Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, В. И. Манько, Эволюция вероятностных мер, связанных с квантовыми системами, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 365–370

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1788>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:45:37

ЭВОЛЮЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР, СВЯЗАННЫХ С КВАНТОВЫМИ СИСТЕМАМИ

Выведено эволюционное уравнение для распределений вероятностей и характеристических функций квантовых томограмм, связанных с линейными и нелинейными эволюционными уравнениями для квантовых состояний.

Ключевые слова: квантовые томограммы, эволюционные уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно была дана формулировка квантовой механики (вероятностное представление), в которой квантовые состояния связываются со стандартными плотностями распределений вероятностей (так называемыми томографическими плотностями, или симплектическими томограммами). Этот формализм, содержащий такую же информацию, как волновая функция и матрица плотности, основан на томографическом подходе к измерению квантовых состояний [1], [2]. В работах [1] было найдено, что томографическое распределение вероятностей связано с функцией Вигнера [3]. Функция Вигнера $W(q, p)$ дает описание квантовой механики, наиболее сходное с классической статистической механикой гамильтоновых систем. При этом выполняется условие нормировки $\int dq \wedge dp W(q, p) = 1$. Тем не менее $W(q, p)$ не является положительно определенной. Таким образом, она определяет квазивероятностное распределение. С другой стороны, в квантовой теории информации произвольной эрмитовой наблюдаемой может быть сопоставлено распределение вероятностей [4]. В наших недавних работах [5], [6] была установлена связь томографической плотности распределения с мерой, используемой в квантовой теории информации. Было показано, что производная такой меры определяет томографическую плотность распределения. Цель предлагаемой работы – изучить глубокие свойства вероятностного представления квантовых состояний и вывести нелинейное эволюционное уравнение для квантово-вероятностных распределений, связанных с

*Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: amosov@fzteh.ru

†Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: manko@sci.lebedev.ru

квантовыми состояниями, используя известное эволюционное уравнение для томографической вероятности. Заметим, что эволюционные уравнения для распределений вероятностей, которые мы выводим, принадлежат к типу, не встречавшемуся в теории классических случайных процессов. Тем самым мы не можем определить немедленно такие специфические свойства введенных нами случайных процессов, как стационарность, марковость и т.п. Тем не менее основное достоинство нашего подхода заключается в возможности использования техники классической теории вероятностей для изучения квантовых эффектов при помощи введенных нами классических случайных процессов. Для квантовой эволюции в линейном случае такое уравнение было найдено в работах [5], [6]. Для томографических плотностей распределений вероятностей в работах [7] были получены эволюционные уравнения для конденсата Бозе–Эйнштейна и для солитонов, появляющихся в нелинейном уравнении Шредингера. В настоящей работе мы опираемся на характеристические функции, определяющие распределение вероятностей, по аналогии с подходом, предложенным в работе [8]. Мы выводим эволюционное уравнение именно для характеристических функций, отвечающих симплектическим томограммам.

2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕРЫ, СВЯЗАННЫЕ С КВАНТОВЫМИ СИСТЕМАМИ

Пусть $\mathcal{H}$ есть комплексное гильбертово пространство. Обозначим через $\sigma(\mathcal{H})$ множество всех состояний (операторов плотности) в $\mathcal{H}$. Элементами $\sigma(\mathcal{H})$ являются положительные операторы с единичным следом в $\mathcal{H}$. Для фиксированного $\hat{\rho} \in \sigma(\mathcal{H})$ функция трех действительных параметров X, μ, ν , определенная формулой

$$\omega(X, \mu, \nu) = \omega_{\rho}(X, \mu, \nu) = \text{Tr}(\hat{\rho} \delta(X - \mu \hat{x} - \nu \hat{p})),$$

называется *квантовой томограммой*. Здесь мы использовали операторную δ -функцию, определенную преобразованием Фурье как

$$\delta(\hat{a}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik\hat{a}} dk.$$

Для любых фиксированных μ и ν томограмма $\omega(X, \mu, \nu)$ представляет собой плотность распределения вероятностей, так что

$$\omega(X, \mu, \nu) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \omega(X, \mu, \nu) dX = 1.$$

Функция распределения $\mathcal{M}(X, \mu, \nu) = \mathcal{M}_{\rho}(X, \mu, \nu)$, отвечающая плотности $\omega_{\rho}(X, \mu, \nu)$, может быть получена следующим образом. Рассмотрим спектральное разложение наблюдаемой $\mu \hat{x} + \nu \hat{p}$:

$$\mu \hat{x} + \nu \hat{p} = \int_{\mathbb{R}} X d\widehat{M}((-\infty, X]) = \int_{\mathbb{R}} X \delta(X - \mu \hat{x} - \nu \hat{p}) dX,$$

где $\widehat{M}$ есть ортогональное разложение единицы, связанное с оператором $\mu\hat{x} + \nu\hat{p}$. Тогда формула

$$\mathcal{M}(X, \mu, \nu) = \text{Tr}(\hat{\rho}\widehat{M}((-\infty, X]))$$

определяет функцию распределения для плотности $\omega(X, \mu, \nu)$, так что

$$\omega(X, \mu, \nu) = \frac{d\mathcal{M}(X, \mu, \nu)}{dX}.$$

Физический смысл распределения вероятностей, определяемого функцией $\mathcal{M}(X, \mu, \nu)$ дают показания классического прибора, измеряющего наблюдаемую $\hat{x}$ (квадратуру) в системе координат фазового пространства, в которой была произведена замена масштаба и совершен поворот (квадратура гомодина). Известно, что функция распределения является инвариантом преобразования масштаба, так что $\mathcal{M}(\lambda X, \lambda\mu, \lambda\nu) = \mathcal{M}(X, \mu, \nu)$.

Пусть множество характеристических функций распределений $\omega(X, \mu, \nu)$ определяется формулой

$$F(k, \mu, \nu) = F_\rho(k, \mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikX} \omega_\rho(X, \mu, \nu) dX = \text{Tr}(\hat{\rho} e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})}). \quad (1)$$

Введенная функция обладает свойством

$$F\left(\frac{k}{\lambda}, \lambda\mu, \lambda\nu\right) = F(k, \mu, \nu). \quad (1')$$

Свойство (1') отвечает свойству однородности томограмм. Заметим, что можно восстановить $\omega(X, \mu, \nu)$ по $F(k, \mu, \nu)$ следующим образом:

$$\omega_\rho(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikX} F(k, \mu, \nu) dk.$$

Если состояние $\rho = \rho(t)$ удовлетворяет какому-либо эволюционному уравнению, то это приводит к эволюционным уравнениям для $\omega(t, X, \mu, \nu) = \omega_{\rho(t)}(X, \mu, \nu)$, $\mathcal{M}(t, X, \mu, \nu) = \mathcal{M}_{\rho(t)}(X, \mu, \nu)$ и $F(t, k, \mu, \nu) = F_{\rho(t)}(k, \mu, \nu)$. Ранее (см. [5]) мы получили (в некоторых частных случаях) эволюционные уравнения для плотности $\omega(t, X, \mu, \nu)$ и отвечающей ей функции распределения $\mathcal{M}(t, X, \mu, \nu)$. В этой работе мы выведем эволюционные уравнения для $F(t, k, \mu, \nu)$ и $\mathcal{M}(t, X, \mu, \nu)$.

3. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим квантовую эволюцию, описываемую уравнением

$$\partial_t \hat{\rho} = -i[\widehat{H}, \hat{\rho}], \quad (2)$$

где $\hat{\rho} \in \sigma(H)$ и $\hat{H}$ — произвольный гамильтониан. Выведем эволюционное уравнение для характеристической функции $F(t, k, \mu, \nu)$, отвечающей эволюции состояния (2). Дифференцируя по t , мы получаем для функции (1)

$$\partial_t F(t, k, \mu, \nu) = -i \operatorname{Tr}([\hat{H}, \hat{\rho}] e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})}) = i \operatorname{Tr}(\hat{\rho}, [\hat{H}, e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})}]). \quad (3)$$

Принимая во внимание, что $e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})} = e^{ik\mu\hat{x}} e^{ik\nu\hat{p}} e^{k\mu\nu/2} = e^{ik\nu\hat{p}} e^{ik\mu\hat{x}} e^{-k\mu\nu/2}$, нахо-

дим

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\hat{\rho} \hat{p}^s e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})}) &= \left(e^{-k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\nu e^{k\mu\nu/2} \right)^s \operatorname{Tr}(\hat{\rho} e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})}), \\ \operatorname{Tr}(\hat{\rho} e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})} \hat{p}^s) &= \left(e^{k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\nu e^{-k\mu\nu/2} \right)^s \operatorname{Tr}(\hat{\rho} e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})}), \\ \operatorname{Tr}(\hat{\rho} \hat{x}^s e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})}) &= \left(e^{-k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\mu e^{k\mu\nu/2} \right)^s \operatorname{Tr}(\hat{\rho} e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})}), \\ \operatorname{Tr}(\hat{\rho} e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})} \hat{x}^s) &= \left(e^{k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\mu e^{-k\mu\nu/2} \right)^s \operatorname{Tr}(\hat{\rho} e^{ik(\mu\hat{x} + \nu\hat{p})}), \end{aligned}$$

$s = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно, если гамильтониан имеет вид $\hat{H} = W(\hat{p}) + V(\hat{x})$, где W и V — произвольные аналитические функции, то эволюционное уравнение для $F(t, k, \mu, \nu)$ принимает форму

$$\begin{aligned} \partial_t F(t, k, \mu, \nu) &= i \left(W \left(e^{-k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\nu e^{k\mu\nu/2} \right) - W \left(e^{k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\nu e^{-k\mu\nu/2} \right) \right) F(t, k, \mu, \nu) + \\ &+ i \left(V \left(e^{-k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\mu e^{k\mu\nu/2} \right) - V \left(e^{k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\mu e^{-k\mu\nu/2} \right) \right) F(t, k, \mu, \nu). \end{aligned} \quad (4)$$

В частном случае $W(\hat{p}) = \hat{p}^2/2$, получаем

$$\begin{aligned} \partial_t F(t, k, \mu, \nu) &= \mu \partial_\nu F(t, k, \mu, \nu) + i \left(V \left(e^{-k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\mu e^{k\mu\nu/2} \right) - \right. \\ &\left. - V \left(e^{k\mu\nu/2} \frac{1}{ik} \partial_\mu e^{-k\mu\nu/2} \right) \right) F(t, k, \mu, \nu). \end{aligned}$$

4. НЕЛИНЕЙНОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим в качестве примера нелинейное эволюционное уравнение для волновой функции $\psi \in \mathcal{H}$ следующего вида:

$$i\psi_t = \frac{\hat{p}^2}{2}\psi + V(|\psi|^2)\psi.$$

Нелинейность обусловлена зависимостью потенциальной энергии от волновой функции. Имеется известный пример нелинейного уравнения Шредингера с кубической нелинейностью [9]. Введем уравнение для комплексно-сопряженной функции ψ^* :

$$-i\psi_t^* = \frac{\hat{p}^2}{2}\psi^* + V(|\psi|^2)\psi^*.$$

Тогда для состояния $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ получается эволюционное уравнение Лиувилля-фон Неймана

$$\hat{\rho}_t = -i\left[\frac{\hat{p}^2}{2}, \hat{\rho}\right] - i[\widehat{V}(|\psi|^2), \hat{\rho}], \quad (5)$$

где оператор $\widehat{V}(|\psi|^2)$ действует по формуле $(\widehat{V}(|\psi|^2)\phi)(X) = V(|\psi(X)|^2)\phi(X)$, $\phi \in \mathcal{H}$. Умножив обе части (5) на $e^{ik(\mu\hat{x}+\nu\hat{p})}$ и взяв след, находим

$$\partial_t F(t, k, \mu, \nu) = \mu\partial_\nu F(t, k, \mu, \nu) + i\text{Tr}(\hat{\rho}, [\widehat{V}(|\psi|^2), e^{ik(\mu\hat{x}+\nu\hat{p})}]).$$

Обозначим $\widetilde{V}(X) = V(|\psi(X)|^2)$. Тогда из (4) следует, что

$$\begin{aligned} \partial_t F(t, k, \mu, \nu) = \mu\partial_\nu F(t, k, \mu, \nu) + i\left(\widetilde{V}\left(e^{-k\mu\nu/2}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{k\mu\nu/2}\right) - \right. \\ \left. - \widetilde{V}\left(e^{k\mu\nu/2}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{-k\mu\nu/2}\right)\right)F(t, k, \mu, \nu). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$|\psi(X)|^2 = \omega(X, 1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikX} F(t, k, 1, 0) dk.$$

Таким образом, получается эволюционное уравнение вида

$$\begin{aligned} \partial_t F(t, k, \mu, \nu) = \mu\partial_\nu F(t, k, \mu, \nu) + \\ + i\left\{V\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\tilde{k}e^{-k\mu\nu/2}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{k\mu\nu/2}\right)F(t, \tilde{k}, 1, 0) d\tilde{k}\right) - \right. \\ \left. - V\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\tilde{k}e^{k\mu\nu/2}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{-k\mu\nu/2}\right)F(t, \tilde{k}, 1, 0) d\tilde{k}\right)\right\}F(t, k, \mu, \nu). \quad (6) \end{aligned}$$

Используя обратное преобразование Фурье, из уравнения (6) можно вывести эволюционное уравнение для распределения вероятностей $\mathcal{M}(t, X, \mu, \nu)$:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{M}(t, X, \mu, \nu) = \mu\partial_\nu \mathcal{M}(t, X, \mu, \nu) + i\left\{V\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\partial}{\partial \tilde{X}} e^{-(i\mu\nu/2)(\partial/\partial X)} \times \right. \right. \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-1} \partial_\mu e^{(i\mu\nu/2)(\partial/\partial X)}\right) d\mathcal{M}(t, \tilde{X}, 1, 0)\Big) - \\ - V\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\partial}{\partial \tilde{X}} e^{(i\mu\nu/2)(\partial/\partial X)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{X}}\right)^{-1} \partial_\mu e^{-(i\mu\nu/2)(\partial/\partial X)}\right) d\mathcal{M}(t, \tilde{X}, 1, 0)\right)\Big\} \mathcal{M}(t, X, \mu, \nu). \end{aligned}$$

Здесь мы обозначили через $(\partial/\partial X)^{-1}$ оператор, определенный формулой

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-1} f\right\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk \int_{\mathbb{R}} dy e^{ik(y-x)} \frac{1}{ik} f(y).$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы вывели эволюционные уравнения для распределений вероятностей и их характеристических функций, связанных с квантовой эволюцией, в двух случаях: для линейного эволюционного уравнения с гамильтонианом вида $\hat{H} = W(\hat{p}) + V(\hat{x})$ (4) и для эволюции, определяемой нелинейным уравнением Шредингера (6).

Список литературы

- [1] *J. Bertrand, P. Bertrand.* Found. Phys. 1987. V. 17. P. 397; *K. Vogel, H. Risken.* Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 2847.
- [2] *D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1244.
- [3] *E. P. Wigner.* Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
- [4] *A. S. Holevo.* Statistical structure of quantum theory. Lect. Notes Phys. V. 67. Berlin: Springer, 2001.
- [5] *G. G. Amosov, V. I. Man'ko.* Phys. Lett. A. 2003. V. 318. P. 287.
- [6] *G. G. Amosov, V. I. Man'ko.* J. Russ. Laser Res. 2003. V. 25. P. 253; Quantum tomograms as densities of von Neumann probability distributions. In: Squeezed States and Uncertainty Relations. Proc. of the 8th Int. Conf. on Squeezed States and Uncertainty Relations (Puebla, Mexico, June 9–13, 2003). Eds. H. Moya-Cessa et al. Princeton: Rinton, 2003. P. 7.
- [7] *S. De Nicola, R. Fedele, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko.* Eur. Phys. J. B. 2003. V. 36. P. 385; J. Russ. Laser Res. 2004. V. 25. P. 1.
- [8] *K. E. Cahill, R. J. Glauber.* Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 1882.
- [9] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.