Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова, Представление Йоста–Лемана–Дайсона, аналитичность по угловой переменной и ограничения сверху в некоммутативной квантовой теории поля, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 2, 388–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1790>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:51:21

© 2005 г. Ю. С. Вернов*, М. Н. Мнацаканова†

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЙОСТА–ЛЕМАНА–ДАЙСОНА, АНАЛИТИЧНОСТЬ ПО УГЛОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ОГРАНИЧЕНИЯ СВЕРХУ В НЕКОММУТАТИВНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Доказано существование аналога представления Йоста–Лемана–Дайсона в некоммутативной квантовой теории поля в случае, когда некоммутативность затрагивает только пространственные переменные. С помощью этого представления показано, что существует некоторый класс амплитуд упругого рассеяния, которые имеют аналитическое продолжение в комплексную $\cos \vartheta$ -плоскость, причем соответствующая область аналитичности является эллипсом Мартена. На основе аналитичности по угловой переменной и унитарности получен аналог ограничения Фруассара–Мартена на полное сечение в некоммутативном случае.

Ключевые слова: некоммутативность, квантовая теория поля, локальная коммутативность, аналитичность, унитарность, представление Йоста–Лемана–Дайсона, эллипс Лемана, эллипс Мартена, ограничение Фруассара–Мартена.

1. ВВЕДЕНИЕ

Доказательство аналитических свойств амплитуд упругого рассеяния по угловой переменной $\cos \vartheta$ — одно из наиболее важных достижений квантовой теории поля (КТП). Первый шаг в этом направлении был сделан Леманом [1], который доказал, что амплитуда упругого $(\pi-N)$ -рассеяния — аналитическая функция $\cos \vartheta$ в некотором эллипсе (эллипс Лемана). Мартен [2] получил, что, используя аналитичность по энергии, можно доказать аналитичность по $\cos \vartheta$ в более широкой области, чем эллипс Лемана. Точный размер этой области, названной эллипсом Мартена, был установлен в работах [3], [4]. Аналитичность в $\cos \vartheta$ -плоскости вместе с унитарностью ведет к очень важным ограничениям на высокоэнергетическое поведение амплитуды рассеяния. Первое строгое ограничение, которое следует из аналитичности в эллипсе Лемана, было получено

* Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: vernov@ms2.inr.ac.ru

† Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: mnatsak@theory.sinp.msu.ru

в работе Гринберга и Лоу [5]. В соответствии с этим ограничением при $s \rightarrow \infty$

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq C s \ln^2 \frac{s}{s_0}, \quad (1)$$

где $\sigma_{\text{tot}}(s)$ – полное сечение, C и s_0 – некоторые константы, s – обычная переменная; в этой статье мы используем только систему центра масс.

Фруассар [6] показал, что из двойных дисперсионных соотношений следует значительно более сильное ограничение, чем (1), а именно

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq C \ln^2 \frac{s}{s_0}. \quad (2)$$

Мартен [7] сначала продемонстрировал, что это ограничение выполнено при намного более слабом условии на область аналитичности в $\cos \vartheta$ -плоскости, и затем доказал, что необходимая область аналитичности действительно существует в рамках аксиоматической КТП [2]. Ограничение (2) названо ограничением Фруассара–Мартена. Заключительный шаг в выводе наиболее сильного строгого ограничения сверху на полное сечение был сделан в работе [8], где было доказано, что

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \ln^2 \frac{s}{s_0}, \quad (3)$$

m_π – масса π -мезона. Точнее, может быть получено несколько более сильное ограничение. А именно, при $s \rightarrow \infty$ (см., например, обзоры [9] и [10])

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \ln^2 \frac{s}{(\ln s)^{3/2}}. \quad (4)$$

Были также найдены строгие верхние границы для дифференциального сечения вперед. Лучшее ограничение такого вида получено Сингхом и Роем [11]:

$$|F(s)| \leq \frac{s}{8m_\pi \sqrt{\pi}} \sqrt{\sigma_{\text{tot}}(s)} \ln \frac{s}{\sigma_{\text{tot}}(s)}. \quad (5)$$

В настоящее время основанная на некоммутативной геометрии [12] некоммутативная квантовая теория поля (НК КТП) рассматривается как одна из наиболее привлекательных возможностей для изучения взаимодействия на очень малых расстояниях и, следовательно, при очень высоких энергиях. Отметим, что первые попытки построения таких теорий делались уже давно [13]. Убедительные новые аргументы в пользу изучения НК КТП были предложены в работах [14], [15] (см. также обзор [16]). Изучение этих теорий приобрело дополнительный интерес после того, как было показано, что они появляются естественно как низкоэнергетические пределы в некоторых вариатах теории струн [15]. Таким образом, очень важно исследовать аналитические свойства амплитуд рассеяния в НК КТП.

В НК КТП операторы координаты удовлетворяют коммутативным соотношениям

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad (6)$$

где $\theta_{\mu\nu}$ – постоянная кососимметрическая матрица.

Мы рассмотрим в этой статье только тот случай, когда время коммутирует с пространственными переменными, т.е. $\theta_{0i} = 0$. Отметим, что теории, в которых время не коммутирует с пространственными переменными, лишь в особых случаях могут быть получены как низкоэнергетические пределы теории струн. Кроме того, в таких теориях есть проблемы с унитарностью [17] и причинностью [18], [19].

В наших статьях [20], [21] показано, что в таких некоммутативных теориях поля амплитуда упругого рассеяния вперед имеет те же самые аналитические свойства, что и в коммутативной. Впервые подобные вопросы рассматривались в работе [22]. Аналитичность по углу рассеяния и связанные с ней вопросы рассматривались также в работе [23]. Отличие наших выводов от результатов этой статьи связано прежде всего с тем, что мы рассматриваем определенный класс упругих амплитуд.

В коммутативной КТП доказательство аналитических свойств амплитуд упругого рассеяния основано на условии локальной коммутативности (микропричинности), т.е.

$$[j_1(x), j_2(y)] = 0, \quad (7)$$

если $(x - y)^2 < 0$. Здесь $j_i(x)$, $i = 1, 2$, – ток взаимодействующего поля (см., например, [24]). Ниже под $j_1(x)$ мы будем подразумевать нуклонный ток и под $j_2(x)$ – π -мезонный.

В том варианте НК КТП, в котором $\theta_{0i} = 0$, мы можем, не теряя общности, рассмотреть случай, когда только $\theta_{12} = -\theta_{21} \neq 0$ [25], другими словами, когда x_0 и x_3 – коммутативные переменные, и можем предположить [25], что условие (7) имеет некоммутативный аналог:

$$[j_1(\hat{x}), j_2(\hat{y})] = 0, \quad (8)$$

если $(x_0 - y_0)^2 - (x_3 - y_3)^2 < 0$.

В работах [20], [21] было доказано, что выполнения условия (8) достаточно для получения обычных дисперсионных соотношений вперед. Этот факт играет принципиальную роль в расширении области аналитичности в плоскости $\cos \vartheta$ в некоммутативном случае. Мы покажем, что эта область совпадает с максимальной строго доказанной областью аналитичности в коммутативном случае – эллипсом Мартена. Этот факт дает нам возможность доказать ограничение Фруассара–Мартена в рассматриваемом нами случае НК КТП. Поскольку исследуется только этот вариант некоммутативной теории, мы не будем упоминать об этом ниже.

Мы рассматриваем амплитуду упругого рассеяния двух бесспиновых частиц с массами m (мезон) и M (нуклон). Естественно ожидать, что, как и в коммутативном случае, полученные результаты совпадут с результатами для $(\pi-N)$ -рассеяния после усреднения по спину. Наши результаты могут быть также распространены на другие процессы.

Статья построена следующим образом. Сначала мы получаем аналог представления Йоста–Лемана–Дайсона. Используя это представление, получим аналитичность рассматриваемых амплитуд в эллипсе Лемана. Следуя по пути, предложенному в работах [2]–[4], можно расширить эллипс Лемана до эллипса Мартена. В этом расширении так

же, как в коммутативном случае, существование дисперсионных соотношений играет принципиальную роль.

В приложении для удобства читателя приводится вывод ограничения Фруассара–Мартена в его самой сильной форме при самых слабых предположениях.

Отметим, что в некоммутативном случае ограничение Фруассара–Мартена может быть более сильным, чем в обычном случае (см. (4)). Дело в том, что в действительности ограничение Фруассара–Мартена содержит множитель $\sigma_{\text{el}}(s)/\sigma_{\text{tot}}(s)$, где $\sigma_{\text{el}}(s)$ – сечение упругого рассеяния. В некоммутативном случае в это ограничение входит аналогичный множитель, соответствующий рассматриваемому классу упругих амплитуд.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЙОСТА–ЛЕМАНА–ДАЙСОНА

Рассмотрим матричный элемент

$$f(x) = \langle p' | \left[j_1 \left(\frac{x}{2} \right), j_2 \left(-\frac{x}{2} \right) \right] | p \rangle, \quad (9)$$

где $|p\rangle$ и $|p'\rangle$ – произвольные состояния с импульсами p и p' , соответственно. Чтобы упростить обозначения, мы опускаем знак “^” над x . Вследствие условия (8)

$$f(x) = 0, \quad (10)$$

если $x_0^2 - x_3^2 < 0$. Рассмотрим преобразование Фурье этого матричного элемента:

$$f(q) = \int e^{iqx} f(x) dx. \quad (11)$$

Несущественный числовой фактор мы опустили. Проинтегрировав это выражение по некоммутирующим переменным x_1 и x_2 , получим

$$\begin{aligned} f(q) &\equiv f(q_0, q_3) = \int e^{i(q_0 x_0 - q_3 x_3)} f(x_0, x_3) dx_0 dx_3, \\ f(x_0, x_3) &\equiv \int f(x) e^{-i(q_1 x_1 - q_2 x_2)} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Мы не выписываем зависимость $f(x_0, x_3)$ от q_1 и q_2 , поскольку ниже рассматривается только случай $q_1 = q_2 = 0$. Здесь и в дальнейшем (если не оговорено противное) q является двумерным вектором $q = (q_0, q_3)$, $q^2 = q_0^2 - q_3^2$. Соответственно преобразование (11) примет вид

$$f(q) \equiv \int e^{iqx} f(x) dx_0 dx_3, \quad f(x) \equiv f(x_0, x_3). \quad (13)$$

Для того чтобы, как и в коммутативном случае, эффективно использовать условие (10), поставим в соответствие функции $f(x)$ функцию $F(X)$ в четырехмерном пространстве:

$$\begin{aligned} F(X) &= 4\pi f(x) \delta(X^2), \\ X_0 &= x_0, \quad X_1 = x_3, \quad X_2 = y_1, \quad X_3 = y_2, \\ X^2 &= x_0^2 - x_3^2 - y_1^2 - y_2^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно условию (10)

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int F(X) d^2y. \quad (15)$$

Действительно, по определению (14)

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int F(X) dy^2 = \begin{cases} f(x) & \text{при } x^2 \geq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Так как в нашем случае $f(x) = 0$, если $x^2 < 0$, мы проверили равенство (15). Рассмотрим четырехмерное импульсное пространство Q_i : $Q_0 = q_0$, $Q_1 = q_3$, $Q_2 = \lambda_1$, $Q_3 = \lambda_2$; $Q^2 = q_0^2 - q_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2$. Легко видеть, что

$$\square_4 F(Q) = 0, \quad \square_4 \equiv \frac{\partial^2}{\partial q_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2^2}, \quad (17)$$

где

$$F(Q) = \int e^{iQX} F(X) d^4X.$$

Легко получить соответствие между $f(q)$ и $F(Q)$, а именно

$$f(q) = F(\tilde{q}),$$

где $\tilde{q} = (q_0, q_3, 0, 0)$.

Последующее рассмотрение подобно проводимому в обычном (коммутативном) случае с единственным различием – теперь мы имеем четырехмерное пространство вместо шестимерного. Общее исследование в пространстве произвольной размерности было сделано в монографии Владимирова [26], рассмотрение в четырехмерном случае можно найти в книгах [27], [28].

В соответствии с формулой (17) мы можем представить $F(Q)$ в виде

$$F(Q) = \int_{\Sigma} d\Sigma' \left[D(Q - Q') \frac{\partial F(Q')}{\partial \Gamma'} + F(Q') \frac{\partial D(Q - Q')}{\partial \Gamma'} \right], \quad (18)$$

где Σ – некоторая трехмерная гиперповерхность, $\partial/\partial \Gamma'$ – кономальная производная на ней и функция $D(Q)$ удовлетворяет условию (17), а также следующим условиям:

- 1) $D(Q) \rightarrow 0$, если $Q_0 \rightarrow 0$;
- 2) $\partial D(Q)/\partial Q_0 \rightarrow \delta(\vec{Q})$, если $Q_0 \rightarrow 0$; $\delta(\vec{Q}) = \delta(Q_1)\delta(Q_2)\delta(Q_3)$;
- 3) $\partial^2 D(Q)/\partial Q_0^2 \rightarrow 0$, если $Q_0 \rightarrow 0$.

Необходимой функцией будет

$$D(Q) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \epsilon(x_0) e^{iQX} \delta(X^2) d^4X. \quad (19)$$

Доказательство можно найти в монографии [26].

Мы можем так же, как в коммутативном случае (см. [27]), упростить соотношение (18), проинтегрировав второй член по частям. Тогда выражение (18) можно переписать следующим образом:

$$F(Q) = \int d^4 Q' D(Q - Q') \psi(Q'). \quad (20)$$

Удобно рассмотреть интеграл в (19) формально как интеграл по всему пространству (в действительности $\psi(Q')$ содержит член $\delta(\Sigma)$). Ниже мы увидим, что пределы интегрирования определяются свойствами $f(q)$, которые следуют из трансляционной инвариантности и спектрального условия. Используя явное выражение для $D(Q)$ (см. [26])

$$D(Q) = \frac{1}{2\pi} \epsilon(Q_0) \delta(Q^2), \quad (21)$$

получим окончательно

$$F(Q) = \int d^4 Q' \epsilon(Q_0 - Q'_0) \delta(Q - Q')^2 \psi(Q'). \quad (22)$$

Из выражения (22) непосредственно следует, что $f(q) = F(\tilde{q})$ удовлетворяет представлению

$$f(q) = \int d^4 u' \epsilon(q_0 - u'_0) \delta(q - u')^2 \varphi(u') \quad (23)$$

(здесь мы изменили обозначения: $Q' = u'$, $\psi(Q') = \varphi(u')$).

Получим подобное выражение для

$$f^r(q) = \int dq_0 dq_3 \tau(x_0) e^{i(q_0 x_0 - q_3 x_3)} f(x), \quad (24)$$

где

$$\tau(x_0) = 1, \quad x_0 \geq 0; \quad \tau(x_0) = 0, \quad x_0 < 0.$$

Легко показать, что

$$f^r(q) = \frac{i}{2\pi} \int dq'_0 \frac{f(q'_0, \vec{q})}{q'_0 - q_0}, \quad \text{Im } q_0 > 0. \quad (25)$$

Используя выражения (23) и (25), можно легко провести необходимое интегрирование в (24) и окончательно получить

$$f^r(q) = \frac{i}{2\pi} \int d^4 u' \frac{\varphi(u')}{(q - u')^2}, \quad \text{Im } q_0 > 0. \quad (26)$$

Представим пространственный вектор $\vec{u}'$ в виде линейной комбинации двух ортогональных векторов: $\vec{u}'$, принадлежащего плоскости, проходящей через ось λ_1 и $\vec{q}$, и $\lambda_2 \vec{e}$, где $\vec{e}$ — единичный вектор, направленный по оси λ_2 , $u'_0 \equiv u_0$. Формулу (26) можно переписать в виде

$$f^r(q) = \frac{i}{2\pi} \int d^3 u \int d\lambda_2^2 \frac{\varphi(u, \lambda_2^2)}{(q - u)^2 - \lambda_2^2}, \quad \text{Im } q_0 > 0. \quad (27)$$

Найдем теперь ограничения на область интегрирования в формулах (23) и (26). Для этого используем спектральные свойства $f(q)$. Представим сначала $f(q)$ в преобразовании (11) как $f(q) = f_1(q) - f_2(q)$, где

$$f_1(q) = \int e^{iqx} \left\langle p' \left| j_1 \left(\frac{x}{2} \right) j_2 \left(-\frac{x}{2} \right) \right| p \right\rangle dx, \quad (28)$$

$$f_2(q) = \int e^{iqx} \left\langle p' \left| j_2 \left(-\frac{x}{2} \right) j_1 \left(\frac{x}{2} \right) \right| p \right\rangle dx. \quad (29)$$

Здесь, конечно, q – четырехмерный вектор.

Принимая во внимание, что трансляционная инвариантность выживает в НК КТП, и используя ее так же, как и полноту базисных векторов $|P_n\rangle$ (P_n – импульс n -состояния), получаем в системе Брейта (т.е. в системе, где $\vec{p} + \vec{p}' = 0$)

$$f_1(q) = \sum_n \langle p' | j_1(0) | P_n \rangle \langle P_n | j_2(0) | p \rangle \delta(q_0 + a - \sqrt{M_n^2 + \vec{q}^2}), \quad (30)$$

$$f_2(q) = \sum_n \langle p' | j_2(0) | P_n \rangle \langle P_n | j_1(0) | p \rangle \delta(-q_0 + a - \sqrt{M_n^2 + \vec{q}^2}), \quad (31)$$

где $a = (p_0 + p_0')/2$, M_n – массы промежуточных состояний.

Таким образом, $f(q) = 0$, если удовлетворяется следующее двойное неравенство:

$$a - \sqrt{\vec{q}^2 + m_2^2} < q_0 < \sqrt{\vec{q}^2 + m_1^2} - a, \quad (32)$$

где m_1 и m_2 – минимальные массы промежуточных состояний $|P_n\rangle$. Точно такие же условия справедливы и в коммутативном случае [27].

Мы рассматриваем случай, когда $q_1 = q_2 = 0$, поэтому можно использовать одно и то же обозначение как для четырехмерного вектора $(q_0, q_3, 0, 0)$, так и для двумерного (q_0, q_3) .

Условие (32) может быть записано в виде

$$S_-(\vec{q}) < q_0 < S_+(\vec{q}), \quad \vec{q} = q_3. \quad (33)$$

Это условие определяет две поверхности $S_{\pm}$, $q_0 = S_{\pm}(\vec{q})$.

Для того чтобы условие (33) удовлетворялось автоматически, мы выбираем, как обычно, область интегрирования в (23) так, чтобы δ -функция в (23) была равна нулю, когда q_0 удовлетворяет двойному неравенству (33) [27], [28].

Как следует из представления (23), $f(q) \neq 0$ только при

$$(q - u)^2 = \lambda_2^2. \quad (34)$$

Равенство (34) определяет двухполостный гиперboloид. Следуя Дайсону, назовем этот гиперboloид допустимым, если его верхняя полость не имеет точек ниже S_+ и его нижняя полость не имеет точек выше S_- , т.е.

$$u_0 + \sqrt{(\vec{q} - \vec{u})^2 + \lambda_2^2} \geq S_+(\vec{q}), \quad u_0 - \sqrt{(\vec{q} - \vec{u})^2 + \lambda_2^2} \leq S_-(\vec{q}).$$

Эти условия будут удовлетворены при любом $\vec{q}$, если

$$u_0 \geq \max_q \left(S_+(\vec{q}) - \sqrt{(\vec{q} - \vec{u})^2 + \lambda_2^2} \right), \quad u_0 \leq \min_q \left(S_-(\vec{q}) + \sqrt{(\vec{q} - \vec{u})^2 + \lambda_2^2} \right).$$

Необходимые вычисления подобны приведенным в книгах [27], [28]. В результате получаем

$$|u_0| + |\vec{u}| \leq a, \quad (35)$$

$$\lambda_2^2 \geq \max \left\{ \left(m_2 - \sqrt{(a - u_0)^2 - \vec{u}^2} \right)^2, \left(m_1 - \sqrt{(a + u_0)^2 - \vec{u}^2} \right)^2 \right\}. \quad (36)$$

3. АМПЛИТУДА УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ И АНАЛИТИЧНОСТЬ В ЭЛЛИПСЕ ЛЕМАНА

Рассмотрим амплитуду упругого (π - N)-рассеяния, в котором π -мезон с массой m имеет начальный импульс k и конечный k' , а нуклон с массой M имеет начальный импульс p и конечный p' . Как было показано в работе [20], обычные формулы Лемана–Симанзика–Циммермана имеют силу в рассматриваемом нами варианте некоммутативной теории поля, если в нем взаимодействующие поля имеют своими пределами in- и out-поля. Таким образом, с точностью до числовых множителей и полинома по энергии имеем

$$F(p', k', p, k) = \int e^{i(p-k)x/2} f^r x dx, \quad (37)$$

где

$$f^r x = \tau(x_0) \left\langle p', k' \left| \left[j_1 \left(\frac{x}{2} \right), j_2 \left(-\frac{x}{2} \right) \right] \right| 0 \right\rangle.$$

Напомним, что $j_1(x)$ – нуклонный ток, $j_2(x)$ – π -мезонный ток.

Рассмотрим амплитуду рассеяния в системе центра масс. Чтобы использовать представление Йоста–Лемана–Дайсона, запишем амплитуду рассеяния в форме

$$F(p', k', p, k) = \int e^{i((p_0-k_0)x_0/2 - p_3 x_3)} f^r(x_0, x_3) dx_0 dx_3, \quad (38)$$

где

$$f^r(x_0, x_3) = \int e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} f^r x dx_1 dx_2.$$

Мы опускаем зависимость от p_1 и p_2 в $f^r(x_0, x_3)$, поскольку рассматривается случай $p_1 = p_2 = 0$.

Для вывода аналитичности в эллипсе Лемана используем представление (27) для амплитуды упругого рассеяния:

$$F(p', k', p, k) = \frac{i}{2\pi} \int d^3 u \int_{\min \lambda_2^2}^{\infty} d\lambda_2^2 \frac{\varphi(u, \lambda_2^2, p', k', \theta_{\mu\nu})}{(u_0 - (p_0 - k_0)/2)^2 - (\vec{u} - \vec{p})^2 - \lambda_2^2}. \quad (39)$$

Всегда можно выбрать ось λ_1 так, чтобы $\vec{p}'$ находился в плоскости, образованной этой осью и $\vec{p}$. Обозначив угол между $\vec{u}$ и $\vec{p}'$ через α , получим, что $\vec{u}\vec{p}' = |\vec{u}| |\vec{p}'| \cos(\alpha - \vartheta)$,

где ϑ — угол между $\vec{p}$ и $\vec{p}'$. Формула (39) аналогична соответствующему выражению в коммутативном случае [29]. Подчеркнем, что в некоммутативном случае числитель имеет дополнительную зависимость от $\theta_{\mu\nu}$, но, подобно обычному случаю, вся зависимость от $\cos \vartheta$ содержится в знаменателе.

Теперь рассмотрим знаменатель в подынтегральном выражении в формуле (39). Прямое вычисление дает

$$-2|\vec{u}||\vec{p}|\left[y - \cos(\vartheta - \alpha)\right],$$

где

$$-y = \frac{(u_0 - (p_0 - k_0)/2)^2 - \vec{u}^2 - \vec{p}^2 - \lambda_2^2}{2|\vec{u}||\vec{p}|}.$$

Напомним, что $\vec{p} = p_3$. Другими словами, мы рассматриваем процесс упругого рассеяния, в котором $\vec{p}$ ортогонален некоммутативной плоскости. Так как амплитуда рассеяния вперед — функция только s , она не зависит от этого дополнительного условия.

Теперь наша цель состоит в вычислении минимального значения $y \equiv y_0(s)$. Замечательно, что для рассматриваемых амплитуд вычисления в некоммутативном случае сводятся к подобным в коммутативном.

Для того чтобы получить необходимое ограничение, мы, как и выше, используем трансляционную инвариантность и спектральное условие. Повторяя шаги, которые были сделаны при выводе двойного неравенства (32), получим аналогичное неравенство, только теперь $a = (p'_0 + k'_0)/2$. Очевидно, что ограничения (35) и (36) выполнены. Они аналогичны существующим в коммутативном случае с единственным отличием: $\vec{u}$ находится в плоскости, содержащей векторы $\vec{p}$ и $\vec{p}'$. Дополнительное условие может только увеличить рассматриваемый минимум. При нахождении этого минимума также используются массы наинизших промежуточных состояний, которые, очевидно, являются теми же самыми, что и в коммутативном случае. Поскольку этот минимум больше единицы, правая часть равенства (39) хорошо определена также для нефизических $\cos \vartheta$, что приводит к аналитичности рассматриваемой амплитуды по $\cos \vartheta$ в области, являющейся эллипсом Лемана. Напомним, что эллипс Лемана — эллипс с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $y_0(s)$. Точное значение $y_0(s)$ можно найти в работе [29], здесь мы только отметим, что при $s \rightarrow \infty$

$$y_0(s) \cong 1 + \frac{c(m, M)}{s^2},$$

т. е. $t_0(s) \cong 2c(m, M)/s$.

Напомним, что при высоких энергиях переданный импульс выражается через угол рассеяния следующим образом: $\cos \vartheta \cong 1 + 2t/s$.

Используя унитарность и спектральные свойства амплитуды рассеяния, легко показать, что, как и в коммутативном случае, мнимая часть амплитуды упругого рассеяния $A(s, \cos \vartheta)$ является аналитической функцией в области большей, чем аналогичная область для самой амплитуды $F(s, \cos \vartheta)$, — в большом эллипсе Лемана [1], [29].

4. УНИТАРНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРЦИАЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ

Амплитуда упругого рассеяния в случае $p_1 = p_2 = 0$ является функцией s и $\cos \vartheta$ (зависимость ее от $\theta_{\mu\nu}$ не изменяет результатов, полученных ниже). Таким образом,

$$F(p', k', p, k) = F(s, \cos \vartheta, \theta_{\mu\nu}) \equiv F(s, \cos \vartheta).$$

Мы можем разложить $F(s, \cos \vartheta)$ по полиномам Лежандра:

$$F(s, \cos \vartheta) = 2 \sum_0^{\infty} (2l+1) \tilde{f}_l(s) P_l(\cos \vartheta), \quad (40)$$

так как $F(s, \cos \vartheta)$ – аналитическая функция в эллипсе Лемана [30].

Поскольку далее мы имеем дело с $F(s, \cos \vartheta)$ при $s \rightarrow \infty$, множитель перед суммой можно заменить его асимптотическим значением.

Безусловно, $\tilde{f}_l(s)$ зависит от $\theta_{\mu\nu}$, но эта зависимость не меняет ограничений, которые мы получим ниже. Используем обозначение $\tilde{f}_l(s)$ вместо обычного $f_l(s)$ для того, чтобы подчеркнуть: мы рассматриваем только определенный класс амплитуд упругого рассеяния. Вследствие ортогональности полиномов Лежандра

$$\tilde{f}_l(s) = \int_{-1}^1 F(s, \cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta) d\vartheta. \quad (41)$$

Подчеркнем, что для рассеяния вперед разложение (40) справедливо в общем случае, так как $F(s, 1)$ не зависит от направления $\vec{q}$. Рассмотрим теперь дифференциальное сечение и, следовательно, упругое рассеяние $\tilde{\sigma}_{\text{el}}(s)$, соответствующее выбранному классу амплитуд:

$$s\tilde{\sigma}_{\text{el}}(s) = \int_{-1}^1 F(s, \cos \vartheta) F^*(s, \cos \vartheta) d\cos \vartheta. \quad (42)$$

Используя формулу (40), получаем

$$s\tilde{\sigma}_{\text{el}}(s) = \sum_0^{\infty} (2l+1) |\tilde{f}_l(s)|^2. \quad (43)$$

В соответствии с оптической теоремой, которая следует только из унитарности и, таким образом, также должна иметь место в некоммутативном случае, получим

$$s\sigma_{\text{tot}}(s) = \sum_0^{\infty} (2l+1) \tilde{a}_l(s), \quad \tilde{a}_l(s) \equiv \text{Im } \tilde{f}_l(s); \quad (44)$$

здесь мы использовали удобную нормировку для $\sigma_{\text{tot}}(s)$ и $\tilde{\sigma}_{\text{el}}(s)$.

Так как

$$\tilde{\sigma}_{\text{el}}(s) < \sigma_{\text{tot}}(s),$$

получаем неравенство

$$\tilde{a}_l(s) \geq |\tilde{f}_l(s)|^2, \quad (45)$$

которое является обычным унитарным ограничением на парциальные амплитуды. Таким образом, нет никаких проблем с выводом ограничения Фруассара–Мартена.

5. ЭЛЛИПС МАРТЕНА И ОГРАНИЧЕНИЕ ФРУАССАРА–МАРТЕНА В НК КТП

Возможность расширить эллипс Лемана до эллипса Мартена обусловлена, с одной стороны, унитарным ограничением на парциальные амплитуды, а с другой стороны, — дисперсионными соотношениями (ДС). Напомним, что эллипс Мартена имеет фокусы в тех же самых точках, что и эллипс Лемана, а его крайне правая точка $t_0(s) = 4m_\pi^2$.

Строго говоря, необходима справедливость ДС не только для рассеяния вперед, но также и для произвольно малого отрицательного t , которое является обычной переменной. В некоммутативном случае ДС были доказаны только для амплитуды рассеяния вперед [20], [21]. Но в соответствии с доказанной аналитичностью $F(s, \cos \vartheta)$ в эллипсе Лемана ДС справедливы также в некоторой области отрицательных t .

Необходимые унитарные ограничения на парциальные амплитуды были получены в предыдущем разделе. Из неравенства (45) непосредственно следует, что

$$0 \leq \tilde{a}_l(s) \leq 1. \quad (46)$$

В соответствии с формулой (40) имеем

$$A(s, \cos \vartheta) = 2 \sum_0^\infty (2l+1) \tilde{a}_l(s) P_l(\cos \vartheta). \quad (47)$$

Из условия (46) и свойств полиномов Лежандра непосредственно следует, что

$$\left. \frac{d^n A(s, \cos \vartheta)}{(d \cos \vartheta)^n} \right|_{\cos \vartheta=1} > 0. \quad (48)$$

Последнее условие играет принципиальную роль в методе, предложенном Мартеном для расширения эллипса Лемана.

Необходимо отметить, что при расширении эллипса Лемана Мартен использовал результаты Броза, Эпштейна и Глазера [31]. Напомним, что в этой статье аналитичность по $\cos \vartheta$ была доказана для нефизических s . Здесь мы получили аналитичность только для физических значений s . Однако, следуя Зоммеру [3], Бессису и Глазеру [4], мы можем использовать для нашей цели аналитичность только в эллипсах Лемана. Таким образом, у нас не будет трудностей с доказательством аналитичности $F(s, \cos \vartheta)$ в эллипсе Мартена и, следовательно, ограничение Фруассара–Мартена справедливо в рассматриваемом нами варианте НК КТП.

Как было впервые показано Мартеном [32], ограничение сверху (2) фактически содержит дополнительный фактор $\sigma_{\text{el}}(s)/\sigma_{\text{tot}}(s)$. Самое сильное ограничение такого рода было получено в работе [11], а именно

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \frac{\sigma_{\text{el}}(s)}{\sigma_{\text{tot}}(s)} \ln^2 \frac{s}{(\ln s)^{3/2}}. \quad (49)$$

В некоммутативном случае мы также имеем дополнительный фактор, но теперь

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \frac{\tilde{\sigma}_{\text{el}}(s)}{\sigma_{\text{tot}}(s)} \ln^2 \frac{s}{(\ln s)^{3/2}}. \quad (50)$$

В заключение подчеркнем, что неравенство (5) может быть также доказано стандартным образом. Ограничения при $t < 0$ могут быть получены непосредственно только для рассматриваемого класса амплитуд рассеяния.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод ограничения Фруассара–Мартена

Начнем с очень слабого ограничения сверху на $A(s, t_0)$, $t_0 = 4m^2 - \epsilon$:

$$A(s, t_0) < \exp(s^n), \quad s \rightarrow \infty. \quad (\text{П.1})$$

Логунов, Нгуен Ван Хъеу и Тодоров [33] показали, что (П.1) – достаточное условие для вывода полиномиальной ограниченности амплитуды упругого рассеяния при физических энергиях. Действительно, при $s \rightarrow \infty$ и $l/\sqrt{s} \rightarrow \infty$ (см. [9], [10])

$$P_l(x_0) \cong \frac{e^\gamma}{\sqrt{2\pi\gamma}}, \quad \gamma \equiv 2l\sqrt{\frac{t_0}{s}}, \quad x_0 = 1 + \frac{2t_0}{s}. \quad (\text{П.2})$$

Напомним, что в соответствии с аналитичностью $A(s, t)$ в эллипсе Мартена ряд (47) сходится при $t = t_0$. Все члены этого ряда положительны согласно условию (46), поскольку $P_l(x) > 1$ при $x > 1$. Вследствие (П.2) ограничение (П.1) может быть выполнено, только если

$$\tilde{a}_{l'+L} < \exp\left(-2l'\sqrt{\frac{t_0}{s}}\right), \quad (\text{П.3})$$

где $L \sim s^{n+1/2}$.

Используя ограничение (46) на $\tilde{a}_l(s)$ для $l \leq L$ и неравенство (П.3) для $l \geq L$, легко оценить

$$A(s, 0) = 2 \sum_0^\infty (2l+1) \tilde{a}_l(s) \quad (\text{П.4})$$

и получить полиномиальное ограничение на $A(s, 0)$.

В соответствии с результатом Джина и Мартена [34] полиномиальная ограниченность $A(s, 0)$ ведет к полиномиальной ограниченности $A(s, t_0)$, так как число вычитаний в ДС при $t = 0$ и $t = t_0$ совпадает (если это число четное). Полиномиальная ограниченность $A(s, t_0)$ ведет к новому ограничению на $\tilde{a}_l(s)$.

Точнее, если $A(s, t_0) < s^k$, то неравенство (П.3) удовлетворяется при

$$L = \frac{k-1/2}{2} \sqrt{\frac{s}{t_0}} \ln s. \quad (\text{П.5})$$

Повторяя вычисления, которые привели к полиномиальной ограниченности амплитуды рассеяния вперед, мы получим ограничение Фруассара–Мартена, но с неизвестной константой вместо π/m_π^2 . Следуя тем же путем и учитывая, что $k = 2$, придем к неравенству (3) с дополнительным фактором $9/4$. Чтобы получить самое сильное ограничение сверху, заметим: условие

$$\int_{s_0}^{\infty} \frac{A(s, t_0) ds}{s^3} < \infty \quad (\text{П.6})$$

подразумевает, что

$$A(s, t_0) < \frac{s^2}{\ln s}, \quad s \rightarrow \infty. \quad (\text{П.7})$$

Принимая во внимание, что $\max A(s, 0)$ является растущей функцией $A(s, t_0)$, можно получить искомое ограничение, если найти набор таких $\tilde{a}_l(s)$, которые реализуют $\max A(s, 0)$ при заданном значении $A(s, t_0)$. Покажем, что этот набор следующий:

$$\tilde{a}_l(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } l \leq L, \\ \eta \leq 1 & \text{при } l = L + 1, \\ 0 & \text{при } l \geq L + 2. \end{cases} \quad (\text{П.8})$$

Этот результат следует из свойств полиномов Лежандра: $P_{l_2}(x) > P_{l_1}(x)$, если $x > 1$ и $l_2 > l_1$.

Докажем, что любой набор $\tilde{a}_l(s)$, отличный от набора (П.8), не может реализовать $\max A(s, 0)$. Действительно, в любом другом наборе всегда существуют две парциальные амплитуды $\tilde{a}_{l_1}(s)$ и $\tilde{a}_{l_2}(s)$, $l_2 > l_1$, такие, что $\tilde{a}_{l_1}(s) < 1$ и $\tilde{a}_{l_2}(s) > 0$. Заменяем $\tilde{a}_{l_1}(s)$ на $\tilde{a}_{l_1}(s) + \Delta_1$ и $\tilde{a}_{l_2}(s)$ на $\tilde{a}_{l_2}(s) - \Delta_2$, $\Delta_i > 0$ так, что $A(s, t_0)$ остается неизменной, т.е.

$$(2l_1 + 1)\Delta_1 - (2l_2 + 1)\Delta_2 \frac{P_{l_2}(x_0)}{P_{l_1}(x_0)} = 0.$$

Очевидно, что

$$\Delta A(s, 0) = (2l_1 + 1)\Delta_1 - (2l_2 + 1)\Delta_2 > 0.$$

Чтобы найти величину L , заметим, что вкладом парциальной амплитуды с $l = L + 1$ можно пренебречь, и вследствие известной рекуррентной формулы

$$(2l + 1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$$

ряд по полиномам Лежандра функции $A(s, t_0)$ может быть просуммирован. В результате имеем следующее уравнение для L :

$$A(s, t_0) = P'_{L+1}(x_0) + P'_L(x_0) \cong 2P'_L(x_0). \quad (\text{П.9})$$

Из (П.2) следует, что

$$P'_L\left(1 + \frac{2t_0}{s}\right) \cong \frac{e^\gamma \sqrt{\gamma}}{4\sqrt{2\pi}} \frac{s}{t_0}, \quad \gamma = 2L\sqrt{\frac{t_0}{s}}. \quad (\text{П.10})$$

Таким образом, в соответствии с (7) и (9)

$$e^{\gamma} \sqrt{\gamma} \approx \frac{s}{\ln s}. \quad (\text{П.11})$$

Это уравнение легко решить методом последовательных приближений. В результате получим, что при $s \rightarrow \infty$

$$\gamma \cong \ln \frac{s}{(\ln s)^{3/2}} \quad (\text{П.12})$$

(подробный вывод см. в работе [10]).

Согласно оптической теореме при $t = 0$

$$\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}(s) \cong \frac{32\pi}{s} \sum_{l=0}^L 2l \cong \frac{16\pi}{s} L^2 = \frac{4\pi}{t_0} \gamma^2. \quad (\text{П.13})$$

Принимая во внимание (П.12), видим, что равенство (П.13) означает справедливость искомого неравенства (4).

Подчеркнем, что максимум $\sigma_{\text{tot}}(s)$ достигается, когда $\tilde{\sigma}_{\text{el}}(s) = \sigma_{\text{tot}}(s)$ (см. формулы (43)–(45)).

Благодарности. Мы благодарны М. Чайчиану и А. Туреану за сотрудничество на ранней стадии этой работы.

Список литературы

- [1] *H. Lehmann.* Nuovo Cimento. 1958. V. 10. P. 579.
- [2] *A. Martin.* Nuovo Cimento. 1966. V. 42. P. 930.
- [3] *G. Sommer.* Nuovo Cimento A. 1967. V. 48. P. 92; V. 52. P. 373; P. 850; P. 866.
- [4] *J. D. Bessis, V. Glaser.* Nuovo Cimento A. 1967. V. 50. P. 568.
- [5] *O. W. Greenberg, F. E. Low.* Phys. Rev. 1961. V. 124. P. 2047.
- [6] *M. Froissart.* Phys. Rev. 1961. V. 123. P. 1053.
- [7] *A. Martin.* Phys. Rev. 1963. V. 129. P. 1432.
- [8] *L. Lukashuk, A. Martin.* Nuovo Cimento A. 1967. V. 52. P. 122.
- [9] *S. M. Roy.* Phys. Rep. C. 1972. V. 5. P. 125.
- [10] *Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова.* ЭЧАЯ. 2001. Т. 32. С. 1115.
- [11] *V. Singh, S. M. Roy.* Ann. Phys. 1970. V. 57. P. 461.
- [12] *A. Connes.* Noncommutative Geometry. New York: Acad. Press, 1994.
- [13] *H. S. Snyder.* Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 38.
- [14] *S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts.* Phys. Lett. B. 1994. V. 331. P. 39; Commun. Math. Phys. 1995. V. 172. P. 187.
- [15] *N. Seiberg, E. Witten.* JHEP. 1999. V. 9909. P. 32; hep-th/9908142.
- [16] *M. R. Douglas, N. A. Nekrasov.* Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 977; hep-th/0106048.
- [17] *J. Gomis, T. Mehen.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 591. P. 265; hep-th/0005129.
- [18] *N. Seiberg, L. Susskind, N. Toumbas.* JHEP. 2000. V. 0006. P. 044; hep-th/0005015.
- [19] *M. Chaichian, K. Nishijima, A. Tureanu.* Phys. Lett. B. 2003. V. 568. P. 146; hep-th/0209006.
- [20] *M. Chaichian, M. Mnatsakanova, A. Tureanu, Yu. Vernov.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 673. P. 476; hep-th/0306158.
- [21] *Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова.* ТМФ. 2004. Т. 139. С. 3.

- [22] *Yi Liao, K. Sibold.* Phys. Lett. B. 2002. V. 549. P. 352; hep-th/0209221.
- [23] *M. Chaichian, A. Tureanu.* Jost–Lehmann–Dyson representation and Froissair–Martin bound in quantum field theory on noncommutative space-time. hep-th/0403032.
- [24] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Лозунов, И. Т. Тодоров.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
- [25] *L. Álvarez-Gaumé, J. L. F. Barbon.* Int. J. Mod. Phys. A. 2001. V. 16. P. 1123; hep-th/0006209.
- [26] *В. С. Владимиров.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1966. Гл. 5.
- [27] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. Гл. 10.
- [28] *С. Швебер.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. Гл. 18.
- [29] *А. А. Лозунов, М. А. Мествришвили, О. А. Хрусталева.* ЭЧАЯ. 1972. Т. 3. С. 3.
- [30] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. Разд. 15.41.
- [31] *J. Bros, H. Epstein, V. Glaser.* Nuovo Cimento. 1964. V. 31. P. 1264; Commun. Math. Phys. 1965. V. 1. P. 240.
- [32] *A. Martin.* Nuovo Cimento. 1963. V. 29. P. 993.
- [33] *А. А. Лозунов, Нгуен Ван Хьен, И. Т. Тодоров.* УФН. 1966. Т. 88. С. 51.
- [34] *Y. S. Jin, A. Martin.* Phys. Rev. B. 1964. V. 135. P. 1375.