = \left(u - \frac{i\hbar}{2}\right) \int \mu(\gamma)Q(\gamma|\lambda) e^{-i\kappa_1(\gamma_1+\dots+\gamma_N)/\hbar} \times \\ \times \left[\sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{\gamma_l^2 - \gamma_p^2}\right) \prod_l (\lambda_l^2 - \gamma_p^2) + \prod_l (\gamma_l^2 - u^2) \right] \psi_{\gamma} d\gamma_1 \dots d\gamma_N. \quad (45)$$

Докажем соотношение

$$\sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{\gamma_l^2 - \gamma_p^2}\right) \prod_{l=1}^N (\lambda_l^2 - \gamma_p^2) + \prod_{l=1}^N (\gamma_l^2 - u^2) = \prod_{l=1}^N (\lambda_l^2 - u^2). \quad (46)$$

Оно следует из тождества

$$\prod_{l=1}^N (b_l - x) - \prod_{l=1}^N (a_l - x) = \sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{a_l - x}{a_l - a_p} \right) \prod_{l=1}^N (b_l - a_p) \quad (47)$$

для переменных $x, a_l, b_l, l = 1, 2, \dots, n$, если сделать замену $x := u^2, a_l := \gamma_l^2, b_l := \lambda_l^2$. Тождество (47) есть просто интерполяционная формула Лагранжа для полинома $\prod_{l=1}^N (b_l - x) - \prod_{l=1}^N (a_l - x)$, восстанавливаемого по его значениям в N точках $x = a_p, p = 1, 2, \dots, N$. Используя (45) и (46), получаем (37).

Формула для действия $\mathcal{D}(u)$. Наша стратегия состоит в том, чтобы вывести формулы (40) и затем восстановить формулу (38), используя интерполяционную формулу Лагранжа. Имея в виду выражение (25) и формулы для действия (7)–(9) и (11), приступим к вычислениям. Имеем

$$\begin{aligned} C(u)B(-u)\psi_{\gamma} &= - \sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} \frac{(u - \gamma_p - i\hbar)}{(\gamma_q - \gamma_p - i\hbar)} \frac{(u + \gamma_q)}{(\gamma_q - \gamma_p)} \left(\prod_{l \neq p,q} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{(\gamma_l - \gamma_p)(\gamma_l - \gamma_q)} \right) \psi_{\gamma+p,-q} - \\ &\quad - \sum_p \left(\prod_{l \neq p} \frac{\gamma_l + u}{\gamma_l - \gamma_p} \right) \left(\prod_{l \neq p} \frac{u - \gamma_l}{\gamma_p - \gamma_l + i\hbar} \right) \psi_{\gamma}, \\ D(u)A(-u)\psi_{\gamma} &= - \sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} \frac{(u + \gamma_p)}{(\gamma_q - \gamma_p - i\hbar)} \frac{(u + \gamma_q)}{(\gamma_p - \gamma_q)} \left(\prod_{l \neq p,q} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{(\gamma_l - \gamma_p)(\gamma_l - \gamma_q)} \right) \psi_{\gamma+p,-q} + \\ &\quad + \sum_p \left(\prod_{l \neq p} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{\gamma_p - \gamma_l} \right) \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{-(u + \gamma_p)}{\prod_{l \neq p} (\gamma_p - \gamma_l + i\hbar)} - \frac{-(u + \gamma_p)}{\prod_{l \neq p} (\gamma_p - \gamma_l - i\hbar)} \right) \psi_{\gamma}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (D(u)A(-u) - C(u)B(-u))\psi_{\gamma} &= \\ &= -2 \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) \sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} \frac{u + \gamma_q}{(\gamma_p - \gamma_q)(\gamma_q - \gamma_p - i\hbar)} \prod_{l \neq p,q} \frac{(\gamma_l^2 - u^2)}{(\gamma_l - \gamma_p)(\gamma_l - \gamma_q)} \cdot \psi_{\gamma+p,-q} + \\ &\quad + \sum_p \left(\prod_{l \neq p} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{\gamma_p - \gamma_l} \right) \left(\prod_{l \neq p} \frac{1}{(\gamma_p - \gamma_l + i\hbar)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(u + \gamma_p)}{i\hbar} \prod_{l \neq p} \frac{1}{(\gamma_p - \gamma_l + i\hbar)} + \frac{(u + \gamma_p)}{i\hbar} \prod_{l \neq p} \frac{1}{(\gamma_p - \gamma_l - i\hbar)} \right) \psi_{\gamma}. \end{aligned}$$

В результате действия оператора $D(u)A(-u) - C(u)B(-u)$ на функцию Ψ_{λ} подынтегральное выражение превращается в линейную комбинацию функции ψ_{γ} с несдвинутыми индексами γ и функций $\psi_{\gamma+p,-q}$ со всеми возможными $p, q, p \neq q$. Совершая замену переменных и сдвигая контур интегрирования так, как это было описано выше при рассмотрении действия $\mathcal{B}(u)$, перепишем результат в виде

$$\int \mu(\gamma) Q(\gamma|\lambda) \left(\sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} R_{p,q}(u) \right) e^{-i(\gamma_1 + \dots + \gamma_N) \kappa_1 / \hbar} \psi_{\gamma} d\gamma_1 \dots d\gamma_N,$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{p,q}(u) &= -2 \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) \frac{\mu(\gamma^{-p,+q})}{\mu(\gamma)} \frac{Q(\gamma^{-p,+q}|\lambda)}{Q(\gamma|\lambda)} \times \\
 &\quad \times \frac{(u + \gamma_q + i\hbar)}{(\gamma_p - \gamma_q - 2i\hbar)(\gamma_q - \gamma_p + i\hbar)} \prod_{l \neq p,q} \frac{(\gamma_l^2 - u^2)}{(\gamma_p - \gamma_l - i\hbar)(\gamma_q - \gamma_l + i\hbar)} = \\
 &= 2 \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) \frac{(u + \gamma_q + i\hbar)}{(\gamma_q - \gamma_p)(\gamma_q - \gamma_p + i\hbar)} \left(\prod_{l \neq p,q} \frac{(\gamma_l^2 - u^2)}{(\gamma_p - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l)} \frac{\gamma_l + \gamma_q + i\hbar}{\gamma_l + \gamma_p} \right) \times \\
 &\quad \times \left(\prod_l \frac{\gamma_p^2 - \lambda_l^2}{(\gamma_q + i\hbar)^2 - \lambda_l^2} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
 (D(u)A(-u) - C(u)B(-u))\Psi_\lambda &= \int d\gamma_1 \dots d\gamma_N \mu(\gamma) Q(\gamma|\lambda) \times \\
 &\quad \times \left(\sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} R_{p,q}(u) + \sum_q (R_q^{(1)}(u) + R_q^{(2)}(u) + R_q^{(3)}(u)) \right) e^{-i(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)\kappa_1/\hbar} \psi_\gamma,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_q^{(1)}(u) &= \prod_{l \neq q} \frac{(\gamma_l^2 - u^2)}{(\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l + i\hbar)}, \\
 R_q^{(2)}(u) &= -\frac{(u + \gamma_q)}{i\hbar} \cdot \prod_{l \neq q} \frac{(\gamma_l^2 - u^2)}{(\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l + i\hbar)}, \\
 R_q^{(3)}(u) &= \frac{(u + \gamma_q)}{i\hbar} \cdot \prod_{l \neq q} \frac{(\gamma_l^2 - u^2)}{(\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l - i\hbar)}.
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$C(u)A(-u)\psi_\gamma = -i^{-N-1} \sum_p (u + \gamma_p) \left(\prod_{l \neq p} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{\gamma_p - \gamma_l} \right) \psi_{\gamma^{-p}},$$

после подходящего сдвига контуров интегрирования и замены переменных действие оператора $(u - i\hbar/2)C(u)A(-u)$ на функцию Ψ_λ принимает вид

$$\begin{aligned}
 (u - i\hbar/2)C(u)A(-u)\Psi_\lambda &= \\
 &= \alpha_1 \int \mu(\gamma) Q(\gamma|\lambda) \left(\sum_q R_q(u) \right) e^{-i(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N)\kappa_1/\hbar} \psi_\gamma d\gamma_1 \dots d\gamma_N,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_q(u) &= 2 \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) \frac{\mu(\gamma^{+q})}{\mu(\gamma)} \frac{Q(\gamma^{+q}|\lambda)}{Q(\gamma|\lambda)} i^{-N-1} (u + \gamma_q + i\hbar) \prod_{l \neq q} \frac{\gamma_l^2 - u^2}{\gamma_q - \gamma_l + i\hbar} = \\
 &= -2 \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) (u + \gamma_q + i\hbar) \prod_{l \neq q} \frac{(u^2 - \gamma_l^2)(\gamma_q + \gamma_l + i\hbar)}{(\gamma_q - \gamma_l)} \prod_l \frac{1}{\lambda_l^2 - (\gamma_q + i\hbar)^2}.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 R_q^{(0)}(u) &:= R_q(u) + \sum_{p \neq q} R_{p,q}(u) = \\
 &= -2 \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) (u + \gamma_q + i\hbar) \prod_{l \neq q} \frac{(u^2 - \gamma_l^2)(\gamma_q + \gamma_l + i\hbar)}{(\gamma_q - \gamma_l)} \cdot \prod_l \frac{1}{\lambda_l^2 - (\gamma_q + i\hbar)^2} + \\
 &+ 2 \left(u - \frac{i\hbar}{2} \right) \sum_{p \neq q} \frac{(u + \gamma_q + i\hbar)}{(\gamma_q - \gamma_p)(\gamma_q - \gamma_p + i\hbar)} \times \\
 &\times \left(\prod_{l \neq p,q} \frac{(\gamma_l^2 - u^2)}{(\gamma_p - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l)} \frac{\gamma_l + \gamma_q + i\hbar}{\gamma_l + \gamma_p} \right) \cdot \prod_l \frac{\gamma_p^2 - \lambda_l^2}{(\gamma_q + i\hbar)^2 - \lambda_l^2}. \tag{48}
 \end{aligned}$$

Докажем теперь следующее соотношение:

$$R_q^{(0)}(\lambda_r) = \frac{2(\lambda_r - i\hbar/2)}{(\gamma_q - \lambda_r + i\hbar)} \prod_{l \neq q} \frac{\gamma_l^2 - \lambda_r^2}{(\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l + i\hbar)}. \tag{49}$$

Начнем с тождества для переменных $a_1, a_2, \dots, a_N$ и $b_1, b_2, \dots, b_{N-1}$

$$\sum_{p=1}^N \frac{\prod_{l=1}^{N-1} (a_p - b_l)}{\prod_{l \neq p} (a_p - a_l)} = 1.$$

Выделяя слагаемое с $p = q$, перепишем тождество в виде

$$1 + \sum_{p \neq q} \left(\prod_{l \neq p,q} \frac{1}{a_p - a_l} \right) \frac{1}{a_q - a_p} \prod_{l=1}^{N-1} (a_p - b_l) = \frac{\prod_{l=1}^{N-1} (a_q - b_l)}{\prod_{l \neq q} (a_q - a_l)}.$$

Разделив это равенство на его правую часть, получаем

$$\frac{\prod_{l \neq q} (a_q - a_l)}{\prod_{l=1}^{N-1} (a_q - b_l)} + \sum_{p \neq q} \left(\prod_{l \neq p,q} \frac{a_q - a_l}{a_p - a_l} \cdot \prod_{l=1}^{N-1} \frac{a_p - b_l}{a_q - b_l} \right) = 1.$$

Полагая

$$a_q := (\gamma_q + i\hbar)^2, \quad a_l := \gamma_l^2 \quad (l \neq q), \quad \{b_1, \dots, b_{N-1}\} := \{\lambda_1^2, \dots, \lambda_{r-1}^2, \lambda_{r+1}^2, \dots, \lambda_N^2\},$$

имеем

$$\frac{\prod_{l \neq q} ((\gamma_q + i\hbar)^2 - \gamma_l^2)}{\prod_{l \neq r} ((\gamma_q + i\hbar)^2 - \lambda_l^2)} + \sum_{p \neq q} \left(\prod_{l \neq p,q} \frac{(\gamma_q + i\hbar)^2 - \gamma_l^2}{\gamma_p^2 - \gamma_l^2} \cdot \prod_{l \neq r} \frac{\gamma_p^2 - \lambda_l^2}{(\gamma_q + i\hbar)^2 - \lambda_l^2} \right) = 1.$$

Умножая полученное тождество на

$$\frac{2(\lambda_r - i\hbar/2)}{(\gamma_q - \lambda_r + i\hbar)} \prod_{l \neq q} \frac{(\gamma_l^2 - \lambda_r^2)}{(\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l + i\hbar)},$$

после несложных преобразований получаем (49). Используя этот результат, получаем

$$R_q^{(0)}(\lambda_r) + R_q^{(1)}(\lambda_r) + R_q^{(2)}(\lambda_r) = -\frac{1}{i\hbar(\gamma_q - \lambda_r + i\hbar)} \frac{\prod_l (\gamma_l^2 - \lambda_r^2)}{\prod_{l \neq q} (\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l + i\hbar)}.$$

Рассмотрим тождество

$$\sum_{m=1}^{2N} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^{2N} \frac{u - a_s}{a_m - a_s} = 1$$

при $\{a_1, \dots, a_{2N}\} := \{\gamma_1, \dots, \gamma_N, \gamma_1 + i\hbar, \dots, \gamma_N + i\hbar\}$ и $u = \lambda_r$. В явном виде имеем

$$\sum_{q=1}^N \left\{ \frac{1}{i\hbar} \cdot \frac{\prod_{l \neq q} (\gamma_l - \lambda_r) \prod_l (\gamma_l - \lambda_r + i\hbar)}{\prod_{l \neq q} (\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l - i\hbar)} - \frac{1}{i\hbar} \cdot \frac{\prod_l (\gamma_l - \lambda_r) \prod_{l \neq q} (\gamma_l - \lambda_r + i\hbar)}{\prod_{l \neq q} (\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l + i\hbar)} \right\} = 1.$$

Умножая обе части на $\prod_l (\gamma_l + \lambda_r) / \prod_l (\gamma_l - \lambda_r + i\hbar)$, получаем равенство

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^N \left\{ \frac{(\gamma_q + \lambda_r)}{i\hbar} \cdot \prod_{l \neq q} \frac{(\gamma_l^2 - \lambda_r^2)}{(\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l - i\hbar)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{i\hbar(\gamma_q - \lambda_r + i\hbar)} \cdot \frac{\prod_l (\gamma_l^2 - \lambda_r^2)}{\prod_{l \neq q} (\gamma_q - \gamma_l)(\gamma_q - \gamma_l + i\hbar)} \right\} = \\ = \frac{\prod_l (\gamma_l + \lambda_r)}{\prod_l (\gamma_l - \lambda_r + i\hbar)}, \end{aligned}$$

которое можно переписать в виде

$$\sum_{q=1}^N (R_q^{(3)}(\lambda_r) + (R_q^{(0)}(\lambda_r) + R_q^{(1)}(\lambda_r) + R_q^{(2)}(\lambda_r))) = \frac{\prod_l (\gamma_l + \lambda_r)}{\prod_l (\gamma_l - \lambda_r + i\hbar)}.$$

Поскольку

$$Q(\gamma|\lambda) \frac{\prod_l (\gamma_l + \lambda_r)}{\prod_l (\gamma_l - \lambda_r + i\hbar)} = Q(\gamma|\lambda^{-r}),$$

мы получаем $\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\lambda} = \alpha_1 \Psi_{\lambda^{-r}}$. Совершенно аналогично предыдущему устанавливается, что $\mathcal{D}(-\lambda_r)\Psi_{\lambda} = \alpha_1 \Psi_{\lambda^{+r}}$. Из формул (25) и (10) при $u = i\hbar/2$ следует, что $\mathcal{D}(i\hbar/2) = \alpha_1$. Таким образом, формулы (40) доказаны.

Из (7) ((8), (9), (11)) следует, что полином $A(u)$ ($B(u)$, $C(u)$, $D(u)$) имеет степень N ($(N-1)$, $(N-1)$, $(N-2)$) по переменной u . Следовательно, используя (25), находим, что полином $\mathcal{D}(u)$ имеет степень $2N$ по u . Нам известны результаты (40) действия оператора $\mathcal{D}(u)$ на функцию Ψ_{λ} в $2N+1$ точках. Применяя интерполяционную формулу Лагранжа, получаем (38).

Формула для действия $t(u)$. Вычислим теперь действие заданной формулой (21) трансфер-матрицы $t(u)$ на функцию Ψ_{λ} . Используя формулы (37) и (38), находим

$$\begin{aligned} t(u)\Psi_{\lambda} = & \left[u^2 + \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \right] \left[\alpha_1 \alpha_N \sum_{p=1}^N \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{\lambda_p^2 - \lambda_l^2} \right) \times \right. \\ & \times \left(\frac{1}{\lambda_p(\lambda_p - i\hbar/2)} \Psi_{\lambda^{-p}} + \frac{1}{\lambda_p(\lambda_p + i\hbar/2)} \Psi_{\lambda^{+p}} \right) + \\ & \left. + \frac{2\alpha_1 \alpha_N}{u^2 + \hbar^2/4} \left(\prod_{l=1}^N \frac{\lambda_l^2 - u^2}{\lambda_l^2 + \hbar^2/4} \right) \Psi_{\lambda} - \prod_{l=1}^N (\lambda_l^2 - u^2) \Psi_{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Тождество

$$\frac{1}{u^2 + \hbar^2/4} \left[\left(\prod_{l=1}^N \frac{\lambda_l^2 - u^2}{\lambda_l^2 + \hbar^2/4} \right) - 1 \right] = - \sum_{p=1}^N \frac{1}{\lambda_p^2 + \hbar^2/4} \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{\lambda_p^2 - \lambda_l^2} \right),$$

которое может быть получено с использованием интерполяционной формулы Лагранжа, влечет (39).

Список литературы

- [1] *E. Sklyanin.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. V. 118. P. 35–60.
- [2] *M. Gutzwiller.* Ann. Phys. 1981. V. 133. P. 304–331.
- [3] *E. Sklyanin.* The quantum Toda chain. In: Nonlinear Equations in Classical and Quantum Field Theory. Proc. Semin. Meudon, Paris, 1983/1984. Lect. Notes Phys. V. 226. Ed. N. Sanchez. Berlin: Springer, 1985. P. 196–233.
- [4] *S. Kharchev, D. Lebedev.* Lett. Math. Phys. 1999. V. 50. P. 53–77.
- [5] *С. Харчев, Д. Лебедев.* Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 71. С. 338–343; hep-th/0004065.
- [6] *A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev.* Int. Math. Res. Not. 2004. V. 17. P. 823–854.
- [7] *S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky.* Commun. Math. Phys. 2002. V. 225. P. 573–609.
- [8] *V. Pasquier, M. Gaudin.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 5243–5252.
- [9] *E. Sklyanin.* J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 2375–2389.
- [10] *V. Kuznetsov.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 2127–2138.