Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Архипов, Ю. Е. Лозовик, В. И. Манько, В. А. Шарапов, Томография центра масс и вероятностное представление квантовых состояний в приложении к задачам о туннелировании, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 371–387

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1789>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:57:15

© 2005 г.

А. С. Архипов*, Ю. Е. Лозовик[†],
В. И. Манько[‡], В. А. Шарапов*

ТОМОГРАФИЯ ЦЕНТРА МАСС И ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ О ТУННЕЛИРОВАНИИ

Развито представление квантовых состояний, в котором вместо волновых функций и операторов плотности состояния описываются функциями распределения вероятностей. Представлено томографическое отображение операторов плотности на функции распределения вероятностей; отображение содержит одну случайную переменную, которая аналогична координате центра масс относительно повернутых и масштабированных систем отсчета в фазовом пространстве. Исследованы свойства этого отображения и выведено эволюционное уравнение для описывающего квантовое состояние распределения вероятностей. Для того чтобы продемонстрировать преимущества новых томографических представлений, описан новый метод компьютерного моделирования нестационарных квантовых процессов, основанный на таком представлении. Детально рассмотрена задача нестационарного туннелирования волнового пакета составной частицы – экситона.

Ключевые слова: квантовая томография, реконструкция состояний, туннелирование, квантовая динамика, компьютерное моделирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно была предложена новая формулировка квантовой механики, в которой вместо волновых функций или матриц плотности квантовые состояния описываются обычными положительными распределениями вероятностей [1]. Новая формулировка получила название “вероятностное представление квантовых состояний”. В рамках вероятностного представления квантовое состояние описывается *неотрицательной* функцией

*Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: antoncom@id.ru; vladsh79@mail.ru, vladsh@e-mail.ru

[†]Институт спектроскопии РАН, Троицк, Московская обл., Россия.
E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

[‡]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: manko@sci.lebedev.ru

распределения вероятностей, называемой маргинальным распределением [2] или томограммой. В основе вероятностного представления квантовых состояний лежит отображение операторов плотности на функции распределения вероятностей. Отображения операторов плотности на функции квазираспределений являются очень полезным инструментом описания квантовых состояний и хорошо известны (см., например, [3]). Мы сконцентрируемся на свойствах отображений операторов плотности на распределения вероятностей.

Развитое вначале для непрерывных переменных, томографическое отображение затем было обобщено на случай дискретных спиновых переменных [4]–[6]. Оказалось, что томограмма является измеряемой величиной, которая может быть использована в экспериментах, связанных с изучением неклассических и когерентных состояний света или атомов в атомной оптике [7]–[9]. С другой стороны, то обстоятельство, что функция, описывающая состояние в томографическом представлении, является неотрицательной, весьма привлекательно для тех, кто имеет дело с компьютерным моделированием квантовых систем [10]. Действительно, многие проблемы в этой области (например, проблема знака при моделировании ферми-систем) возникают вследствие того, что значения, используемые для описания состояний, могут быть отрицательными и даже комплексными. Томография также применима в квантовых вычислениях и при квантовом запутывании (см., например, [11]), а также в теории информации и анализе сигналов [8].

В настоящей работе исследуется описанное в работах [12] томографическое отображение специального вида, которое называется *томографией центра масс*. В рамках этого подхода оператор плотности квантового состояния отображается на функцию распределения вероятностей, зависящую от одной случайной переменной X и N -компонентных векторов $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ (N – число степеней свободы). Преимущество такой схемы заключается в том, что функция распределения вероятностей $w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu})$, описывающая состояние, зависит только от $2N + 1$ переменных в отличие от введенной ранее симплектической томографической схемы [13], [14], в которой для описания состояния используется функция распределения вероятностей $3N$ переменных $w_s(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$, называемая симплектической томограммой.

Чтобы проиллюстрировать применимость томографии в компьютерном моделировании, описывается метод компьютерного моделирования нестационарных квантовых процессов, основанный на томографическом представлении. Для описания квантовой эволюции вводится ансамбль траекторий в пространстве $\{\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu}\}$ – операция, аналогичная используемой в методе *траекторий Вигнера* [15]–[19]. Поведение траекторий подчиняется динамическим уравнениям, которые получены из эволюционного уравнения для квантового состояния, представленного в виде уравнения для томограммы. Метод демонстрируется на примере задачи нестационарного туннелирования экситона (спаренных электрона и дырки в полупроводнике) в одномерной наноструктуре (квантовый провод). В данном случае число степеней свободы равно двум. Для этой задачи найдены эволюция плотности вероятности и вероятность ионизации в результате рассеяния электрона и дырки на барьере в различных направлениях.

2. ТОМОГРАФИЯ ОДНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Ниже описана схема томографии центра масс. Мы будем использовать следующие обозначения. Рассматривается система N частиц в d -мерном пространстве, число степеней свободы равно Nd . Записываемые в виде $\vec{a}$ векторы предполагаются Nd -компонентными, если не оговорено противное. Через $\vec{e}$ обозначается вектор, все компоненты которого равны единице ($e_j = 1$). Скалярное произведение векторов записывается в виде $a = \vec{b} \vec{c}$ ($a = \sum_j b_j c_j$), а через $\vec{a} = \vec{b} \circ \vec{c}$ обозначается покомпонентное произведение векторов ($a_j = b_j c_j$). Томограмма обычной симплектической схемы обозначается как $w_s(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$, томограмма с одной случайной переменной записывается как $w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu})$. Также всегда предполагается, что постоянная Планка равна единице, $\hbar = 1$. Запись $\langle \hat{a} \rangle$ означает квантово-механическое среднее оператора $\hat{a}$:

$$\langle \hat{a} \rangle = \text{Tr}(\hat{a} \hat{\rho}), \quad (1)$$

где $\hat{\rho}$ – оператор плотности, описывающий состояние квантовой системы.

Рассмотрим произвольную систему, $\hat{q}$ и $\hat{p}$ – Nd -компонентные операторы координаты и импульса этой системы, соответственно. Можно ввести следующую функцию:

$$w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \langle \delta(X - \vec{\mu} \hat{q} - \vec{\nu} \hat{p}) \rangle, \quad (2)$$

которая называется томограммой центра масс. Здесь $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ – вещественные векторы, переменная X также вещественная. Можно показать [12], что существует однозначное соответствие (обратимое отображение) между томограммой w и матрицей плотности (которая определяется оператором плотности $\hat{\rho}$):

$$w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \langle \delta(X - \vec{\mu} \hat{q} - \vec{\nu} \hat{p}) \rangle, \quad (3)$$

$$\hat{\rho} = \int w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) e^{i(X - \vec{\mu} \hat{q} - \vec{\nu} \hat{p})} \frac{dX d\vec{\mu} d\vec{\nu}}{(2\pi)^{Nd}}. \quad (4)$$

Матрица плотности всегда может быть восстановлена по томограмме w с помощью этих равенств, и, таким образом, томограмма одной случайной переменной полностью описывает квантовое состояние. Заметим, что в данном случае описывающая состояние функция является *неотрицательной* и зависит от $2Nd + 1$ переменных в отличие от симплектической томограммы, которая зависит от $3Nd$ переменных [13], [14].

Для вывода свойств томограммы w и ее эволюционного уравнения удобно рассматривать матрицу плотности в координатном представлении и вигнеровскую формулировку квантовой механики [15]. В рамках вигнеровского формализма состояние системы описывается определенной в фазовом пространстве вещественной функцией Вигнера

$W(\vec{q}, \vec{p})$, которая связана с матрицей плотности следующим образом:

$$W(\vec{q}, \vec{p}) = \int \rho\left(\vec{q} + \frac{\vec{u}}{2}, \vec{q} - \frac{\vec{u}}{2}\right) e^{-i\vec{p}\vec{u}} \frac{d\vec{u}}{(2\pi)^{Nd}}, \quad (5)$$

$$\rho(\vec{q}', \vec{q}'') = \int W\left(\frac{\vec{q}' + \vec{q}''}{2}, \vec{p}\right) e^{i\vec{p}(\vec{q}' - \vec{q}'')} d\vec{p}. \quad (6)$$

Используя (3), (4) и (5), (6), получаем

$$w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \int W(\vec{q}, \vec{p}) e^{-ik(X - \vec{\mu}\vec{q} - \vec{\nu}\vec{p})} \frac{dk d\vec{q} d\vec{p}}{2\pi}, \quad (7)$$

$$W(\vec{q}, \vec{p}) = \int e^{-i(\vec{\mu}\vec{q} + \vec{\nu}\vec{p} - X)} w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) \frac{dX d\vec{\mu} d\vec{\nu}}{(2\pi)^{2Nd}}. \quad (8)$$

Обычное симплектическое томографическое отображение построено в работах [14] и [20]. Симплектическая томограмма $w_s(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$ и функция Вигнера связаны следующим образом:

$$w_s(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \int W(\vec{q}, \vec{p}) e^{-i\vec{k}(\vec{X} - \vec{\mu} \circ \vec{q} - \vec{\nu} \circ \vec{p})} \frac{d\vec{k} d\vec{q} d\vec{p}}{(2\pi)^{Nd}}, \quad (9)$$

$$W(\vec{q}, \vec{p}) = \int e^{-i\vec{e}(\vec{\mu} \circ \vec{q} + \vec{\nu} \circ \vec{p} - \vec{X})} w_s(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) \frac{d\vec{X} d\vec{\mu} d\vec{\nu}}{(2\pi)^{2Nd}}.$$

Поскольку функция Вигнера связана обратимыми отображениями как с томограммой w , так и с томограммой w_s , ясно, что эти томограммы содержат одинаковую информацию относительно квантового состояния. Действительно,

$$\begin{aligned} w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) &= \int w_s(\vec{Y}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) \delta\left(X - \sum_{j=1}^{Nd} Y_j\right) d\vec{Y}, \\ w_s(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) &= \int w(Y, \vec{k} \circ \vec{\mu}, \vec{k} \circ \vec{\nu}) e^{i(Y - \vec{k}\vec{X})} d\vec{k} dY. \end{aligned} \quad (10)$$

Функция Вигнера нормирована следующим образом:

$$\begin{aligned} \int W(\vec{q}, \vec{p}) d\vec{q} d\vec{p} &= \int \rho\left(\vec{q} + \frac{\vec{u}}{2}, \vec{q} - \frac{\vec{u}}{2}\right) e^{-i\vec{p}\vec{u}} \frac{d\vec{u} d\vec{q} d\vec{p}}{(2\pi)^{Nd}} = \\ &= \int \rho\left(\vec{q} + \frac{\vec{u}}{2}, \vec{q} - \frac{\vec{u}}{2}\right) \delta(\vec{u}) d\vec{u} d\vec{q} = \int \rho(\vec{q}, \vec{q}) d\vec{q} = 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где условие нормировки для матрицы плотности выбрано в виде $\text{Tr } \hat{\rho} = 1$. В таком случае томограмма w нормирована относительно переменной X :

$$\int w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) dX = \int W(\vec{q}, \vec{p}) \delta(k) e^{ik(\vec{\mu}\vec{q} + \vec{\nu}\vec{p})} dk d\vec{q} d\vec{p} = 1. \quad (12)$$

Хотя томограмма зависит от $2Nd + 1$ переменной, а не от $2Nd$ переменных, как матрицы плотности, полнота физического описания в обоих формализмах одинакова вследствие того, что томограмма является однородной функцией. Рассмотрим формулу (7) и умножим все переменные функции w на некоторое вещественное число λ ; имеем

$$\begin{aligned} w(\lambda X, \lambda \vec{\mu}, \lambda \vec{\nu}) &= \int W(\vec{q}, \vec{p}) e^{-i\lambda k(X - \vec{\mu}\vec{q} - \vec{\nu}\vec{p})} \frac{dk d\vec{q} d\vec{p}}{2\pi} = \\ &= \int W(\vec{q}, \vec{p}) e^{-ik(X - \vec{\mu}\vec{q} - \vec{\nu}\vec{p})} \frac{dk d\vec{q} d\vec{p}}{2\pi|\lambda|} = \frac{w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu})}{|\lambda|}, \end{aligned} \quad (13)$$

где мы просто сделали замену переменных $\lambda k \rightarrow k$. Из свойства (13) получаем

$$w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = |X|^{-1} w\left(1, \frac{\vec{\mu}}{X}, \frac{\vec{\nu}}{X}\right). \quad (14)$$

Чистое состояние описывается волновой функцией $\Psi(\vec{q})$. В этом случае томограмма w дается выражением

$$w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \int d\vec{Y} \frac{\delta(X - \sum_{j=1}^{Nd} Y_j)}{(2\pi)^{Nd} \prod_{j=1}^{Nd} |\nu_j|} \left| \int \Psi(\vec{q}) \exp\left[i\left(\vec{q} \frac{\vec{Y}}{\vec{\nu}} - \frac{\vec{q} \circ \vec{q} \vec{\mu}}{2 \vec{\nu}}\right)\right] d\vec{q} \right|^2, \quad (15)$$

где через $\vec{Y}/\vec{\nu}$ обозначается покомпонентное деление векторов. Соответствующая формула для симплектической томограммы w_s приведена в работе [21].

Прежде чем продолжить рассмотрение формализма томографии центра масс, мы хотели бы объяснить происхождение такого названия. Дело в том, что единственная случайная переменная X аналогична положению центра масс (точнее, сумме координат соответствующих векторов). Действительно, положение центра масс есть

$$X_{\text{cm}} = \sum_j \frac{m_j X_j}{M} = \sum_j \frac{m_j (\mu_j q_j + \nu_j p_j)}{M}, \quad (16)$$

где $M = \sum_j m_j$ и m_j — масса, соответствующая j -й степени свободы, и величина X_{cm} может быть сопоставлена с $X = \vec{\mu}\vec{q} + \vec{\nu}\vec{p}$ для некоторого другого набора $\{\vec{\mu}, \vec{\nu}\}$. Каждый набор параметров $\{\vec{\mu}, \vec{\nu}\}$ соответствует определенному масштабированию и вращению системы отсчета в фазовом пространстве.

3. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

3.1. Эволюционные уравнения. Рассмотрим эволюционное уравнение для томограммы w начнем с наиболее общего эволюционного уравнения для матрицы плотности

$$i \frac{\partial \rho(\vec{q}', \vec{q}'')}{\partial t} = [\hat{H}, \rho(\vec{q}', \vec{q}'')]. \quad (17)$$

Здесь и далее мы опускаем зависимость от времени t , но предполагаем, что все описывающие состояния функции (матрица плотности, функция Вигнера, томограмма) зависят от времени как от параметра. Для гамильтониана вида $\hat{H} = \sum_i \hat{p}_i^2 / (2m_i) + V(\vec{q})$ мы можем использовать эволюционное уравнение Мойала для функции Вигнера [5], [22], [23]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{\vec{m}} \frac{\partial W}{\partial \vec{q}} + i \left[V \left(\vec{q} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) - V \left(\vec{q} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) \right] W = 0, \quad (18)$$

где $\vec{p}/\vec{m}$ – вектор с компонентами p_i/m_i (уравнение справедливо для случая различных масс, для различных частиц и направлений). Наличие операторов в аргументе потенциала V подразумевает аналитическое разложение потенциала и использование соответствующих операторных произведений. Это уравнение легко может быть получено применением преобразования (5) к уравнению (17).

Применим преобразование (7) к эволюционному уравнению (18). Это даст эволюционное уравнение для квантовой томограммы w с одной случайной переменной [12]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{m}} \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}} + i \left[V \left(-\frac{\partial}{\partial \vec{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} + \frac{i}{2} \vec{\nu} \frac{\partial}{\partial X} \right) - V \left(-\frac{\partial}{\partial \vec{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} - \frac{i}{2} \vec{\nu} \frac{\partial}{\partial X} \right) \right] w = 0. \quad (19)$$

Поскольку эволюция матрицы плотности унитарна, след сохраняется. Это справедливо в любом представлении, включая используемое нами томографическое представление квантового эволюционного уравнения.

Стационарные состояния с определенной энергией удовлетворяют следующему уравнению для собственных значений:

$$\hat{H} \hat{\rho}_E = \hat{\rho}_E \hat{H} = E \hat{\rho}_E. \quad (20)$$

Используя ту же процедуру, что и при выводе уравнения (19), получаем уравнения для собственных значений для томограммы w

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{Nd} \left[\frac{1}{2m_j} \frac{\partial^2}{\partial \nu_j^2} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-2} - \frac{1}{8m_j} \mu_j^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right] w + \operatorname{Re} V \left(\frac{i}{2} \vec{\nu} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial \vec{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} \right) w &= Ew, \\ - \sum_{j=1}^{Nd} \frac{\mu_j}{2m_j} \frac{\partial w}{\partial \nu_j} &= \operatorname{Im} V \left(\frac{i}{2} \vec{\nu} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial \vec{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} \right) w. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим теперь два состояния a и b . Вероятность перехода из состояния a в состояние b есть

$$P_{ab} = \operatorname{Tr}(\hat{\rho}_a \hat{\rho}_b) = \int \rho_a(\vec{q}', \vec{q}'') \rho_b(\vec{q}'', \vec{q}') d\vec{q}' d\vec{q}'',$$

или, в терминах вигнеровского формализма,

$$P_{ab} = (2\pi)^{Nd} \int W^a(\vec{q}, \vec{p}) W^b(\vec{q}, \vec{p}) d\vec{q} d\vec{p}. \quad (22)$$

Из формулы (8) получаем выражение для вероятности P_{ab} в томографическом подходе:

$$P_{ab} = \int w^a(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) w^b(Y, -\vec{\mu}, -\vec{\nu}) e^{i(X+Y)} \frac{dX dY d\vec{\mu} d\vec{\nu}}{(2\pi)^{Nd}}. \quad (23)$$

Томографическое отображение может быть также применено к системе, находящейся в состоянии термодинамического равновесия при температуре $T \neq 0$. Томографическое эволюционное уравнение с “мнимым временем” $\beta = 1/T$ (температура T измеряется в единицах энергии) выводится из уравнения

$$-\frac{\partial \rho(\vec{q}', \vec{q}'', \beta)}{\partial \beta} = \hat{H}_{\vec{q}'} \rho(\vec{q}', \vec{q}'', \beta) \quad (24)$$

с начальным условием $\rho(\vec{q}', \vec{q}'', \beta)|_{\beta=0} = \delta(\vec{q}' - \vec{q}'')$ (которое соответствует постоянной функции Вигнера, см. (5)). Индекс $\vec{q}'$ в $\hat{H}_{\vec{q}'}$ здесь показывает, что гамильтониан действует только на переменные $\vec{q}'$.

Переход к томограмме w осуществляется непосредственно. Мы используем те же правила, что и при выводе эволюционного уравнения (19) и уравнений для собственных значений (21). Тогда эволюционное уравнение с “мнимым временем” β для томограммы w имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w}{\partial \beta} &= \sum_{j=1}^{Nd} \left[\frac{1}{2m_j} \frac{\partial^2}{\partial \nu_j^2} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-2} - \frac{1}{8m_j} \mu_j^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right] w + \text{Re } V \left(\frac{i}{2} \vec{\nu} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial \vec{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} \right) w, \\ &\quad - \sum_{j=1}^{Nd} \frac{\mu_j}{2m_j} \frac{\partial w}{\partial \nu_j} = \text{Im } V \left(\frac{i}{2} \vec{\nu} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial \vec{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} \right) w. \end{aligned} \quad (25)$$

Из выражения (7) видно, что начальное условие ($\beta = 0$) есть томограмма w в виде δ -функции, равная нулю везде, кроме точки $\vec{\mu}, \vec{\nu} = 0$, и постоянная по направлению X в этой точке.

3.2. Вычисление средних значений. Развивая формализм томографии центра масс, для завершения картины мы должны предоставить правила вычисления средних величин. При использовании матрицы плотности для описания состояния системы среднее значение некоторого оператора $\hat{A}$ может быть получено как

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}),$$

где выбрано $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$.

При вычислении среднего значения в рамках формулировки квантовой механики Вигнера–Мойала мы имеем дело с *символом Вейля* $A^W(\vec{q}, \vec{p})$ [24] оператора $A(\hat{\vec{q}}, \hat{\vec{p}})$ (см. обзоры [16], [25], а также [26]):

$$\langle A \rangle = \int A^W(\vec{q}, \vec{p}) W(\vec{q}, \vec{p}) d\vec{q} d\vec{p}, \quad (26)$$

где символ Вейля задается формулой

$$A^W(\vec{q}, \vec{p}) = \int \text{Tr}(A(\hat{\vec{q}}, \hat{\vec{p}}) e^{i\vec{\xi}\hat{\vec{q}} + i\vec{\eta}\hat{\vec{p}}}) e^{-i\vec{\xi}\vec{q} - i\vec{\eta}\vec{p}} \frac{d\vec{\xi} d\vec{\eta}}{(2\pi)^{2Nd}}. \quad (27)$$

Выражение для средних величин в формализме томографии одной случайной переменной получается при использовании связи между томограммой w и функцией Вигнера (8):

$$\langle A \rangle = \int e^{iX} w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu}) A(\vec{\mu}, \vec{\nu}) dX d\vec{\mu} d\vec{\nu}, \quad (28)$$

$$A(\vec{\mu}, \vec{\nu}) = \int A^W(\vec{q}, \vec{p}) e^{-i(\vec{\mu}\vec{q} + \vec{\nu}\vec{p})} \frac{d\vec{q} d\vec{p}}{(2\pi)^{2Nd}}. \quad (29)$$

Если рассматриваемый оператор зависит только от координат $\hat{\vec{q}}$ или импульсов $\hat{\vec{p}}$, символы Вейля имеют тот же вид, что и соответствующие операторы в координатном или импульсном представлении. Оператор $A(\hat{\vec{q}})$ есть $A(\vec{x})$ в $\vec{x}$ -координатном представлении, в таком случае его символ Вейля $A^W(\vec{q}, \vec{p})$ равен $A(\vec{q})$. То же справедливо для оператора, зависящего от импульсов: $B(\hat{\vec{p}})$ есть $B(\vec{y})$ в $\vec{y}$ -импульсном представлении, и $B^W(\vec{q}, \vec{p}) = B(\vec{p})$.

Рассмотрим оператор $A(\hat{\vec{q}})$, зависящий только от координат. Для операторов, которые зависят от импульсов, все уравнения получаются такими же с точностью до замены $\vec{\mu}$ на $\vec{\nu}$ и наоборот, поскольку пары $\vec{q}, \vec{\mu}$ и $\vec{p}, \vec{\nu}$ входят в уравнения, связывающие томограмму w с функцией Вигнера, симметрично. Интегрирование по переменной $\vec{\nu}$ в выражении (28) для оператора $A(\hat{\vec{q}})$ дает δ -функцию $\delta(\vec{\nu})$. Далее имеем

$$\langle A \rangle = \int A^W(\vec{q}) e^{-i(\vec{\mu}\vec{q} - X)} w(X, \vec{\mu}, \vec{\nu})|_{\vec{\nu}=0} \frac{dX d\vec{\mu} d\vec{q}}{(2\pi)^{Nd}}. \quad (30)$$

Часто необходимо работать с одночастичными и одномерными операторами. В этом случае с достаточной степенью общности можно рассмотреть оператор $A(\hat{q}_1)$. Соответствующее среднее значение дается выражением

$$\langle A \rangle = \int A^W(X) w(X, \mu_1, \tilde{\vec{\mu}}, \vec{\nu}) \Big|_{\substack{\mu_1=1 \\ \tilde{\vec{\mu}}=0 \\ \vec{\nu}=0}} dX, \quad (31)$$

где $\tilde{\vec{\mu}}$ обозначает все μ_j , за исключением заданного μ_1 .

4. МЕТОД КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В РАМКАХ КВАНТОВОГО ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОДХОДА

В настоящем разделе мы опишем метод компьютерного моделирования, который был разработан для симплектической томографии [10]. Здесь мы для простоты рассмотрим случай $Nd = 1$, а обобщение для случая большего числа переменных и для томографии центра масс не вызывает затруднений. Эволюционное уравнение (19) для томограммы может быть переписано в следующем виде [10], [23]:

$$\dot{w} - \frac{\mu}{m} \frac{\partial w}{\partial \nu} - 2 \frac{\partial V(\tilde{q})}{\partial q} \left(\frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial X} \right) w + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} V(\tilde{q})}{\partial q^{2n+1}} \left(\frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial X} \right)^{2n+1} w = 0, \quad (32)$$

где $\tilde{q}$ дается выражением

$$\tilde{q} = - \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu}.$$

Можно определить некоторый точный вид оператора $(\partial/\partial X)^{-1}$, например

$$\left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} f(X) = \int_0^X f(Y) dY.$$

В нашей модели (см. ниже) вследствие специального вида потенциала оператор $(\partial/\partial X)^{-1}$ не входит в динамические уравнения, поэтому его конкретный вид не имеет значения при моделировании.

Уравнение (32) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial X} G_X(X, \mu, \nu) + \frac{\partial w}{\partial \mu} G_\mu(X, \mu, \nu) + \frac{\partial w}{\partial \nu} G_\nu(X, \mu, \nu) = 0, \quad (33)$$

где функции G зависят от квантовой томограммы, ее производных и первообразных (последние отвечают членам с $(\partial/\partial X)^{-1}$ в уравнении (32)). Переписанное в виде (33) эволюционное уравнение имеет форму уравнения непрерывности для квантовой томограммы

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial w}{\partial \mu} \dot{\mu} + \frac{\partial w}{\partial \nu} \dot{\nu} = 0. \quad (34)$$

Это уравнение аналогично уравнению непрерывности для классической функции распределения и уравнению Лиувилля. Как известно, характеристики уравнения Лиувилля суть классические траектории в фазовом пространстве; они подчиняются гамильтоновым уравнениям движения. Квантовая томограмма является неотрицательной функцией, и мы используем ее как функцию распределения для траекторий в пространстве $\{X, \mu, \nu\}$, подчиняющуюся уравнениям, аналогичным уравнениям Гамильтона для классических траекторий. Из сравнения (33) с (34) ясно, что поведение траекторий определяется уравнениями

$$\dot{X} = G_X(X, \mu, \nu), \quad \dot{\mu} = G_\mu(X, \mu, \nu), \quad \dot{\nu} = G_\nu(X, \mu, \nu). \quad (35)$$

Уравнение для томограммы является линейным, поскольку оно получается из линейного уравнения фон Неймана для матрицы плотности с помощью линейного отображения. Линейность уравнения для томограммы следует также из линейности уравнения Мойала для функции Вигнера, к которой применяется линейное интегральное преобразование Радона, что сохраняет линейность уравнения. Однако когда мы используем численный метод решения этого уравнения, сводящий решение к нахождению траекторий, последние могут удовлетворять нелинейным уравнениям, зависящим от потенциала. Такое положение полностью аналогично ситуации с линейным уравнением Шредингера для волновой функции при заданном потенциале и нелинейными уравнениями движения для траекторий частицы в потенциале, отличном от квадратичного.

Использование траекторий позволяет избежать прямого вычисления функции распределения (в отличие от сеточных методов, когда для численного решения уравнения Шредингера волновая функция вычисляется в каждой точке). Следовательно, необходимо использовать некоторую аппроксимацию для квантовой томограммы, и мы используем локальную экспоненциальную аппроксимацию (как в работе [17] для функции Вигнера)

$$w(X, \mu, \nu) = w_0 e^{-[(y - y_a(t))A_a(t)(y - y_a(t)) + b_a(t)(y - y_a(t))]}, \quad (36)$$

где $y = \{X, \mu, \nu\}$, а y_a — рассматриваемая точка. Параметрами этой аппроксимации являются матрица A_a и вектор b_a , и некоторые комбинации этих параметров входят в эволюционное уравнение (32) вместо производных и первообразных квантовой томограммы. Вычисление средних X, μ, ν и их произведений позволяет получить A_a и b_a . После этого функции G известны, и динамические уравнения (35) могут быть решены численно.

Для вычисления средних величин используется следующая аппроксимация квантовой томограммы:

$$w(X, \mu, \nu, t) = \sum_{j=1}^J \delta(X - X_j(t)) \delta(\mu - \mu_j(t)) \delta(\nu - \nu_j(t)), \quad (37)$$

где суммирование производится по всем J траекториям; $X_j(t), \mu_j(t), \nu_j(t)$ — координаты j -й траектории в пространстве $\{X, \mu, \nu\}$ в момент времени t . Такая аппроксимация отвечает использованию ансамбля траекторий. В областях, где значение томограммы $w(X, \mu, \nu)$ мало, траектории разрежены, а там, где это значение велико, траектории накапливаются. Чем больше число использованных траекторий, тем лучше работает аппроксимация (37).

5. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ТУННЕЛИРОВАНИЯ ЭКСИТОНА

В данном разделе рассматривается прохождение (нестационарное туннелирование) составной частицы экситона через потенциальный барьер в одномерной полупроводни-

ковой структуре (в квантовом проводе). Экситон представляет собой связанное состояние электрона и дырки в полупроводнике, поэтому мы имеем дело с двумя степенями свободы.

Возможна следующая экспериментальная реализация. Рассмотрим квазиодномерную полупроводниковую наноструктуру, движение в которой разрешено только в одном направлении (квантовый провод). Поперечное движение запрещено из-за наличия сильных ограничительных барьеров. Потенциальный барьер в разрешенном для движения направлении может быть помещен в некоторую точку квантового провода как при помощи гетероперехода, так и при помощи затвора в полупроводнике. Используя фемтосекундные лазерные импульсы, можно сформировать экситонный волновой пакет как с помощью квазирезонансной накачки, так и возбуждая электрон валентной зоны с формированием дырки и последующим связыванием двух частиц в экситон. Далее экситонный волновой пакет может двигаться в направлении барьера, и с помощью некоторых детекторов можно исследовать рассеяние экситона.

Имея в виду сказанное, построим компьютерную модель. Для примера будем использовать параметры, соответствующие арсениду галлия GaAs (диэлектрическая постоянная $\epsilon = 12.5$, эффективные массы электрона и дырки $m_e = 0.07m_e^{(0)}$ и $m_h = 0.15m_e^{(0)}$, соответственно, где $m_e^{(0)}$ – масса электрона в вакууме). Трехмерный экситон в объеме GaAs характеризуется эффективным боровским радиусом $a^* \approx 10$ нм и энергией связи $E_c^* \approx 4$ мэВ. Будем использовать единицу длины a^* , единицу массы m_e и $\hbar = 1$. Соответствующие единицы энергии и времени равны $E_0 = \hbar^2 / (m_e a^{*2}) \approx 10$ мэВ и $t_0 = m_e a^* / \hbar \approx 100$ фс.

Энергетический спектр и волновые функции относительного движения электрона и дырки в трехмерном экситоне аналогичны энергетическому спектру и волновым функциям атома водорода. Однако это не верно для одномерного экситона. Во-первых, эффективный потенциал взаимодействия системы электрон–дырка в квазиодномерной структуре не является кулоновским. Действительно, если размер экситона в направлении разрешенного движения много больше, чем размер квантового провода в поперечном направлении, то применимо адиабатическое приближение, и трехмерный потенциал взаимодействия должен быть усреднен по поперечным степеням свободы. Получающийся одномерный эффективный потенциал существенно отличается от кулоновского (см. подробное обсуждение аналогичной модели в работе [19]). Во-вторых, соответствующие энергетический спектр и волновые функции относительного движения электрона и дырки также изменяются по сравнению с водородоподобными состояниями. Мы выбираем волновую функцию основного состояния экситона в гауссовом виде.

Экситонный волновой пакет может быть представлен как гауссов волновой пакет в координатах центра масс:

$$\Psi(x_e, x_h, t)|_{t=0} = \frac{e^{-r^2/(2\sigma)}}{(\pi\sigma)^{1/4}} \frac{e^{-(R-x_0)^2/(2S)+iRp_0}}{(\pi S)^{1/4}}, \quad (38)$$

где $R = (m_e x_e + m_h x_h) / (m_e + m_h)$, $r = |x_e - x_h|$, x_e и x_h – координаты электрона и дырки, x_0 , p_0 и S – параметры, для которых используются следующие значения: $x_0 = -10$, $p_0 = 3$, $S = 2$ и $\sigma = 1$.

Предполагается, что внешний потенциал равен нулю везде, кроме области барьера; мы используем барьер шириной 5 нм, или 0.5 в принятых единицах. Для простоты мы полагаем, что барьеры для электрона и дырки одинаковы, и берем квадратичные внешний потенциал и потенциал взаимодействия, обрезанные на некотором расстоянии. В таком случае внешний потенциал задается выражением

$$V_{\text{ext}}(x) = \begin{cases} C - Dx^2, & |x| < \sqrt{\frac{C}{D}}, \\ 0, & |x| \geq \sqrt{\frac{C}{D}}. \end{cases} \quad (39)$$

C – высота барьера, $\sqrt{C/D} = 0.5$ – его ширина.

Потенциал взаимодействия V_{int} также предполагается квадратичным:

$$V_{\text{int}}(r) = \begin{cases} Br^2 - A, & r < \sqrt{\frac{A}{B}}, \\ 0, & r \geq \sqrt{\frac{A}{B}}, \end{cases} \quad (40)$$

где $r = |x_e - x_h|$. Потенциал (40) может описывать, например, электронно-дырочное взаимодействие в пространственно непрямом экситоне, например в двойных квантовых проводах с большим разделительным расстоянием между ними [27]. Начальная волновая функция относительного движения, выбранная равной гауссовой функции с единичной дисперсией, на расстояниях порядка $r = 3$ пренебрежимо мала в пределах однопроцентной точности. Таким образом, мы выбираем радиус электронно-дырочного взаимодействия равным $\sqrt{A/B} = 3$.

Предполагается, что мы рассматриваем квазиодномерный экситон с энергией связи $E_c = 1/8$. На самом деле свойства квантового провода оказывают существенное влияние на волновые функции, энергию связи и т. д. экситона в нем. Мы также пренебрегаем возможностью рекомбинации электрона и дырки на исследуемом временном масштабе. Здесь мы рассматриваем всего лишь простой пример и поэтому используем относительно простую модель. Тем не менее эта модель включает основные характерные черты туннелирования экситона, такие как возможность ионизации, барьер, реалистическое по силе и размерам области взаимодействие, и то обстоятельство, что составная частица представляет собой связанное состояние двух частиц. Для стационарного состояния энергия связи равна

$$-E_c = \int \Psi_{\text{int}}^*(r) H_{\text{int}}(r) \Psi_{\text{int}}(r) dr,$$

где $\Psi_{\text{int}}(r)$ – волновая функция относительного движения. Тогда из выражения (40) и условия $\sqrt{A/B} = 3$ имеем $A \approx 18E_c/17$.

Все производные выше второго порядка для квадратичного потенциала

$$V(q) = \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}$$

обращаются в нуль. В таком случае динамические уравнения имеют следующий простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= m\omega_0^2 \nu, \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} &= -\frac{\mu}{m}. \end{aligned} \quad (41)$$

Рис. 1. Распределения плотности вероятности в координатном пространстве для электрона ($\rho_e(x)$) и дырки ($\rho_h(x)$) в моменты времени $t = 0$ и $t = 10$. КТ-моделирование (сплошные линии) в сравнении с точным численным решением (штриховые линии).

Результаты компьютерного моделирования в задаче туннелирования экситона представлены на рис. 1–3. Все параметры фиксированы (см. выше), за исключением высоты барьера C на рис. 3. На рис. 1 и 2 изображена эволюция плотности вероятности для электрона и дырки, высота барьера $C = 1$. Сплошные линии на рис. 1 и 2 и кружки на рис. 3 соответствуют моделированию, основанному на подходе с использованием квантовой томографии (КТ), а штриховые линии и квадратики представляют точные численные расчеты. Совпадение результатов КТ-моделирования и точных вычислений,

изначально очень хорошее, становится хуже с течением времени (см. рис. 1 и 2). Однако КТ-моделирование воспроизводит основные характерные черты туннелирования экситона: расширение волновых пакетов с течением времени, сжатие вблизи барьера, разделение волновых пакетов на две части (отраженную и прошедшую). Заметим, что результаты КТ-моделирования довольно близки к точным даже для больших времен ($t = 30$), несмотря на то что движение неограниченно. Интегральные величины (рис. 3), полученные при использовании КТ-подхода, также согласуются с точными результатами. Большие отклонения соответствуют более высокому барьеру, что связано, вероятно, с большей погрешностью, возникающей в случае более сильного взаимодействия с внешним потенциалом в результате пренебрежения разрывом последнего.

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но в моменты времени $t = 20$ и $t = 30$.

Волновые пакеты системы электрон–дырка начинают свое движение из точки $x = -10$ и, испытав сжатие вблизи барьера, частично отражаются и частично проходят через барьер. Для случая, представленного на рис. 1 и 2, через барьер проходит примерно половина волновых пакетов. Представляет интерес вопрос о вероятности ионизации экситона, обусловленной взаимодействием с барьером. Если электрон и дырка рассеиваются на барьере в разных направлениях, то расстояние между ними может стать достаточно большим, но в принципе существует вероятность того, что экситон не будет ионизирован в результате такого рассеяния, поскольку одна из частиц может быть “втянута” за барьер в направлении другой вследствие электронно-дырочного притяжения. С другой стороны, электронно-дырочное взаимодействие в нашей модели обрывается на

Рис. 3. Вероятность ионизации экситона P_{ion} вследствие рассеяния электрона и дырки на барьере в противоположных направлениях в зависимости от высоты барьера C . Кружки и квадратики представляют КТ-моделирование и точное решение, соответственно. Рассматривается барьер ширины 0.5. Единицы измерения те же, что и на рис. 1.

расстоянии $\sqrt{A/B}$. После взаимодействия с барьером волновой пакет делится на отраженную и прошедшую части, движущиеся в противоположных направлениях. На достаточно больших временах эти две части хорошо разделены, расстояние между ними растет, и просачивание через барьер в обоих направлениях пренебрежимо мало. Обозначим вероятность ионизации вследствие рассеяния электрона и дырки в противоположных направлениях через P_{ion} . Тогда вероятность обнаружить электрон и дырку по разные стороны барьера с расстоянием между ними, превышающим $\sqrt{A/B}$, стремится к P_{ion} в пределе $t \rightarrow \infty$.

Вероятность ионизации P_{ion} вследствие рассеяния электрона и дырки на барьере в различных направлениях в зависимости от высоты барьера C представлена на рис. 3. Для очень большой и очень маленькой высоты барьера вероятность P_{ion} должна быть почти равна нулю, поскольку в первом случае обе частицы отражаются, а во втором обе проходят через барьер. Такая тенденция наблюдается на рис. 3, максимальное значение P_{ion} в зависимости от C наблюдается при $C \approx 1$ (остальные параметры фиксированы, см. выше). Отметим, что эти свойства очевидны как для кривой, отвечающей КТ-моделированию (кружки), так и для кривой, представляющей точное вычисление (квадратики), и в целом две кривые достаточно близки друг к другу.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы подробно изучили вариант томографического отображения матрицы плотности и функции Вигнера, для которого квантовое состояние многомодовой системы ассоциируется с правильной функцией распределения вероятностей. Эта функция зависит от одной случайной переменной X и $2Nd$ вещественных параметров (вещественные Nd -векторы $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$) и полностью определяет квантовое состояние. Случайная переменная X может интерпретироваться как координата центра масс системы относительно специальным образом повернутой и масштабированной системы отсчета в полном фазовом пространстве системы. Мы построили квантовые эволюционные уравнения и уравнения энергетических уровней для введенной томограммы центра масс и подробно исследовали ее свойства.

Мы продемонстрировали основанный на томографическом представлении метод численного моделирования нестационарных квантовых процессов. В некотором смысле квантовая томограмма используется как функция распределения для ансамбля траекторий в пространстве X , $\vec{\mu}$, $\vec{\nu}$. Поведение траекторий подчиняется уравнениям, аналогичным уравнениям движения Гамильтона, поэтому можно использовать некоторую аналогию с молекулярной динамикой.

Метод был применен к задаче прохождения (туннелирования) экситонного волнового пакета через потенциальный барьер и дал результаты, которые согласуются с результатами, полученными с помощью точных квантовых вычислений.

Благодарности. Авторы благодарны INTAS, RFBR и Министерству науки за финансовую поддержку. А. С. Архипов также благодарит за финансовое содействие Dynasty Foundation и ICFPM.

Список литературы

- [1] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Phys. Lett. A. 1996. V. 213. P. 1; Found. Phys. 1997. V. 27. P. 801.
- [2] *J. Bertrand, P. Bertrand.* Found. Phys. 1987. V. 17. P. 397; *K. Vogel, H. Risken.* Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 2847.
- [3] *K. Husimi.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1940. V. 22. P. 264; *E. C. G. Sudarshan.* Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 277; *R. J. Glauber.* Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 84.
- [4] *V. V. Dodonov, V. I. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1997. V. 229. P. 335; *S. Weigert.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 802.
- [5] *В. И. Манько, О. В. Манько.* ЖЭТФ. 1997. Т. 112. С. 796.
- [6] *O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, G. Marmo.* Physica Scripta. 2000. V. 62. P. 446; *U. Leonhardt.* Phys. Rev. A. 1996. V. 53. P. 2998; *A. B. Klimov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 6101; *O. Castaños, R. López-Peña, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko.* J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 4677; *J. Opt. B.* 2003. V. 5. P. 227.
- [7] *D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1244; *G. M. D'Ariano, L. Maccone, M. Painsi.* J. Opt. B. 2003. V. 5. P. 77; *S. Schiller, G. Breitenbach, S. F. Pereira, T. Muller, J. Mlynek.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 2933; *D. G. Welsch, W. Vogel, T. Opatrny.* Homodyne detection and quantum state reconstruction.

- In: Progress in Optics. V. 39. Ed. E. Wolf. Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 63; *M. Beck, D. T. Smithey, M. G. Raymer, A. Faridani*. Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1244.
- [8] *M. G. Raymer, M. Beck, D. F. McAlister*. Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 1137.
- [9] *M. G. Raymer, D. F. McAlister, U. Leonhardt*. Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 2397; *M. G. Raymer, A. C. Funk*. Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 015801; *J. Ashburn, R. Cline, P. van der Burgt, W. Westerveld, J. Risley*. Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 2407; *O. Carnal, J. Mlynek*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2689; *D. W. Keith, C. R. Ekstrom, Q. A. Turchette, D. E. Pritchard*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2693; *T. J. Dunn, I. A. Walmsley, S. Mukamel*. Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 884.
- [10] *Yu. E. Lozovik, V. A. Sharapov, A. S. Arkhipov*. Phys. Rev. A. 2004. V. 69. P. 022116.
- [11] *V. A. Andreev, V. I. Man'ko*. J. Opt. B. 2000. V. 2. P. 122.
- [12] *A. S. Arkhipov, Yu. E. Lozovik, V. I. Man'ko*. J. Russ. Laser Res. 2003. V. 24. P. 237; Phys. Lett. A. 2004. V. 328. P. 419; quant-ph/0310028.
- [13] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi*. Quantum Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 615; *G. M. D'Ariano, S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi*. J. Opt. B. 1996. V. 8. P. 1017.
- [14] *O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, G. Marmo*. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 699.
- [15] *E. Wigner*. Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
- [16] *H. W. Lee*. Phys. Rep. 1995. V. 259. P. 147.
- [17] *A. Donoso, C. C. Martens*. Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 223202.
- [18] *Ю. Е. Лозовик, А. В. Филуппов*. ЖЭТФ. 1999. Т. 115. № 5. С. 1872.
- [19] *Yu. E. Lozovik, A. V. Filinov, A. S. Arkhipov*. Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 026707.
- [20] *V. I. Man'ko, L. Rosa, P. Vitale*. Phys. Lett. B. 1998. V. 439. P. 328.
- [21] *V. I. Man'ko, R. V. Mendes*. Phys. Lett. A. 1999. V. 263. P. 53.
- [22] *J. E. Moyal*. Proc. Camb. Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 99.
- [23] *V. I. Man'ko*. Conventional quantum mechanics without wave function and density matrix. In: Proc. XXXI Latin American School of Physics, July–August 1998, Mexico. AIP Conf. Proc. V. 464. Eds. S. Hacyan, R. Jauregui, R. Lopez-Pena. New York: AIP, 1999. P. 191; quant-ph/9902079.
- [24] *Г. Вейль*. Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
- [25] *В. И. Татарский*. УФН. 1983. Т. 139. С. 587.
- [26] *O. Man'ko, V. I. Man'ko*. J. Russ. Laser Res. 1997. V. 18. P. 407.
- [27] *Yu. E. Lozovik, M. Willander*. Appl. Phys. A. 2000. V. 71. P. 379.