Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, Статистические суммы матричных моделей как первый пример специальных функций теории струн. Эрмитова одноматричная модель с матрицами конечного размера, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 3, 419–488

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:13:29

© 2005 г. А. С. Александров^{*,†}, А. Д. Миронов^{*,‡},
А. Ю. Морозов^{*}

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ МАТРИЧНЫХ
МОДЕЛЕЙ КАК ПЕРВЫЙ ПРИМЕР
СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ТЕОРИИ СТРУН.
ЭРМИТОВА ОДНОМАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ
С МАТРИЦАМИ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

Хотя статистическими суммами матричных моделей не исчерпывается полный набор τ -функций, возникающих в теории струн, они являются элементарными блоками для построения многих других τ -функций и, по-видимому, правильно улавливают фундаментальную природу квантовой гравитации и теории струн. Мы предлагаем рассматривать статистические суммы матричных моделей в качестве новых специальных функций. Это означает, что они должны быть исследованы и представлены в некоторой стандартной форме безотносительно к конкретным применениям. В то же время таблицы и перечни свойств должны быть достаточно полны, для того чтобы исключить появление неожиданных особенностей в новых приложениях. Решение такой задачи требует значительных усилий, и данная статья является лишь первым шагом в этом направлении. Мы ограничимся рассмотрением одноматричной эрмитовой модели с матрицами конечного размера и сконцентрируем внимание в основном на структуре фаз и ветвей, которая возникает при рассмотрении статистической суммы как D -модуля. Мы обсудим роль препотенциала Качазо–Интрилигатора–Вафы и Дийкграафа–Вафы (который порождает некоторый базис в линейном пространстве решений условий Вирасоро, хотя понимание того, чем и как этот базис выделен, отсутствует) и вычислим несколько первых многопетлевых корреляционных функций, которые обобщают полукруговое распределение на случай полиследовых и непланарных корреляционных функций.

Ключевые слова: матричные модели, теория струн, многопетлевые корреляционные функции.

Статья написана по заказу Редколлегии.

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: al@itep.ru, mironov@itep.ru, morozov@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт, Москва, Россия

[‡]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: mironov@lpi.ac.ru

СОДЕРЖАНИЕ

I. Теория: статистические суммы и их свойства	421
1. Введение	421
2. Статистическая сумма как функциональный интеграл	424
2.1. Понятие статистической суммы	424
2.2. Матричная модель как простейшая струнная модель	425
3. Статистическая сумма как D -модуль	427
3.1. Понятие статистической суммы	427
3.2. Условия Вирасоро для ЭММКР	429
3.3. Условия Вирасоро и петлевые операторы	430
3.4. Рекуррентное решение условий Вирасоро	433
4. О количестве решений	435
4.1. Типы зависимости от g	436
4.2. Сдвиги переменных t и происхождение параметров f : сверхпростой пример	437
4.3. Оператор эволюции и базис в гильбертовом пространстве решений	438
II. Конкретные специальные функции	440
1. Гауссова статистическая сумма	440
2. Формулы разложения типа формулы Гивенталья для негауссовых статистических сумм КИВ–ДВ	444
3. Препотенциал КИВ–ДВ	449
III. Таблицы	454
1. Гауссова статистическая сумма	454
1.1. Первые обобщенные числа Каталана	454
1.2. Первые гауссовы плотности (производящие функции обобщенных чисел Каталана); $\nu = gN/M$	455
1.3. Первые рекуррентные соотношения для гауссовых полиплотностей	456
1.4. Первые гауссовы полиплотности: аналитические выражения; $\nu = gN/M$; $y(z) = z^2 - 4\nu$	457
1.5. Первые гауссовы полиплотности: первые члены N -разложений	459
1.6. Рекуррентные формулы для гауссовых корреляционных функций	465
1.7. Младшие гауссовы корреляционные функции, связанные и несвязные	466
1.8. Младшие препотенциалы $\mathcal{F}^{(p)}$: первые члены разложения по t	471
1.9. Функции $Z_G(t N)$: первые члены разложения по t	473
2. Негауссовы статистические суммы	475
3. Препотенциал КИВ–ДВ: представление $\mathcal{F}_m^{\text{DV}} _{t=0}$ через гауссовы препотенциалы	476
3.1. Явные формулы для $\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(p m)} _{t=0}$	477
3.2. Пример $n = 2$ (кубический препотенциал $W(z)$, $3T_3 = \kappa$, $M_1 = -M_2 = \kappa\alpha_{12}$)	479
IV. Комментарии	480
1. Обобщенное правило сумм (II.1.25): вывод и применение	480

2. Вычисление полиплотностей в гауссовой модели	482
3. Непрерывные пределы	484

I. ТЕОРИЯ: СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ И ИХ СВОЙСТВА

1. ВВЕДЕНИЕ

Одна из целей *общей теории струн* [1] состоит в том, чтобы идентифицировать свойства *статистических сумм* различных *струнных моделей*. По определению статистические суммы являются производящими функциями всех корреляционных функций в квантовой теории. Существуют три различных описания/определения статистической суммы: в виде матричного элемента, в виде решения системы линейных дифференциальных уравнений (т.е. как элемента D -модуля) или в виде (функционального) интеграла по траекториям в конфигурационном и/или фазовом пространстве (по полевым конфигурациям), которые аналогичны трем существующим формулировкам квантовой механики (в виде линейной алгебры операторов в гильбертовом и фоковском пространствах, через волновые функции, через интеграл по путям). Эти совершенно различные определения подчеркивают различные свойства статистических сумм, и из их эквивалентности проистекают глубокие и нетривиальные соотношения и симметрии. Среди таких следствий важную роль играют свойства интегрируемости статистических сумм, из которых следует, что они принадлежат к классу *обобщенных τ -функций* [2], удовлетворяющих бесконечному набору совместных *нелинейных* разностно-дифференциальных уравнений (*обобщенных уравнений Хироты*). Более того, статистические суммы различных моделей часто бывают связаны через *дуальности* и/или *симметрии типа зеркальной*. Несмотря на общие определения и симметрии статистические суммы редко выражаются через стандартные *специальные функции* и обладают сложными аналитическими свойствами, со всевозможными *особенностями и ветвлениями*.

Все это: универсальность, богатые симметрии и невозможность свести задачу к известным функциям — означает, что статистические суммы (τ -функции) струнных моделей являются естественными кандидатами на роль следующего поколения специальных функций. Они должны быть изучены безотносительно к их конкретным применениям, их свойства должны быть исследованы и описаны, интересные частные случаи (при специальных значениях параметров, в асимптотиках, на специальных ветвях) должны быть найдены, перечислены и сведены в таблицы и в конце концов собраны в справочниках по специальным функциям. Эта задача является даже более естественной, поскольку по аналогии с обыкновенными специальными функциями (из семейств гипергеометрических, эллиптических и римановых тета-функций) все τ -функции тесно связаны с теорией представлений алгебр и групп Ли [2]. Важно отметить, что, хотя статистические суммы обычно являются τ -функциями, обратное неверно; статистические суммы образуют очень специальный подкласс среди τ -функций — с дополнительными структурами и глубокими свойствами. (Ситуация хорошо моделируется соотношением между римановыми и общими тета-функциями: первые, представляя усеченные статистичес-

кие суммы свободных полей на римановых поверхностях, обладают дополнительными, очень важными свойствами – такими, например, как тождества Фэя, которые следуют из теоремы Вика для свободных полей.) Другими словами, интегрируемость является естественной, но лишь малой, не исчерпывающей частью теории статистических сумм.

В данной статье мы представляем первую итерацию предложенного выше анализа/изучения для простейшей и очень важной специальной функции теории струн – статистической суммы *одноматричной эрмитовой модели* с матрицами конечного размера (ЭММКР) [3]–[7]. Общая схема рассуждений равным образом применима к любой другой матричной модели. Очевидно, что аналогичным образом следует проанализировать колчаные (конформные) матричные модели [8]–[10] (отметим также недавний прогресс в двухматричных (нормальных) моделях [11]) и τ -функцию Концевича [12]–[17], после чего можно будет перейти к *геометрическим* τ -функциям, связанным с топологическими сигма-моделями и моделями квантовой гравитации в различных фоновых полях. Однако из всех статистических сумм естественнее всего начать именно с относящихся к матричным моделям (различные аспекты матричных моделей изложены в [18]–[20]). Они не только являются простейшими примерами, но, можно ожидать, в действительности представляют элементы для построения многих других τ -функций. Пример разложения *геометрической* статистической суммы (а именно, в случае CP_n топологической сигма-модели) в композицию элементарных функций (в данном случае это $(n+1)$ -я τ -функция Концевича), линейную по всем элементам, был рассмотрен А. Гивенталем [21], [22] (см. также [10]). Более простая формула разложения для ЭММКР (которая на самом деле была получена уже в [23]) будет проанализирована в данной работе.

В стандартной теории специальных функций принято различать два уровня общности: можно рассматривать *общее* решение дифференциального уравнения и можно вместо этого рассмотреть *частные* решения (ветви), обычно связанные с характерными интегральными представлениями (и/или специальными представлениями возникающей алгебры Ли). В качестве тривиального примера можно рассмотреть цилиндрическую функцию [24] (D -модуль, связанный с оператором $z^2\partial_z^2 + z\partial_z + (z^2 - \nu^2)$) и ее специальные ветви: функции Бесселя и Неймана или функции Ганкеля. Любая пара этих ветвей образует базис в пространстве решений (в D -модуле) и может быть зафиксирована с помощью выбора контуров интегрирования.

То же самое верно для специальных функций теории струн: специальные (функциональные) интегралы описывают специальные ветви общей статистической суммы, которая определяется набором тождеств Уорда (уравнений Швингера–Дайсона), только разница между ветвями может быть более отчетливой, чем в элементарном случае. Мы детально разберем это явление в случае ЭММКР начиная с наивного матричного интеграла в п. I.2, обобщая на произвольное решение условий Вирасоро в п. I.3 и п. I.4 (хотя сейчас мы очень мало можем сказать про случай, когда не существует разложения по родам) и возвращаясь к специальным решениям: гауссовой τ -функции $Z_G^M(t)$ в п. II.1 и τ -функции Качадо–Интрилигатора–Вафы и Дийкграафа–Вафы (КИВ–ДВ) $Z_{DV}[T|S](t)$ в п. II.2. С помощью *формул разложения* (п. II.2), аналогичных формулам из работы Гивентала [21], τ -функция КИВ–ДВ строится из полилинейной комбинации гауссовых τ -функций, и согласно аргументам п. I.4.3 такие функции можно рассматри-

вать как базис в линейном пространстве всех решений условий Вирасоро (примерно так же, как e^{ipx} в пространстве всех функций от x ; другими словами, так же, как и e^{ipx} , $Z_{DV}[T|S]$ задает ядро интегрального преобразования функций переменных T к функциям переменных S). К сожалению, до сих пор не ясно, чем выделен этот базис, хотя он имеет очевидное преимущество: а именно, он задается формулами разложения, аналогичными формулам Гивенталья, и связан с теорией Уизема–Зайберга–Виттена.

В данной работе нами достигаются следующие четыре цели.

1. Мы формулируем задачу, состоящую в описании свойств *матрично-модельных* и *геометрических* τ -функций, определенных как D -модули, т.е. как общие решения системы условий типа условий Вирасоро, в виде формальных рядов, и даем предварительный вариант такого описания для ЭММКР.

2. Мы утверждаем, что описание сложной структуры фаз (ветвей) τ -функции является очень важной – и до сих пор недооцененной и неисследованной – составной частью этой программы и делаем попытку такого описания для ЭММКР.

3. Мы вводим иерархическое описание фаз. Во-первых, с помощью *струнной константы связи* g мы вводим градуировку по степеням переменных t (*констант связи* или *времен*) и используем ее для того, чтобы выделить фазы, обладающие *разложением по родам*, для которых логарифм статистической суммы (*препотенциал*) допускает разложение в *полубесконечный ряд* по степеням g . Во-вторых, сдвиг конечного числа переменных $t \rightarrow t - T$ позволяет нам ввести различные виды t -разложений (фаз) с различными величинами (на самом деле разностями $\alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$ корней полинома степени n , $W'(z) = \sum k T_k z^{k-1} = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$), возникающими в знаменателях. Полином $W(z)$ степени $n+1$ играет роль *древесного суперпотенциала* в контексте теории Дийкграфа–Вафы [25]. В третьих, каждая из этих фаз расщепляется в бесконечнопараметрическое семейство с различными положениями особенностей (точек ветвления) *полиплотностей*¹⁾

$$\rho_W(z_1, \dots, z_m) = \prod_{i=1}^m \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{z_i^{k+1}} \frac{\partial}{\partial t_k} \right) \mathcal{F}_W(t), \quad (\text{I.1.1})$$

где $Z_W(t) = e^{\frac{1}{g^2} \mathcal{F}_W(t)}$ – это статистическая сумма ЭММКР. Это семейство фаз параметризуется произвольной функцией $F_W(g) = F[g, T] = \mathcal{F}_W(t=0, g)$ параметра g и n переменных $T_0, \dots, T_{n-1}$.

4. Мы утверждаем, что альтернативный подход к описанию ветвей может основываться на формулах разложения, аналогичных формулам Гивенталья, представляющих

¹⁾Эти величины могут быть ассоциированы с многопетлевыми корреляционными функциями (корреляционными функциями вильсоновских петель) $\langle \langle \prod_{k=1}^m \text{Tr} \frac{1}{z_k - \phi} \rangle \rangle_W$ [26] (где двойные скобки означают *связные корреляционные функции*), если существует матрично-интегральное представление с некоторым пертурбативным диаграммным разложением. Мнимая часть этих корреляционных функций естественным образом связана с полиплотностями распределения собственных значений в данном случае. Именно поэтому мы обычно называем $\rho_W(z_1, \dots, z_m)$ полиплотностями. Также мы будем называть их полирезольвентами, поскольку $\rho(z)$ – это резольвента.

матрично-модельные/геометрические τ -функции с помощью оператора, действующего на произведение “элементарных τ -функций”. В случае ЭММКР “элементарными τ -функциями” являются гауссовы, и формулы разложения приводят к τ -функциям КИВ–ДВ $Z_{\text{DV}}[T|S](t)$. Если задан полином $W(z)$, то общая статистическая сумма, построенная по произвольной функции $Z[T] = e^{F[T]/g^2}$ с помощью оператора эволюции $\check{U}_W(t)$ (см. п. I.4.3),

$$Z_W(t) = \check{U}_W(t)Z[T] \quad (\text{I.1.2})$$

может быть представлена через τ -функции КИВ–ДВ

$$Z_W(t) = \int Z_{\text{DV}}[T|S](t)C[S]dS, \quad (\text{I.1.3})$$

где коэффициенты $C[S]$ определяются разложением “начальной” функции $Z[T]$ в линейную комбинацию $Z_{\text{DV}}[T|S] = e^{F_{\text{bv}}[T|S]/g^2} = Z_{\text{DV}}[T|S](t=0)$,

$$Z[T] = \int Z_{\text{DV}}[T|S]C[S]dS. \quad (\text{I.1.4})$$

2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА КАК ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Понятие статистической суммы. Теория струн изучает статистические суммы

$$Z_{\mathcal{M}, S_0}\{t|\phi_0\} = \int_{\mathcal{M}} d\phi \exp\left(\frac{S(\phi_0 + \phi)}{g}\right), \quad (\text{I.2.1})$$

$$S(\phi) = S_0(\phi) + \sum_{\vec{k}} t_{\vec{k}} V_{\vec{k}}(\phi)$$

(с полным набором вертексных операторов $V_{\vec{k}}(\phi)$) как функции:

а) пространства полей $\mathcal{M}$, параметризованного ϕ и снабженного некоторой “естественной” мерой $d\phi$,

б) меры $d\mu(\phi) = d\phi e^{\frac{1}{g}S_0(\phi)}$ на $\mathcal{M}$ (составленной из $d\phi$, затравочного действия $S_0(\phi)$ и струнной константы связи/постоянной Планка g),

в) бесконечного множества констант связи $t_{\vec{k}}$ и

г) фонового состояния (вакуума) ϕ_0 .

Обычно фоновое поле ϕ_0 является решением уравнений движения

$$\left. \frac{\delta S_0(\phi)}{\delta \phi} \right|_{\phi_0} = 0, \quad (\text{I.2.2})$$

но иногда используют их квантовый аналог

$$\left. \frac{\delta d\mu(\phi)}{\delta \phi} \right|_{\phi_0} = 0 \quad (\text{I.2.3})$$

и/или деформированное действие $S(\phi)$, подставленное вместо $S_0(\phi)$ в (I.2.2) и (I.2.3) (таким образом, зависимости от ϕ_0 , g и $t_{\vec{k}}$ смешиваются).

Пространство $\mathcal{M}$ вместе с возможными ограничениями на выбор меры $d\mu(\phi)$ определяет конкретную *струнную модель*.

В задачи теории струн входит также поиск универсального метода построения всех интересных пространств $\mathcal{M}$ из некоторых строительных блоков (например, из элементарных симплексов).

Обычно

$$\mathcal{M} = \text{Hom}(W, T)/\mathcal{G} \quad (\text{I.2.4})$$

является пространством отображений *мировой поверхности* W в *таргет-пространство* T , факторизованное по некоторой *группе симметрий* $\mathcal{G}$.

Для любого $\mathcal{M}$ можно построить новые пространства $\mathcal{M}_G \equiv \mathcal{M} \otimes G_R/U$, где G_R — это группа G в некотором представлении R , факторизованная по действию своей максимальной подгруппы U .

Характерным примером является $G_R = M_N$, пространство квадратных $N \times N$ матриц (N -мерное представление $GL(N)$ — пространства линейных отображений векторного пространства V_N в себя), на котором унитарная группа $U(N)$ действует сопряжением $M \rightarrow U^{-1} M U$. Этот рецепт “бранизации” (замены чисел матрицами) известен из изучения “стопок бран” [27].

Для пространства $\mathcal{M}$ типа (I.2.4) можно перейти к отображениям между более общими расслоениями, пучками и *комплексами* над W и T (заменяя числа *отображениями комплексов*, с комплексами, описываемыми вспомогательными переменными, как, например, в формализмах Баталина–Фрадкина и Баталина–Фрадкина–Вилковского [28]–[33]).

Для заданного вакуума ϕ_0 часто имеет смысл переопределить набор констант связи в действии $S(\phi)$ в формуле (I.2.1). Это всегда возможно, если вертексные операторы $V_{\vec{k}}(\phi)$ образуют *полный набор* (в *сильном* или *слабом* смысле, подробности см. в [34]):

$$\begin{aligned} S(\phi_0 + \phi) &= S_0(\phi_0 + \phi) + \sum_{\vec{k}} t_{\vec{k}} V_{\vec{k}}(\phi_0 + \phi) = \\ &= S_0(\phi_0 + \phi) + \sum_{\vec{k}} t_{\vec{k}}^{\{\phi_0\}} V_{\vec{k}}(\phi). \end{aligned} \quad (\text{I.2.5})$$

Константы связи $t_{\vec{k}}^{\{\phi_0\}}$ лучше, чем $t_{\vec{k}}$, подходят для построения теории возмущений вокруг конкретного фонового значения ϕ_0 , но они сами зависят от ϕ_0 , и тождества Уорда (такие как условия Вирасоро, представленные ниже), выраженные через них, имеют более сложную форму. Конечно, все $t_{\vec{k}}^{\{\phi_0\}} = 0$, если $t_{\vec{k}} = 0$.

2.2. Матричная модель как простейшая струнная модель. Самый первый пример струнной модели — $W = pt$, $T = pt$ (т.е. как мировая поверхность, так и таргет-пространство являются точками). Простейшая связанная с такой моделью “стопка бран” имеет вид $\mathcal{M} = M_N/U(N)$, и статистическая сумма соответствует *эрмитовой одноматричной модели картановского типа* [6]:

$$Z_N^{(\text{matr})}(t) = \frac{1}{\text{Vol}_{U(N)}} \int_{M_N} D\phi \exp\left(\frac{1}{g} \sum_{\vec{k}} t_{\vec{k}} \text{Tr} \phi^{k_1} \dots \text{Tr} \phi^{k_m}\right), \quad (\text{I.2.6})$$

где суммирование проводится по всем неотрицательным целозначным векторам $\vec{k} = (k_1, \dots, k_m)$ со всеми возможными длинами m . Мера

$$D\phi = \prod_{i,j=1}^N d\phi_{ij} \quad (I.2.7)$$

является $U(N)$ -инвариантной, и если $\phi = U^{-1}\phi_D U$, где $\phi_D = \text{diag}(\phi_i)$, то

$$D\phi = DU \prod_{i=1}^N d\phi_i \prod_{i < j}^N (\phi_i - \phi_j)^2, \quad (I.2.8)$$

DU — это мера Хаара на группе U_N , индуцированная нормой $\|\delta U\|^2 = \text{Tr}(U^{-1}\delta U)^2$, а объем унитарной группы

$$\text{Vol}_{U(N)} = \int_{U(N)} DU \sim \prod_{k=1}^{N-1} k!. \quad (I.2.9)$$

Эта модель — *картановского* типа, поскольку интеграл сводится к N -кратному интегралу только по собственным значениям ϕ_i . Контур интегрирования не обязательно должны быть действительными прямыми (такие интегралы можно рассматривать в качестве аналитического продолжения, см. примеры в конце п. I.3.1).

Обычно вместо $Z_N(t)$ рассматривается усеченная статистическая сумма $Z_N(t)$ с ненулевыми временами $t_{\vec{k}}$, соответствующими только векторам $\vec{k}$ единичной длины,

$$Z_N^{(\text{matr})}(t) = \frac{1}{\text{Vol}_{U(N)}} \int_{M_N} D\phi \exp\left(\frac{1}{g} \sum_{k \in Z_+} t_k \text{Tr} \phi^k\right). \quad (I.2.10)$$

Именно этот объект мы будем использовать в качестве прототипа статистической суммы ЭММКР (с конечным N).

Существует целый набор мощных методов, предназначенных для исследования усеченной модели (I.2.10), рассматриваемой как модель картановского типа [6], [7]. Двумя наиболее важными из них являются метод ортогональных полиномов [3] и формализм свободных фермионов [5], [15]. Используя их, можно вывести *детерминантное представление* [5]–[7] функции Z_N

$$Z_N^{(\text{matr})}(t) = \det_{0 \leq i, j < N} \mathcal{H}_{i+j}(t), \quad (I.2.11)$$

где

$$\mathcal{H}_j = \int \phi^j \exp\left(\frac{1}{g} \sum_{k=0}^{\infty} t_k \phi^k\right) d\phi. \quad (I.2.12)$$

В свою очередь, это представление можно использовать для доказательства [4] того, что Z_N является τ -функцией для иерархии цепочки Тоды, т.е. удовлетворяет бесконечной системе билинейных дифференциальных уравнений. Например,

$$Z_N^{(\text{matr})} \frac{\partial^2 Z_N^{(\text{matr})}}{\partial t_1^2} - \frac{\partial Z_N^{(\text{matr})}}{\partial t_1} \frac{\partial Z_N^{(\text{matr})}}{\partial t_1} = Z_{N-1}^{(\text{matr})} Z_{N+1}^{(\text{matr})}. \quad (I.2.13)$$

В формуле (I.2.10) затравочное действие отсутствует. Как в каждой струнной модели, его можно ввести с помощью сдвига констант связи $t_k \rightarrow t_k - T_k$:

$$Z_{N,W}^{(\text{matr})}(t) = \frac{1}{\text{Vol}_{U(N)}} \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{g} \text{Tr } W(\phi)\right) \exp\left(\frac{1}{g} \sum_k t_k \text{Tr } \phi^k\right), \quad (\text{I.2.14})$$

где $W(z) = \sum_{k=1}^{n+1} T_k z^k$. Несмотря на то что формула (I.2.14) получена с помощью простого сдвига переменных, эта статистическая сумма существенно зависит от потенциала $W(z)$, особенно от его степени $n+1$, поскольку изменение n полностью меняет структуру ряда теории возмущений. Другими словами, система претерпевает фазовый переход (статистическая сумма сингулярна) при нулевом значении коэффициента перед лидирующим (z^{n+1}) членом²⁾ $W(z)$.

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА КАК D -МОДУЛЬ

3.1. Понятие статистической суммы. Статистическая сумма (τ -функция) является в действительности очень сложным объектом. На самом деле это даже не функция, а формальный D -модуль, т.е. полный набор степенных рядов (по переменным t), удовлетворяющих непротиворечивой системе линейных уравнений. Решение системы не обязательно должно быть единственным, однако подходящее аналитическое продолжение по переменным t переводит одно решение в другое, и на достаточно большом пространстве модулей (констант связи t) можно рассматривать объект как целое, по крайней мере формально, и именно его мы будем называть *статистической суммой*. Наивно различные решения можно интерпретировать как различные *ветви* статистической суммы, связанные с различными *фазами* теории. Далее, решения линейных дифференциальных уравнений часто можно представить в виде интегралов (по *спектральным многообразиям*), но “контур” интегрирования остаются произвольными: это могут быть произвольные *цепи* с комплексными коэффициентами (для целых коэффициентов этот произвол обычно описывают в терминах *монотропий*, но в случае статистических сумм коэффициенты не обязательно должны быть целыми). *Модель* статистической суммы – это интегральная формула, в которой содержится достаточно много свободных параметров для того, чтобы представить общее решение рассматриваемых дифференциальных уравнений.

Чтобы прояснить нашу точку зрения, рассмотрим ряд примеров.

Во-первых, *плоские* $SU(2)$ -модули $a(\lambda)$ теории Зайберга–Виттена [35] удовлетворяют уравнению

$$(4\lambda(\lambda-1)\partial_\lambda^2 + 1)a(\lambda) = 0, \quad (\text{I.3.1})$$

которое имеет интегральное представление

$$a(\lambda) = \int_C \sqrt{\frac{x-\lambda}{x(x-1)}} dx, \quad (\text{I.3.2})$$

²⁾Эта ситуация очень похожа на ситуацию в матричных моделях Концевича, которые кардинальным образом зависят от матрично-модельного потенциала, особенно от его степени [16].

а *модель* задается произвольным контуром

$$C = \alpha[0, 1] + \beta[1, \lambda], \quad (\text{I.3.3})$$

который является произвольной линейной комбинацией (с комплексными(!) коэффициентами) циклов A и B на торической спектральной кривой. Существует альтернативное описание того же объекта (этой “игрушечной” статистической суммы) в терминах 1-формы Зайберга–Виттена

$$dS(x, \lambda) = \sqrt{\frac{x - \lambda}{x(x - 1)}} dx, \quad (\text{I.3.4})$$

связанной с исходным уравнением (I.3.1) через соотношение

$$(4\lambda(\lambda - 1)\partial_\lambda^2 + 1) dS(x, \lambda) = d\sqrt{\frac{x(x - 1)}{x - \lambda}} \cong 0 \quad (\text{I.3.5})$$

(где $\cong$ означает эквивалентность в когомологиях).

Другим примером, уже обсуждавшимся во введении, являются цилиндрические функции. Они определяются уравнением

$$[\lambda^2 \partial_\lambda^2 + \lambda \partial_\lambda + (\lambda^2 - \nu^2)] Z_\nu(\lambda) = 0, \quad (\text{I.3.6})$$

а их интегральное представление имеет вид

$$Z_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C \exp(-ix \sin \theta + i\nu \theta) d\theta. \quad (\text{I.3.7})$$

Модель задается произвольной линейной комбинацией двух контуров, например таких, как контуры, выбранные в формуле (8.423) в [24] (этот выбор фиксирует функции Ганкеля в качестве базиса).

Еще одним примером является функция Эйри (простой пример модели Концевича [12]–[17]), заданная определяющим уравнением

$$(\partial_\lambda^2 + \lambda)A(\lambda) = 0 \quad (\text{I.3.8})$$

с интегральным представлением

$$A(\lambda) = \int_C \exp\left(\frac{x^3}{3} + \lambda x\right) dx. \quad (\text{I.3.9})$$

Этот D -модуль является частным случаем цилиндрической функции с $\nu = 1/3$.

3.2. Условия Вирасоро для ЭММКР. Возвращаясь к ЭММКР, отметим, что она исходно была определена в терминах матричного интеграла (I.2.10). Этот интеграл зависит от (бесконечного множества) параметров t_k и, согласно приведенным выше аргументам, подразумевает другое *определение* статистической суммы – как решения (бесконечной) системы согласованных линейных (дифференциальных) уравнений (тождеств Уорда или уравнений Пикара–Фукса), т.е. как D -модуль. В конкретном случае ЭММКР эти уравнения³⁾,

$$\hat{L}_m Z(t) = 0, \quad m \geq -1, \quad (\text{I.3.10})$$

$$\hat{L}_m = \sum_{k \geq 0} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+m}} + g^2 \sum_{\substack{a+b=m \\ a, b \geq 0}} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b}, \quad (\text{I.3.11})$$

называются [37] *условиями Вирасоро*, поскольку $[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m-n)\hat{L}_{m+n}$ (на самом деле это только борелевская подалгебра алгебры Вирасоро).

Впредь мы будем определять статистическую сумму ЭММКР как общее решение системы (I.3.10), так что матричный интеграл (I.2.10) является частным интегральным представлением. Одной из наших задач будет проанализировать, насколько общим является это интегральное представление и можно ли считать его *моделью* статистической суммы ЭММКР.

Поскольку

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_0}, \hat{L}_m \right] = 0, \quad (\text{I.3.12})$$

то можно диагонализировать оператор $\partial/\partial t_0$ и наложить следующие дополнительные условия на статистическую сумму:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} Z_S = S Z_S \quad (\text{I.3.13})$$

с постоянными S . Интегральные представления (I.2.10) и (I.2.14) с очевидностью удовлетворяют этому соотношению с целым $S = N$. Общее решение условий Вирасоро можно разложить в *линейную комбинацию* функций Z_S с различными *постоянными* S , но в действительности такое разложение выглядит не слишком естественно⁴⁾.

³⁾ Эти уравнения выводятся из инвариантности интеграла (I.2.10) относительно замены переменной интегрирования $\phi \rightarrow \phi + \epsilon_m \phi^{m+1}$ [36]. Аналогично интеграл (I.2.6) инвариантен относительно замен $\phi \rightarrow \phi + \epsilon_{m,k} \phi^{m+1} \text{Tr} \phi^{k_1} \dots \text{Tr} \phi^{k_l}$. Получающийся набор условий является следствием уравнений (I.3.10) и очевидных соотношений

$$\frac{\partial Z}{\partial t_{\vec{k}}} = \frac{\partial^m Z}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_m}}.$$

Обратный путь от уравнений (I.3.10) к интегральному представлению (I.2.10) обсуждается в работах [8].

⁴⁾ Еще хуже то, что, хотя условия $N_i = \text{const}$ в формулах разложения типа формулы Гивенталю (см. п. II.2) являются очевидными обобщениями условия (I.3.13) (и, более того, $\sum_{i=1}^n N_i = N = S$), операторы, собственными числами которых являлись бы N_i , неизвестны. Это вызывает проблемы с обоснованием линейного разложения каждой ветви статистической суммы по функциям Гивенталю (см. далее формулу (II.2.4)) с постоянными N_i .

Отметим, что при конкретных значениях N статистическая сумма $Z_N^{(\text{matr})}$ удовлетворяет дополнительным дифференциальным уравнениям, которые следуют из того факта, что $\text{Tr } \phi^k$ при $k > N$ можно выразить через алгебраическую комбинацию $\text{Tr } \phi^k$ с $k \leq N$. Например, при $N = 1$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_k} - \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^k \right) Z_{N=1}^{(\text{matr})} = 0. \quad (\text{I.3.14})$$

Мы не накладываем эти ограничения в нашем определении общей статистической суммы ЭММКР – единственными условиями являются (I.3.10) (и (I.3.16)), которые определены ниже).

Можно искать решения системы (I.3.10) в классе формальных рядов по степеням t_k , и эти ряды будут различаться теми комбинациями t_k , которые могут находиться в знаменателях. Различные такие возможности можно проинтерпретировать как различные *фазы* матричной модели или как различные *ветви* ее статистической суммы – τ -функции $Z(t)$. Формально их можно рассматривать как различные приближения и аналитические продолжения интеграла (I.2.10). Эти различные фазы параметризуются, в частности, *различными затравочными действиями*, т.е. рассматривается интеграл (I.2.14), а не (I.2.10).

Введение затравочного действия $W(\phi) = \sum_{k=1}^{n+1} T_k \phi^k$ изменяет условия Вирасоро (I.3.10) тривиальным образом, при помощи сдвига

$$\hat{L}_m \rightarrow \hat{L}_m^W = \hat{L}_m - \sum_{k \geq 0} k T_k \frac{\partial}{\partial t_{k+m}}, \quad (\text{I.3.15})$$

но решения $Z_W(t) = e^{\mathcal{F}_W(t)/g^2}$ теперь можно искать среди формальных рядов по положительным степеням переменных t с T , возникающими в знаменателях коэффициентов этих рядов. Теперь к тому же набор условий Вирасоро надо дополнить условиями

$$\frac{\partial Z_W}{\partial T_k} + \frac{\partial Z_W}{\partial t_k} = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n+1. \quad (\text{I.3.16})$$

3.3. Условия Вирасоро и петлевые операторы. При работе с условиями Вирасоро (I.3.10) очень полезными оказываются *петлевой оператор*

$$\hat{\nabla}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{k+1}} \frac{\partial}{\partial t_k} \quad (\text{I.3.17})$$

и два дополняющих друг друга проектора $\hat{P}_z^\pm$, проецирующие на отрицательные и неотрицательные степени z ,

$$\begin{aligned} \hat{P}_z^- \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k z^k \right] &= \sum_{k < 0} \xi_k z^k, \\ \hat{P}_z^+ \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k z^k \right] &= \sum_{k \geq 0} \xi_k z^k. \end{aligned} \quad (\text{I.3.18})$$

С помощью этих операторов и производящей функции

$$v(z) = \sum_{k \geq 0} t_k z^k \quad (\text{I.3.19})$$

можно переписать полный набор условий Вирасоро (I.3.10) в виде одного *петлевого уравнения* (см. [26])

$$\hat{P}_z^- [v'(z)\rho(z)] + \rho^2(z) + g^2 \hat{\nabla}(z)\rho(z) = 0 \quad (\text{I.3.20})$$

на резольвенту (*плотность*)⁵⁾

$$\rho(z) \equiv \hat{\nabla}(z)\mathcal{F} \equiv \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{k+1}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k}, \quad \mathcal{F} = g^2 \ln Z. \quad (\text{I.3.21})$$

Уравнение (I.3.20) необходимо дополнить условием нулевой кривизны

$$\hat{\nabla}(x)\rho(z) = \hat{\nabla}(z)\rho(x). \quad (\text{I.3.22})$$

После сдвига (I.3.15) модифицированные условия Вирасоро для функции

$$\rho_W(z) = \hat{\nabla}(z)\mathcal{F}_W \quad (\text{I.3.23})$$

имеют вид

$$\hat{P}_z^- [W'(z)\rho_W(z)] = \rho_W^2(z) + g^2 \hat{\nabla}(z)\rho_W(z) + \hat{P}_z^- [v'(z)\rho_W(z)]. \quad (\text{I.3.24})$$

В нижеследующем рассмотрении мы будем использовать еще один петлевой оператор, определенный для произвольной функции $u(z)$,

$$\hat{R}_u(z) = \sum_{l \geq 0} \hat{P}_z^+ \left[\frac{u'(z)}{z^{l+1}} \right] \frac{\partial}{\partial t_l}. \quad (\text{I.3.25})$$

⁵⁾Условия Вирасоро (I.3.10) можно построить в терминах свободных полей. В самом деле, рассмотрим $U(1)$ -ток $\partial_z \phi(z)$ в теории одного свободного скалярного поля, реализованного алгеброй Гейзенберга, действующей на пространстве функций времен t_k ,

$$\partial_z \phi(z) = \frac{1}{g} v'(z) + g \hat{\nabla}(z).$$

Тогда генераторы алгебры Вирасоро задаются стандартным разложением тензора энергии-импульса

$$T(z) \equiv \frac{1}{2} :(\partial_z \phi(z))^2: = \sum \frac{L_n}{z^{n+2}}.$$

Теперь петлевое уравнение является просто требованием того, что статистическая сумма как функция времен задает вакуум по отношению к алгебре Вирасоро:

$$\hat{P}_z^- T(z)Z = 0.$$

Этот язык оказался очень эффективным при работе с различными колчанными моделями и с непрерывными пределами (см. [38], [8]).

Характерным свойством этого оператора является то, что для произвольной функции $g(t)$ времен выполняется следующее равенство:

$$\hat{P}_z^+[u'(z)\hat{\nabla}(z)g(t)] = \hat{R}_u(z)g(t). \quad (\text{I.3.26})$$

В частности, если $u(z)$ — это потенциал $v(z)$ или $W(z)$ и $g(t)$ — это $\mathcal{F}(t) = g^2 \ln Z$ или $\mathcal{F}_W(t) = \mathcal{F}(T, t) = g^2 \ln Z_W$, то для соответствующих членов в петлевых уравнениях (I.3.20) и (I.3.24) получаются соотношения

$$\hat{P}_z^-[v'(z)\rho(z)] = v'(z)\rho(z) - \hat{P}_z^+[v'(z)\rho(z)] = v'(z)\rho(z) - \hat{R}_v(z)\mathcal{F} \quad (\text{I.3.27})$$

и

$$\hat{P}_z^-[W'(z)\rho_W(z)] = W'(z)\rho_W(z) - \hat{P}_z^+[W'(z)\rho_W(z)] = W'(z)\rho_W(z) - \hat{R}_W(z)\mathcal{F}_W. \quad (\text{I.3.28})$$

Для полиномиального потенциала $W(z)$ последний член в правой части равенств является полиномом степени $n - 1$ по z . Более того, как следствие (I.3.16) получается соотношение

$$\check{R}_W(z)\mathcal{F}_W = - \sum_{k,l \geq 0} (k+l+2)T_{k+l+2}z^k \frac{\partial \mathcal{F}_W}{\partial T_l}. \quad (\text{I.3.29})$$

В дальнейшем мы будем использовать значок $\check{}$ для обозначения операторов, содержащих производные по T , а операторы, содержащие производные по t , помечаются значком $\hat{}$.

С помощью $\hat{R}_W(z)$ можно переписать (I.3.24) в наиболее удобной форме:

$$W'(z)\rho_W(z) = \rho_W^2(z) + f_W(z) + g^2\hat{\nabla}(z)\rho_W(z) + \hat{P}_z^-[v'(z)\rho_W(z)], \quad (\text{I.3.30})$$

где

$$f_W(z) = \hat{P}_z^+[W'(z)\rho_W(z)] = \hat{R}_W \ln \mathcal{F}_W. \quad (\text{I.3.31})$$

Отметим также, что

$$\hat{\nabla}(x)v(z) = \hat{P}_x^-\left[\frac{1}{z-x}\right], \quad \hat{\nabla}(x)v'(z) = -\hat{P}_x^-\left[\frac{1}{(z-x)^2}\right], \quad (\text{I.3.32})$$

и для любой функции $h(z)$ такой, что $\hat{P}_z^+[h(z)] = 0$, имеем

$$\hat{\nabla}(x)P_z^-[v'(z)h(z)] = -P_z^-\left[P_x^-\left[\frac{h(z)}{(z-x)^2}\right]\right] = \partial_x \frac{h(z) - h(x)}{z-x}, \quad (\text{I.3.33})$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$. Справедлива также следующая формула для коммутатора:

$$[\hat{\nabla}(x), \hat{R}_v(z)] = \partial_x \hat{P}_z^+\left[\frac{\hat{\nabla}(z)}{z-x}\right]. \quad (\text{I.3.34})$$

3.4. Рекуррентное решение условий Вирасоро. В этом пункте мы будем считать, что $Z_W(t)$ обладает *разложением по родам*, т.е. что

$$\ln Z_W(t) = g^{-2} \mathcal{F}_W(t) = \sum_{p \geq 0} g^{2p-2} \mathcal{F}_W^{(p)}(t) \quad (\text{I.3.35})$$

(это предположение будет обсуждаться в п. I.4.1). Статистическая сумма может быть получена одной из следующих процедур:

методом условий Вирасоро, т.е. решением петлевых уравнений (I.3.30), и

методом Гивенталья, т.е. с помощью формулы разложения (II.2.4), которая будет введена ниже в п. II.2.

В рамках метода Гивенталья произвольная фаза ЭММКР с заданным потенциалом $W(\phi)$ степени $n + 1$ описывается согласно формуле разложения (II.2.4) в терминах n гауссовых моделей. Это означает, что средние зависят от дополнительного набора переменных N_i , характеризующих конкретную седловую точку (вакуум) ЭММКР. Мы вернемся к этому вопросу более подробно в п. II.2, а здесь рассмотрим условия Вирасоро (I.3.30), которые априори задают более богатое множество возможных решений/фаз (хотя все они должны быть линейными комбинациями решений в форме Гивенталья).

Чтобы преобразовать уравнение (I.3.30) в решаемую систему рекуррентных соотношений, разложим

$$\rho_W(z|t) = g^2 \widehat{\nabla}(z) \ln Z_W(t) = \widehat{\nabla}(z) \mathcal{F}_W(t) \quad (\text{I.3.36})$$

в ряд по степеням g^2 и t :

$$\begin{aligned} \rho_W(z|t) &= \sum_{p, m \geq 0} \frac{g^{2p}}{m!} \oint \cdots \oint v(z_1) \cdots v(z_m) \rho_W^{(p|m+1)}(z, z_1, \dots, z_m), \\ f_W(z|t) &= \sum_{p, m \geq 0} \frac{g^{2p}}{m!} \oint \cdots \oint v(z_1) \cdots v(z_m) f_W^{(p|m+1)}(z|z_1, \dots, z_m). \end{aligned} \quad (\text{I.3.37})$$

Таким образом мы вводим полный набор полиплотностей

$$\rho_W^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m) = \widehat{\nabla}(z_1) \cdots \widehat{\nabla}(z_m) \mathcal{F}_W^{(p)}|_{t=0} \quad (\text{I.3.38})$$

и вспомогательных полиномов (которые задают отличие между различными фазами при заданном $W(z)$)

$$f_W^{(p|m+1)}(z|z_1, \dots, z_m) = \check{R}_W(z) \rho_W^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m). \quad (\text{I.3.39})$$

Выполнение соотношения (I.3.39) гарантирует, что условия (I.3.16) также выполняются.

Действуя на уравнение (I.3.30) оператором $\widehat{\nabla}(z_1) \dots \widehat{\nabla}(z_m)$, используя соотношение (I.3.33) и положив потом все $t_k = 0$, мы получим рекуррентное (как по p , так и по m) выражение, определяющее полиплотности $\rho_W^{(p|m)}$:

$$\begin{aligned} W'(z) \rho_W^{(p|m+1)}(z, z_1, \dots, z_m) - f_W^{(p|m+1)}(z|z_1, \dots, z_m) = \\ = \sum_q \sum_{m_1+m_2=m} \rho_W^{(q|m_1+1)}(z, z_{i_1}, \dots, z_{i_{m_1}}) \rho_W^{(p-q|m_2+1)}(z, z_{j_1}, \dots, z_{j_{m_2}}) + \\ + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\rho_W^{(p|m)}(z, z_1, \dots, z_i, \dots, z_m) - \rho_W^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m)}{z - z_i} + \\ + \widehat{\nabla}(z) \rho_W^{(p-1|m+1)}(z, z_1, \dots, z_m). \end{aligned} \quad (\text{I.3.40})$$

Совместно с (I.3.39) этого соотношения достаточно для нахождения явных выражений для всех полиплотностей через $W(z)$ и полиномы $f_W^{(p|1)}(z)$. В действительности последние (полиномы $f_W^{(p|1)}(z)$, все имеющие степень $n-1$) не являются независимыми, поскольку (I.3.39) для $m=0$,

$$f_W^{(p|1)}(z) = \check{R}_W(z) F^{(p)}[T], \quad (\text{I.3.41})$$

выполняется благодаря условию нулевой кривизны (I.3.22) и выражает все полиномы f через единственную функцию параметров T (т.е. функцию $W(z)$) и g , т.е. через препо-тенциал при $t=0$:

$$\mathcal{F}_W(t=0, g) = F[g, T] = \sum_{p=0}^{\infty} g^{2p} F^{(p)}[T]. \quad (\text{I.3.42})$$

Зависимость функции $F[g, T]$ от T_n и T_{n+1} не произвольна, поскольку условия Вирасоро $\hat{L}_{-1}^W$ и $\hat{L}_0^W$ можно корректным образом ограничить на $t=0$ и затем выразить $\partial F / \partial T_{n+1}$ и $\partial F / \partial T_n$ через $\partial F / \partial T_l$ с $l=0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial T_n} &= -\frac{1}{(n+1)T_{n+1}} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)T_{l+1} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial T_l}, \\ \frac{\partial F^{(0)}}{\partial T_{n+1}} &= \frac{1}{(n+1)T_{n+1}} \left(\frac{\partial F^{(0)}}{\partial T_0} \right)^2 - \frac{1}{(n+1)T_{n+1}} \sum_{l=0}^{n-1} lT_l \frac{\partial F^{(0)}}{\partial T_l} - \\ &\quad - \frac{nT_n}{(n+1)^2 T_{n+1}^2} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)T_{l+1} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial T_l}. \end{aligned} \quad (\text{I.3.43})$$

Из формулы (I.3.40) при $p=0$ и $m=0$ немедленно следует, что

$$\rho_W^{(0|1)}(z) = \frac{W'(z) - y_W(z)}{2}, \quad (\text{I.3.44})$$

где

$$y_W^2(z) = (W'(z))^2 - 4f_W^{(0|1)}(z). \quad (\text{I.3.45})$$

Иногда удобно представить полином $f_W^{(0|1)}(z)$ с помощью n специфических параметров $\tilde{S}_i$ (см. [39]):

$$4f_W^{(0|1)}(z) = W'(z) \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{S}_i}{z - \alpha_i}, \quad (\text{I.3.46})$$

где α_i — корни полинома $W'(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$ (так что в правой части соотношения (I.3.46) нет полюсов). Если $\tilde{S}$ не зависит от параметров T , соответствующий ограниченный препотенциал имеет особенно простой вид:

$$\tilde{F}^{(0)}[T|\tilde{S}] = - \sum_{i=1}^n \tilde{S}_i W(\alpha_i). \quad (\text{I.3.47})$$

На самом деле, поскольку $W'(\alpha_i) = 0$, второй член в правой части равенства

$$\frac{\partial \tilde{F}^{(0)}[T|\tilde{S}]}{\partial T_k} = - \sum_{i=1}^n \tilde{S}_i \alpha_i^k + \sum_{i=1}^n \frac{k \alpha_i^k}{M_i} \frac{\partial \tilde{F}^{(0)}[T|\tilde{S}]}{\partial \alpha_i}, \quad M_i \equiv W''(\alpha_i), \quad (\text{I.3.48})$$

сокращается, и действие оператора $\check{R}_W(z)$ немедленно переводит первый член в правую часть равенства (I.3.46).

Явные выражения для полиплотностей содержатся в разделе III.

4. О КОЛИЧЕСТВЕ РЕШЕНИЙ

В этом пункте мы обсудим априорный способ введения фазы и то, насколько естественно их описание, данное выше. Мы также акцентируем внимание на интересной задаче построения матрично-интегральной модели статистической суммы, определенной условиями Вирасоро (I.3.10) или (I.3.20), и обсудим кратко, в каком смысле формулы разложения Гивенталья (которые связаны с матричными интегралами и приводят к статистической сумме КИВ–ДВ) дают решение этой задачи.

Как уже было сказано ранее, существенной составной частью⁶⁾ теории матричных моделей является утверждение о важности *сдвигов* переменных t : $Z(t - T)$ и $Z(T' + t)$ с различными T и T' могут быть различными ветвями статистической суммы; более того, они ветвятся и далее, давая много (вообще говоря, бесконечно много) *подветвей*. Ниже мы объясним значение этого утверждения и опишем систему ветвей и их свойства⁷⁾.

⁶⁾ Это новое явление, которое не возникает в простом примере (I.3.1), но возникает уже при рассмотрении интегрального представления цилиндрических функций (I.3.7). В самом деле, контур интегрирования, например для функций Ганкеля, довольно причудлив, так что сдвиг переменной интегрирования переводит любую из функций Ганкеля в их линейную комбинацию.

⁷⁾ После того как это будет сделано, можно перейти к изучению *непрерывных пределов* этих ветвей, которые возникают при $N \rightarrow \infty$ и некотором заданном поведении других параметров, таким образом приходя (в зависимости от поведения этого бесконечного множества параметров) к ∞^∞ числу типов непрерывных пределов (их может быть довольно мало на нижних ветвях, и только они уже описаны в существующей литературе). Однако ниже мы ограничимся рассмотрением конечных N : классификация ветвей является необходимым условием для классификации непрерывных пределов, и уже она достаточно сложна.

Первый вопрос, к которому следует обратиться, состоит в перечислении ветвей, т.е. различных формальных рядов, являющихся решениями системы (I.3.10). Как уже упоминалось, сложности обусловлены тем, что ряды зависят от отношений переменных t и различные ветви возникают при различных комбинациях t , которые могут находиться в знаменателях. Можно выделить три уровня классификации ветвей, характеризуемых параметрами g , $W(z) = \sum T_k z^k$ и $f_W^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m | g, T)$.

4.1. Типы зависимости от g . Зависимость от g характеризует степень сингулярности, возникающую при $t_k \rightarrow 0$ или $t_k \rightarrow \infty$. С самого начала можно выделить три возможности.

1. Функция Z разлагается по неотрицательным степеням g . Лидирующий член разложения в этой фазе описывает “наивный” предел $g = 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k \geq 0} k t_k \frac{\partial Z}{\partial t_{k+m}} = 0, \quad m \geq -1. \quad (\text{I.4.1})$$

2. Функция Z разлагается по неположительным степеням g . В этой фазе лидирующий член разложения соответствует “наивному” пределу $g = \infty$ и удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\substack{a, b \geq 0 \\ a+b=m}} \frac{\partial^2 Z}{\partial t_a \partial t_b} = 0, \quad m \geq -1. \quad (\text{I.4.2})$$

3. Альтернативой по отношению к этим двум ситуациям является разложение в ряд Лорана по степеням g с бесконечным количеством как положительных, так и отрицательных степеней g (если множество степеней полубесконечно, то умножение функции Z на подходящую степень g переводит ее в один из двух описанных выше классов). Бесконечные ряды Лорана иногда можно дальше разделить на классы, если вместо функции Z рассмотреть *препотенциал* $\mathcal{F} = g^2 \ln Z$. Тогда

$$\mathcal{F}_{q,s} = \sum_{q \leq p \leq s} g^{2p} \mathcal{F}_{q,s}^{(p)} \quad (\text{I.4.3})$$

приводит к бесконечному ряду Лорана при разложении Z всякий раз, когда $q \leq 0$ и $s \geq 2$. Различные пары (q, s) приводят к различным ветвям функции Z . На самом деле решения системы (I.3.10) существуют, только если $q = -\infty$ или $s = \infty$. Если $q = -\infty$ и $s = \infty$, то трюк можно повторить и рассмотреть, к примеру, $\ln \mathcal{F}$ вместо $\mathcal{F}$, расщепляя “точку” $(-\infty, \infty)$ еще, и так далее. Также p в формуле (I.4.3) может быть, как минимум, полупелым (более общие разложения по нецелым степеням t_k еще более экзотичны, хотя и представляют интерес). Из всех возможных $\mathcal{F}_{q,s}$ в литературе наибольшее внимание уделено случаю $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_{0,\infty}$ обычно с целыми (а не полупелыми) p . В этом случае разложение (I.4.3) называется *разложением по родам*. $\mathcal{F}^{(0)}$ является *сферическим* вкладом в препотенциал $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{0,\infty}$, а p указывает род. Если ввести полупелые p , то они будут соответствовать римановым поверхностям с границами или неориентированным поверхностям (в обоих случаях существуют *дубли*, которые являются обыкновенными римановыми поверхностями с целым родом).

В большинстве фаз для заданных q и s функции $\mathcal{F}_{q,s}$, (в частности, $\mathcal{F}_{0,\infty}$) обладают дополнительными свободными параметрами, которые не фиксируются условиями Вирасоро (I.3.10). В п. I.3.4 мы обозначили эти параметры через f (на самом деле функции $f(z)$ получаются из произвольной функции $F[g, T]$ от параметров T , см. (I.3.41)). Любая линейная комбинация

$$Z\{c\} = \sum_{q,s;f} c_{q,s;f} \exp \mathcal{F}_{q,s;f}(g|t) \quad (\text{I.4.4})$$

с не зависящими от t (но, возможно, зависящими от g) коэффициентами $c_{q,s;f}$ является решением линейной системы (I.3.10), и коэффициенты $c_{q,s;f}$ нельзя убрать с помощью переопределения f . Эти коэффициенты $c_{q,s;f}$ являются аналогами коэффициентов α и β в примере (I.3.3), и их можно интерпретировать как замену контуров интегрирования циклами с комплексными коэффициентами. В дальнейшем мы не будем уделять внимание свободе, связанной с коэффициентами $c_{q,s;f}$, и ограничимся рассмотрением *генераторов D -модуля* $Z_{q,s;f} = \exp \mathcal{F}_{q,s;f}(g|t)$. Нашей следующей задачей будет объяснение происхождения свободных параметров⁸⁾ f .

4.2. Сдвиги переменных t и происхождение параметров f : сверхпростой пример. Если зависимость от g установлена, можно перейти к перечислению решений системы (I.3.10). Для того чтобы описать различные фазы, мы сдвигаем переменные $t_k \rightarrow -T_k + t_k$ в предположении, что только первые $n+1$ из параметров T_k могут быть ненулевыми.

Чтобы понять, как новые свободные параметры возникают при нетривиальном $W(z)$, поучительно будет начать с “наивного” предела $g = 0$, т.е. со статистической суммы, удовлетворяющей уравнению (I.4.1). Отметим, что она не имеет отношения к статистической сумме в “сферическом” (род $p = 0$) приближении, $\exp \mathcal{F}^{(0)}$. Вместо формулы (I.3.20) теперь мы имеем для функции

$$\rho_0(z) = \widehat{\nabla}(z) \ln Z \quad (\text{I.4.5})$$

(отметим отсутствие множителя g^2 в этом определении), взятой при $t_k = 0$ (т.е. при $v(z) = 0$), следующее уравнение:

$$\widehat{P}_z^- [W'(z) \rho_0(z)] = 0, \quad \text{т.е.} \quad \rho_0(z) = \frac{f(z)}{W'(z)}, \quad (\text{I.4.6})$$

где $\deg f(z) < \deg W'(z)$, поскольку оператор $\widehat{\nabla}(z)$ и $\rho_0(z)$ в (I.4.5) разлагаются по отрицательным степеням z . Это означает, что полином $f(z)$ степени $n-1$ является произвольным. А значит, при заданном $W(z)$ степени $n+1$ мы имеем n -параметрическое семейство уравнений, даже если все $t_k = 0$. Включение t_k эквивалентно увеличению степени $W(z)$ и, таким образом, может привести к новым произвольным полиномам $f(z)$.

⁸⁾Разделение “степеней свободы” на f и c_f не является абсолютно очевидным. Мы описали возможный подход к разделению с помощью базиса в гильбертовом пространстве решений в самом конце введения, более подробно о соответствующем операторе эволюции будет сказано ниже в разделе I.4.3.

Однако коэффициенты этих полиномов в действительности являются функциями параметров T , ограниченными дополнительными условиями (I.3.22). Формализм, который будет разработан в п. I.4.3, позволит показать, что все функции f построены из одной произвольной функции $F(T)$ от n переменных $T_0, \dots, T_{n-1}$.

В нашем сверхпростом примере все это, конечно, можно увидеть без применения какого-либо формализма, просто изучая ограниченные условия Вирасоро:

$$\sum_{k=1}^{n+1} kT_k \frac{\partial \mathcal{F}_W(t)}{\partial t_{k+m}} = \sum_{k=1}^{\infty} kt_k \frac{\partial \mathcal{F}_W(t)}{\partial t_{k+m}}, \quad m \geq -1. \quad (\text{I.4.7})$$

Полагая $t_k = 0$ для всех k , мы выражаем все производные $\frac{\partial \mathcal{F}_W}{\partial t_k} \Big|_{t=0}$ с $k \geq n$ через производные с $k < n$. Теперь рассмотрим производную по t_l от (I.4.7):

$$\sum_{k=1}^{n+1} kT_k \frac{\partial^2 \mathcal{F}_W(t)}{\partial t_{k+m} \partial t_l} = l \frac{\partial \mathcal{F}_W(t)}{\partial t_{l+m}} + \sum_{k=1}^{\infty} kt_k \frac{\partial \mathcal{F}_W(t)}{\partial t_{k+m} \partial t_l}, \quad m \geq -1. \quad (\text{I.4.8})$$

Положив $t_k = 0$ для всех k , выразим все вторые производные $\frac{\partial^2 \mathcal{F}_W}{\partial t_k \partial t_l} \Big|_{t=0}$ с $k \geq n$ через те, для которых $k < n$. Используя симметрию между k и l , приходим к выводу, что из всех вторых производных при $t = 0$ только $\frac{\partial^2 \mathcal{F}_W}{\partial t_k \partial t_l} \Big|_{t=0}$ при $k, l < n$ не определяются из условий Вирасоро. Продолжая далее таким же образом, можно доказать, что ограниченные условия Вирасоро определяют все производные, кроме $\frac{\partial^p \mathcal{F}_W}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_p}} \Big|_{t=0}$ при $k_1, \dots, k_p < n$ для любых p . Это означает, что единственная свобода, остающаяся после того, как наложены ограниченные условия Вирасоро, заключается в выборе произвольной функции $F[T] = \mathcal{F}_W(t = 0)$, зависящей от n переменных $T_1, \dots, T_{n-1}$ (поскольку зависимость от T_n и T_{n+1} фиксируется условиями $\hat{L}_{-1}^W(t = 0)Z_W(t = 0) = \hat{L}_0^W(t = 0)Z_W(t = 0) = 0$, см. (I.3.43)).

То же самое должно произойти при $g \neq 0$ с более интересными препотенциалами $\mathcal{F}_W^{(p)}$. Они зависят от выбора $W(z)$ и от дополнительных функций типа $f(z)$. Все эти функции, которые становятся все более и более сложными по мере увеличения рода p и при увеличении сложности корреляционных функций (что эквивалентно увеличению числа ненулевых инфинитезимальных переменных t_k), на самом деле построены из производных по параметрам T от одной произвольной функции переменных $T_0, \dots, T_{n-1}$, т.е. от ограниченного (вычисленного при $t_k = 0$) препотенциала $F(T|g)$.

4.3. Оператор эволюции и базис в гильбертовом пространстве решений.

В этом пункте мы утверждаем, что для любого $W(z)$, т.е. для любого выбора переменных T , существует оператор $\check{U}_W(t)$, который переводит *любую* функцию $Z[T]$ от $T_0, \dots, T_{n-1}$ (с заданной зависимостью от T_n и T_{n+1}) в функцию $Z_W(t) = \check{U}_W(t)Z[T]$, которая удовлетворяет условиям Вирасоро $L_m^W(t)Z_W(t) = 0$, $m \geq -1$. Более того, если $Z[T] = \sum_a c_a Z^{(a)}[T]$, то $Z_W(t) = \sum_a c_a Z_W^{(a)}(t)$. Построение является непосредственным обобщением построения из п. I.4.2 на случай $g \neq 0$.

Именно, при заданных T мы воспользуемся условиями Вирасоро $\hat{L}_m^W Z(t) = 0$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n+1} kT_k \frac{\partial Z}{\partial t_{k+m}} = \sum_{k=1}^{\infty} kt_k \frac{\partial Z}{\partial t_{k+m}} + g^2 \sum_{a+b=m} \frac{\partial^2 Z}{\partial t_a \partial t_b}, \quad m \geq -1, \quad (\text{I.4.9})$$

и их кратными производными по t , для того чтобы рекуррентно выразить $\frac{\partial^p Z}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_p}} \Big|_{t=0}$ при всех $0 \leq k_i < \infty$ через $g^{2s} \frac{\partial^{p+s} Z}{\partial T_{l_1} \dots \partial T_{l_{p+s}}} \Big|_{t=0}$ при всех $0 \leq l_j < n$:

$$\frac{\partial^p Z}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_p}} \Big|_{t=0} = \sum_{l_1, \dots, l_{p+s}} g^{2s} \mathcal{D}_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_{p+s}} \frac{\partial^{p+s} Z}{\partial T_{l_1} \dots \partial T_{l_{p+s}}} \Big|_{t=0}. \quad (\text{I.4.10})$$

Это несколько более громоздкая процедура, чем в случае $g = 0$, но тем не менее она является явной, и сумма по s конечна, пробегая значения от 0 до целой части от $\left\{ \frac{k}{n-1} \right\}$: выражение для $\frac{\partial Z}{\partial t_k} \Big|_{t=0}$ содержит $\frac{\partial^2 Z}{\partial t_a \partial t_b} \Big|_{t=0}$, но только с $a, b \leq k - n - 1$; далее, выражение для $\frac{\partial^2 Z}{\partial t_a \partial t_b} \Big|_{t=0}$ содержит $\frac{\partial^3 Z}{\partial t_a \partial t_b \partial t_c} \Big|_{t=0}$ с $a, b, c \leq k - 2n - 2$ и так далее.

Теперь мы можем определить операторы

$$\check{D}_{k_1 \dots k_p}^{(p)} = \sum_{0 \leq l_1, \dots, l_{p+s} \leq n-1} g^{2s} \mathcal{D}_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_{p+s}} \frac{\partial^{p+s} Z}{\partial T_{l_1} \dots \partial T_{l_{p+s}}} \Big|_{t=0}. \quad (\text{I.4.11})$$

Поскольку эти операторы происходят из условий Вирасоро, они удовлетворяют некоторым очевидным соотношениям (уравнениям (I.4.14), см. ниже). Построим теперь оператор эволюции $\check{U}_W(t)$ в виде ряда по этим операторам $\check{D}$:

$$\check{U}_W(t) = 1 + t_k \check{D}_k^{(1)} + \frac{1}{2} t_k t_l \check{D}_{kl}^{(2)} + \frac{1}{6} t_k t_l t_m \check{D}_{klm}^{(3)} + \dots \quad (\text{I.4.12})$$

Тот факт, что $Z[T]$ удовлетворяет уравнениям

$$\hat{L}_m^W(t) Z_W(t) = \hat{L}_m^W(t) \check{U}_W(t) Z[T] = 0, \quad (\text{I.4.13})$$

или просто, что

$$\begin{aligned} \hat{L}_m^W(t) \check{U}_W(t) &= \left(\sum_k k T_k \check{D}_{k+m}^{(1)} + \sum_{a+b=m} \check{D}_{ab}^{(2)} \right) + \\ &+ \sum_l t_l \left(l \check{D}_{l+m}^{(1)} + \sum_k k T_k \check{D}_{k+m,l}^{(2)} + \sum_{a+b=m} \check{D}_{abl}^{(3)} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l_1, l_2} t_{l_1} t_{l_2} \left(l_1 \check{D}_{l_1+m, l_2}^{(2)} + l_2 \check{D}_{l_2+m, l_1}^{(2)} + \right. \\ &\left. + \sum_k k T_k \check{D}_{k+m, l_1, l_2}^{(3)} + \sum_{a+b=m} \check{D}_{abl_1 l_2}^{(4)} \right) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.4.14})$$

эквивалентен утверждению, что все линейные комбинации операторов в скобках обращаются в нуль, и это и есть уравнения на операторы $\check{D}$. Мы доказали, что оператор эволюции один и тот же для всех значений произвольных параметров f (или для любой функции $Z[T]$), если потенциал $W(z)$ фиксирован. Это доказывает, что если $Z[T] = \sum_a c_a Z^{(a)}[T]$, то $Z_W(t) = \sum_a c_a Z_W^{(a)}(t)$, и означает, что “орбиты” оператора эволюции полностью параметризуются потенциалом $W(z)$.

II. КОНКРЕТНЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. ГАУССОВА СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА

Гауссова статистическая сумма (фаза) выделена существованием *диаграммного представления* корреляционных функций и, следовательно, возможностью проинтерпретировать все формулы с помощью комбинаторики ленточных графов. Это делает саму гауссову статистическую сумму важной специальной функцией, даже без учета связи с общей статистической суммой ЭММКР, одной из ветвей которой она является. Более того, формулы разложения типа формулы Гивенталья (см. далее п. II.2) представляют различные ветви как полилинейные комбинации гауссовых статистических сумм. По этим причинам гауссова статистическая сумма $Z_G^M(t|N)$ требует особого внимания, и мы рассматриваем ее отдельно, хотя существенная часть использованного ниже формализма является частным случаем общего формализма, предназначенного для негауссовых моделей.

Гауссова матричная модель (фаза) соответствует потенциалу $W(x) = (M/2)x^2$ (т.е. $T_k = (M/2)\delta_{k,2}$, где M – некоторое число) и седловой точке (см. п. I.2.1) $\phi_0 = 0$,

$$\begin{aligned} Z_G^M(t|N) &= \frac{1}{\text{Vol}_{U(N)}} \int D\phi \exp\left(-\frac{M}{2g} \text{Tr} \phi^2 + \frac{1}{g} \sum_{k=0}^{\infty} t_k \text{Tr} \phi^k\right) = \\ &= \left(\frac{2\pi g}{M}\right)^{N^2/2} \sum_{\vec{k}} \frac{t_{k_1} \dots t_{k_m}}{g^m m!} \langle \text{Tr} \phi^{k_1} \dots \text{Tr} \phi^{k_m} \rangle_G. \end{aligned} \quad (\text{II.1.1})$$

Здесь скобки обозначают среднее по случайным матрицам с гауссовой мерой, $\exp\{-(M/2g) \text{Tr} \phi^2\}$.

Каждая корреляционная функция в правой части равенства является суммой по диаграммам Фейнмана–т Хоофта (*ленточных графов*) с m вершинами с валентностью $k_1, \dots, k_m$. Каждая вершина дает множитель g^{-1} , каждый пропагатор, обозначаемый двойной линией (полосой ленточного графа), дает вклад g/M , и каждая замкнутая линия (компонента границы ленточного графа) дает множитель $N = S/g$, где $S \equiv gN$ – это константа связи 'т Хоофта⁹⁾. Препотенциал $\mathcal{F}_G = g^2 \ln Z_G^M$ является аналогичной

⁹⁾Заметим, что может иметь смысл рассмотреть S , зависящие от g ,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} S_k g^k.$$

Однако разложение в формуле (II.1.2) определено для $S = gN$, т.е. можно записать

$$\mathcal{F}_G(t|S) = \sum_{p=0}^{\infty} g^{2p} \hat{\mathcal{F}}_G^{(p)}(t)$$

с

$$\hat{\mathcal{F}}_G^{(0)}(t) = \mathcal{F}_G^{(0)}(t|S_0), \quad \hat{\mathcal{F}}_G^{(1)}(t) = \mathcal{F}_G^{(1)}(t|S_0) + S_1 \frac{\partial}{\partial S_0} \mathcal{F}_G^{(0)}(t|S_0)$$

и т.д.

суммой, но только по *связным* диаграммам. Если перейти от переменных N, g к переменным S, g , то отдельные члены разложения

$$\mathcal{F}_G(t|S) = \sum_{p=0}^{\infty} g^{2p} \mathcal{F}_G^{(p)}(t|S) \quad (\text{II.1.2})$$

будут суммами по связным ленточным графам рода p

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_G^{(p)}(t|S) &= F^{(p)}(S) + \sum_{\vec{k}} \frac{t_{k_1} \cdots t_{k_m}}{m!} \langle \langle \text{Tr } \phi^{k_1} \cdots \text{Tr } \phi^{k_m} \rangle \rangle^{(p)} = \\ &= F_G^{(p)}(S) + \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m!} \oint \cdots \oint v(z_1) \cdots v(z_m) \rho_G^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m), \end{aligned} \quad (\text{II.1.3})$$

где $F_G^{(p)}(S)$ – это не зависящий от t квазиклассический препотенциал

$$F_G^{(p)}(S) = -\frac{S^2}{2} \ln \frac{M}{2\pi S} \delta_{p,0} - (\ln \text{Vol}_{U(N)})^{(p)} (1 - \delta_{p,0}) \quad (\text{II.1.4})$$

и гауссовы *полиплотности* имеют вид

$$\rho_G^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m) = \langle \langle T(\phi|z_1) \cdots T(\phi|z_m) \rangle \rangle_G^{(p)}, \quad (\text{II.1.5})$$

где $T(\phi|z) \equiv \text{Tr} \frac{1}{z-\phi}$ и $\langle \langle \dots \rangle \rangle^{(p)}$ обозначают вклад *связных* диаграмм Фейнмана–'т Хоофта рода p в гауссово среднее с весом $\exp(-(M/2) \text{tr } \phi^2)$, *не зависящим* от g и N . Формально размер матрицы теперь равен S , а не N : $\text{tr } I = S$ (соответственно мы заменяем обозначение Tr на tr). Это исчисление оправдывается теоремой Эйлера, утверждающей, что

$$V - E + F = 2 - 2h, \quad (\text{II.1.6})$$

где V – количество вершин, E – количество ребер, F – количество граней, h – род кривой.

Гауссовы полиплотности $\rho_G^{(p|m)}$ можно получать рекуррентно по m и затем по p , решая условия Вирасоро (I.3.10), записанные в терминах препотенциалов $\mathcal{F}$,

$$M \frac{\partial \mathcal{F}_G^{(p)}}{\partial t_{m+2}} = \sum_{\substack{a+b=m \\ a,b \geq 0}} \sum_{\substack{q+r=p \\ q,r \geq 0}} \frac{\partial \mathcal{F}_G^{(q)}}{\partial t_a} \frac{\partial \mathcal{F}_G^{(r)}}{\partial t_b} + \sum_{\substack{a+b=m \\ a,b \geq 0}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_G^{(p-1)}}{\partial t_a \partial t_b} + \sum_{k \geq 0} k t_k \frac{\partial \mathcal{F}_G^{(p)}}{\partial t_{k+m}}, \quad m \geq -1. \quad (\text{II.1.7})$$

Суммируя по m с весом z^{-m-2} , для производящей функции

$$\begin{aligned} \rho_G(z|t) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{k+1}} \frac{\partial \mathcal{F}_G(t|\nu)}{\partial t_k} = \langle \langle T(\phi|z) \rangle \rangle_G = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} g^{2p} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \oint \cdots \oint v(z_1) \cdots v(z_m) \rho_G^{(p|m+1)}(z, z_1, \dots, z_m) \end{aligned} \quad (\text{II.1.8})$$

получаем уравнение (ср. с (I.3.30))

$$M(z\rho_G(z|t) - S) = \rho_G^2(z|t) + g^2\widehat{\nabla}(z)\rho_G(z|t) + \widehat{P}_z^-[v'(z)\rho_G(z|t)], \quad (\text{II.1.9})$$

где

$$\widehat{P}_z^-[v'(z)\rho_G(z|t)] = v'(z)\rho_G(z|t) - \left\langle\left\langle \text{tr} \frac{v'(\phi) - v'(z)}{\phi - z} \right\rangle\right\rangle_G, \quad (\text{II.1.10})$$

в то время как

$$\widehat{P}_z^-[z\rho_G(z|t)] = z\rho_G(z|t) - \langle \text{tr} I \rangle = z\rho_G(z|t) - S. \quad (\text{II.1.11})$$

Положив $v(z) = 0$ в уравнении (II.1.9), получим для плотностей рекуррентное по p соотношение. Аналогичные рекуррентные соотношения для полиплотностей при $m > 1$ можно получить с помощью действия оператора $\widehat{\nabla}(z_1) \dots \widehat{\nabla}(z_{m-1})$ на (II.1.9), используя соотношения (I.3.33) и положив в конце $v(z) = 0$. Эта двойная рекуррентная процедура (с рекурсией по p и m) позволяет получить любую конкретную функцию $\rho^{(p|m)}$. Явные выражения для некоторых частных случаев можно найти в разделе III.

Первая (род ноль, одноточечная) плотность, удовлетворяющая соотношению

$$M(z\rho_G^{(0|1)}(z) - S) = (\rho_G^{(0|1)}(z))^2, \quad (\text{II.1.12})$$

— это знаменитое полукруговое распределение (см. [18])

$$\rho_G^{(0|1)}(z) = \frac{M}{2} \left(z - \sqrt{z^2 - \frac{4S}{M}} \right) = \frac{Mz - y_G(z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k S^{k+1}}{M^k z^{2k+1}} = \frac{S}{z} + \frac{S^2}{Mz^3} + \dots \quad (\text{II.1.13})$$

Она оказывается производящей функцией для *чисел Каталана*

$$c_k = \frac{4^k \Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(1/2) (k + 1)!}, \quad (\text{II.1.14})$$

которые задают количества деревьев с k листьями.

Двухточечная плотность удовлетворяет уравнению

$$(Mz - 2\rho_G^{(0|1)}(z))\rho_G^{(0|2)}(z, x) = \partial_x \frac{\rho_G^{(0|1)}(z) - \rho_G^{(0|1)}(x)}{z - x}, \quad (\text{II.1.15})$$

так что

$$\begin{aligned} \rho_G^{(0|2)}(z, x) &= \frac{1}{2(z-x)^2} \left(-1 + \frac{4MS}{y_G(z)y_G(x)} \right) = \\ &= \frac{1}{2x^2} \left(-1 + \frac{Mz}{y_G(z)} \right) + \frac{1}{x^3} \frac{Mz^2 - 2MS - zy_G(z)}{y_G(z)} + O\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.1.16})$$

Первые два члена в правой части равенства являются производящими функциями для корреляционных функций

$$\frac{1}{z^{k+1}} \langle\langle \text{tr} \phi \text{ tr} \phi^k \rangle\rangle_G^{(0)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{z^{k+1}} \langle\langle \text{tr} \phi^2 \text{ tr} \phi^k \rangle\rangle_G^{(0)}. \quad (\text{II.1.17})$$

Вторую из этих производящих функций можно получить другим способом, дифференцируя $\rho_G^{(0|1)}$ по $T_2 = M/2$ при условии, что

$$\frac{\partial S}{\partial T_2} = 0 \quad \text{для гауссовой модели} \quad (\text{II.1.18})$$

(заметим, что это утверждение неверно для общей ЭММКР из п. I.3.4 даже для квадратичного потенциала $W(z) = Mz^2/2$, если $S \neq \text{const}$, т.е. диаграммная техника неприменима даже для квадратичных потенциалов).

Наряду с гауссовыми полиплотностями

$$\rho_G^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m) = \left\langle \left\langle \text{Tr} \frac{1}{z_1 - \phi} \dots \text{Tr} \frac{1}{z_m - \phi} \right\rangle \right\rangle_G^{(p)} \quad (\text{II.1.19})$$

можно рассматривать их обратные преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} \eta_G^{(p|m)}(x_1, \dots, x_m) &= \oint \dots \oint e^{x_1 z_1 + \dots + x_m z_m} \rho_G^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m) dz_1 \dots dz_m = \\ &= \left\langle \left\langle \text{Tr} e^{x_1 \phi} \dots \text{Tr} e^{x_m \phi} \right\rangle \right\rangle_G^{(p)} \end{aligned} \quad (\text{II.1.20})$$

и их производящие функции, например

$$\begin{aligned} \eta_G(x|t) &= \oint e^{xz} \rho(z|t) dz = \sum_{p,m=0}^{\infty} \frac{g^{2p}}{m!} \oint \dots \oint dz dz_1 \dots dz_m \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} dx_1 \dots dx_m \times \\ &\times e^{-x_1 z_1 - \dots - x_m z_m} \bar{v}(z_1) \dots \bar{v}(z_m) \eta_G^{(p|m+1)}(x, x_1, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (\text{II.1.21})$$

Прямое преобразование Лапласа преобразует функцию $\eta_G(x)$ назад в функцию $\rho_G(z)$:

$$\rho_G(z|t) = \int_0^{\infty} e^{-xz} \eta_G(x|t) dx \quad (\text{II.1.22})$$

и

$$\rho_G^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} e^{-x_1 z_1 - \dots - x_m z_m} \eta_G^{(p|m)}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m. \quad (\text{II.1.23})$$

Гауссовы (одноточечные) плотности удовлетворяют *правилу сумм*, которое говорит о полном количестве “лепестковых” диаграмм, дающих вклад в $\langle \text{Tr} \phi^{2k} \rangle$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \oint z^{2k} \rho^{(p|1)}(z) = (2k-1)!! \left(\frac{g}{m} \right)^k. \quad (\text{II.1.24})$$

Правило сумм (II.1.24) является частным случаем (при $N = 1$) более общего тождества [40], [41], которое задает производящую функцию для всех (для любого рода) гауссовых одноточечных функций (плотностей),

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2 M/g)^k}{(2k-1)!!} \langle \text{Tr } \phi^{2k} \rangle_G = \frac{1}{2x^2} \left(\left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^N - 1 \right) = N + N^2 x^2 + \frac{(2N^3 + N)x^4}{3} + \\ + \frac{(5N^4 + 10N^2)x^6}{15} + \frac{(14N^5 + 70N^3 + 21N)x^8}{105} + \\ + \frac{(42N^6 + 420N^4 + 483N^2)x^{10}}{945} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{II.1.25})$$

здесь $(2k-1)!! = 2^k \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(1/2)}$, так что $(-1)!! = 1$.

Гауссову статистическую сумму $Z_G^M(t|N)$ можно также представить как член семейства моделей Концевича [12]–[17], [6]: она совпадает с гауссовой моделью Концевича с логарифмическим потенциалом [15]

$$\int dH_{N \times N} \exp \left(- \sum_k t_k \text{Tr } M^k \right) = (2\pi)^{N^2/2} \frac{\int dX_{n \times n} \det(I - X/H) e^{-\text{Tr } X^2/2}}{\int dX_{n \times n} e^{-\text{Tr } X^2/2}}, \quad (\text{II.1.26})$$

где времена t_k выражаются через внешнюю матрицу в интеграле Концевича,

$$t_k = \frac{1}{k} \text{Tr } H^{-k} + \frac{1}{2} \delta_{k,2},$$

причем размеры матриц $n \times n$ в правой части равенства и $N \times N$ в левой части являются абсолютно независимыми параметрами. Полиплотности $\rho^{(p|m)}$ также можно получить из квадратичной модели Концевича (мы отложим обсуждение этого вопроса до появления отдельной публикации, посвященной матричным моделям типа моделей Концевича).

Ожидается, что трехточечные функции для рода нуль, в частности $\rho^{(0|3)}(z_1, z_2, z_3)$, удовлетворяют уравнениям Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ) [42]–[44].

2. ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ТИПА ФОРМУЛЫ ГИВЕНТАЛЯ ДЛЯ НЕГАУССОВЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СУММ КИВ–ДВ

Сдвиг переменных t переводит интеграл (I.2.10) в интеграл

$$Z_{N,W}^{(\text{matr})}(t) = \frac{1}{\text{Vol}_{U(N)}} \int d\phi \exp \left(-\frac{1}{g} \text{Tr } W(\phi) \right) \exp \left(\frac{1}{g} \sum_k t_k \text{Tr } \phi^k \right). \quad (\text{II.2.1})$$

На первый взгляд может показаться, что в этом определении нет произвола и свободным параметрам взяться неоткуда. Однако это неверно, если разрешить любые аналитические продолжения по переменным T (коэффициентам $W(\phi)$). Один из способов построения решений линейной системы условий Вирасоро (I.3.10) в виде формальных рядов

(по степеням t_k) состоит в аналитически продолженном методе перевала. Различные генераторы D -модуля представляются разложениями вокруг различных седловых точек $\phi = \phi_0$ таких, что $W'(\phi_0) = 0$. Если полином

$$W'(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \quad (\text{II.2.2})$$

имеет корни α_i , тогда, поскольку ϕ_0 – это матрицы, определенные по модулю $U(N)$ -сопряжений (с помощью которых можно диагонализировать любую матрицу и поменять порядок ее собственных значений), различные седловые точки представимы в виде

$$\phi_0 = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_1; \alpha_2, \dots, \alpha_2; \dots; \alpha_n, \dots, \alpha_n), \quad (\text{II.2.3})$$

где α_i появляется N_i раз, $\sum_{i=1}^n N_i = N$. Поскольку мы работаем с D -модулем, нет необходимости считать эти N_i неотрицательными целыми: в окончательных выражениях (таких как формулы для полиплотностей и препотенциалов) их можно заменить на комплексные числа. Более того, N_i могут зависеть от g и от T_k (т.е. от формы потенциала $W(\phi)$) с единственными ограничениями, следующими из дополнительных условий (I.3.16). Таким образом, ограниченная свобода выбора функций $N_i(g, W)$ соответствует свободным параметрам f в $\exp \mathcal{F}_{q,s;f}$.

Вклад отдельного экстремума ϕ_0 (который характеризуется числами N_i) задается формулой разложения типа формулы Гивентала¹⁰⁾, выражающей его через произведение n гауссовых статистических сумм, каждая со своими N_i и $M_i = W''(\alpha_i) = \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)$:

$$Z_{N,W}^{(\text{matr})}(t|\phi_0) = \frac{\prod_{i=1}^n e^{-N_i W(\alpha_i)} \text{Vol}_{U(N_i)}}{\text{Vol}_{U(N)}} \prod_{i < j} \alpha_{ij}^{2N_i N_j} \prod_{i < j} \hat{\mathcal{O}}_{ij} \prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{O}}_i \prod_{i=1}^n Z_G^{M_i}(t^{(i)}|N_i), \quad (\text{II.2.4})$$

¹⁰⁾ Она выводится так же, как в [23] – с помощью перехода от интеграла по собственным значениям матрицы ϕ размера $N \times N$ к n интегралам по собственным значениям матриц ϕ_i с размерами $N_i \times N_i$ (каждая получается сдвигом на $\alpha_i \times I$, это просто замена переменных в интеграле (II.2.1)), а конкретнее – при представлении квадрата определителя Вандермонда в формуле (I.2.8) в виде

$$\begin{aligned} \Delta_N^2(\phi) &\equiv \prod_{a < b}^N (\phi_a - \phi_b)^2 = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{a < b}^{N_i} (\phi_{i,a} - \phi_{i,b})^2 \right) \prod_{i < j}^n \left(\prod_{a=1}^{N_i} \prod_{b=1}^{N_j} (\alpha_{ij} + \phi_{i,a} - \phi_{j,b})^2 \right) = \\ &= \prod_{i=1}^n \Delta_{N_i}^2(\phi_i) \prod_{i < j}^n \alpha_{ij}^{2N_i N_j} \exp \left(2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^{m-1}}{m \alpha_{ij}^m} \text{Tr}_i \text{Tr}_j (\phi_i \otimes I_j - I_i \otimes \phi_j)^m \right) = \\ &= \prod_{i=1}^n \Delta_{N_i}^2(\phi_i) \prod_{i < j}^n \alpha_{ij}^{2N_i N_j} \exp \left(2 \sum_{k,l=0}^{\infty} (-)^k \frac{(k+l-1)!}{\alpha_{ij}^{k+l} k! l!} \text{Tr}_i \phi_i^k \text{Tr}_j \phi_j^l \right). \end{aligned}$$

Несмотря на техническую простоту такого преобразования, его действительное квантово-теоретико-полевое значение (точное вложение картановской $SU(N)$ τ -функции в $S(\bigotimes_{i=1}^n U(N_i))$ τ -функцию) остается недостаточно изученным, в частности неизвестно эффективное преобразование непосредственно в терминах матриц (но не в терминах промежуточных интегралов по собственным значениям), из-за чего неясно, каким образом это преобразование обобщается на некартановские модели.

где операторы имеют вид

$$\hat{\mathcal{O}}_{ij} = \exp \left(2 \sum_{k,l=0}^{\infty} (-)^k \frac{(k+l-1)!}{\alpha_{ij}^{k+l} k! l!} \frac{\partial}{\partial t_k^{(i)}} \frac{\partial}{\partial t_l^{(j)}} \right), \quad \alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j, \quad (\text{II.2.5})$$

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \exp \left(- \sum_{k \geq 3} \frac{W^{(k)}(\alpha_i)}{k!} \frac{\partial}{\partial t_k^{(i)}} \right) \quad (\text{II.2.6})$$

$(W^{(k)}(x) = \partial_x^k W(x))$. Соотношение между временами в двух частях равенства (II.2.4) задается формулой

$$\sum_{k=0}^{\infty} t_k \left(\sum_{i=1}^n \text{Tr}_i (\alpha_i + \phi_i)^k \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k^{(i)} \text{Tr}_i \phi_i^k \right) \quad (\text{II.2.7})$$

с произвольными матрицами ϕ_i размера $N_i \times N_i$.

Оператор

$$\hat{\nabla}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{k+1}} \frac{\partial}{\partial t_k}$$

является линейной комбинацией операторов

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}(z)^{(i)} &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{k+1}} \frac{\partial}{\partial t_k^{(i)}} : \\ \hat{\nabla}(z) &= \sum_{i=1}^n \hat{\nabla}(z - \alpha_i)^{(i)}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.8})$$

Действуя операторами $\hat{\nabla}(z)$ на формулу разложения (II.2.4), можно выразить негауссовы полиплотности через гауссовы. Отметим, что оператор

$$\hat{\nabla}(z) = \sum_{k \geq 0} z^{-k-1} \frac{\partial}{\partial t_k}$$

коммутирует с $\hat{\mathcal{O}}_{ij}$ и $\hat{\mathcal{O}}_i$ и не действует на коэффициенты $M_i = W''(\alpha_i) = \prod_{j \neq i} \alpha_{ij}$, которые не зависят от времен t . Согласно (II.2.7) и (II.2.8) под действием оператора $\hat{\nabla}(z)$ на отдельную гауссову составляющую

$$g^2 \hat{\nabla}(z) \ln Z_G^{[M_i]}(t^{(i)} | N_i) = \rho_G^{[M_i]}(z - \alpha_i) \quad (\text{II.2.9})$$

возникает соответствующая гауссова плотность, но со сдвинутыми аргументами. В результате, например, имеем

$$\begin{aligned} \rho_W^{(\text{matr})}(z) &= \hat{\nabla}(z) \ln Z_W^{(\text{matr})} = \\ &= \frac{\prod_{i < j}^n \hat{\mathcal{O}}_{ij} \prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{O}}_i \left(\sum_{i=1}^n \rho_G^{[M_i]}(z - \alpha_i) \right) \prod_{i=1}^n Z_G^{[M_i]}(t^{(i)} | N_i)}{\prod_{i < j}^n \hat{\mathcal{O}}_{ij} \prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{O}}_i \prod_{i=1}^n Z_G^{[M_i]}(t^{(i)} | N_i)}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.10})$$

Конечно, $\widehat{\mathcal{O}}_i$ и $\widehat{\mathcal{O}}_{ij}$ действуют как на Z_G , так и на ρ_G . Аналогично выражения для плотности $\rho_W(z_1, \dots, z_m) = \widehat{\nabla}(z_1) \dots \widehat{\nabla}(z_m) \ln Z_W$ содержат вставки в числителе сумм по разбиениям набора $\{z_1, \dots, z_m\}$ на n поднаборов (некоторые из них могут быть пустым множеством, тогда соответствующие ρ не имеют аргументов и равны единице)

$$\sum_{\{m\} \rightarrow \{m_1\}, \dots, \{m_n\}} \left(\prod_{i=1}^n \rho_G^{[M_i]}(z_{j_1}, \dots, z_{j_{m_i}}) \right). \quad (\text{II.2.11})$$

Выражение (II.2.10) и его обобщение с помощью (II.2.11) достаточно сложны. Роль знаменателя в них, как обычно, заключается в том, чтобы избавиться от несвязных диаграмм Фейнмана–т Хоофта, включая несвязные вклады от различных гауссовых составляющих. Первые вклады в (II.2.11) выглядят следующим образом (мы хотим напомнить, что $\rho_G(z) = \langle\langle T(z|\phi) \rangle\rangle_G$, и ввести очевидное обозначение $z_i = z - \alpha_i$ для сдвинутых переменных z и ϕ_i для матричных переменных размера $N_i \times N_i$):

$$\begin{aligned} \rho_W(z) &= \rho_W^{(\text{matr})}(z), \\ \rho_W^{(\text{matr})}(z) &= \sum_i \left\langle\left\langle T(z_i|\phi_i) \exp\left(-\frac{1}{g} \text{Tr}_i \widetilde{W}_i(\phi_i)\right) \right\rangle\right\rangle_G^{[M_i, N_i]} + \\ &+ \sum_{j \neq i} \frac{2N_j}{\alpha_{ij}} \left\langle\left\langle T(z_i|\phi_i) \text{Tr}_i \phi_i \exp\left(-\frac{1}{g} \text{Tr}_i \widetilde{W}_i(\phi_i)\right) \right\rangle\right\rangle_G^{[M_i, N_i]} + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.2.12})$$

Здесь

$$\widetilde{W}_i(\phi_i) \equiv W(\alpha_i + \phi_i) - W(\alpha_i) - \frac{M_i \phi_i^2}{2} \quad (\text{II.2.13})$$

и структуру других корреляционных функций можно понять, поскольку любой оператор $\widehat{\mathcal{O}}_{ij}$ вносит под знак корреляционной функции ряд

$$\exp \sum_{k=1}^{\infty} \left((-)^{k-1} \frac{2}{k \alpha_{ij}^k} \text{Tr}_i \text{Tr}_j (\phi_i - \phi_j)^k \right) = 1 + \frac{2}{\alpha_{ij}} (N_j \text{Tr}_i \phi_i - N_i \text{Tr}_j \phi_j) + \dots \quad (\text{II.2.14})$$

Лидирующие вклады в левую и правую части первого равенства в (II.2.12) равны соответственно

$$\frac{1}{2} \left(W'(z) - \sqrt{(W'(z))^2 - 4W'(z) \sum_i \frac{\widetilde{S}_i}{z_i}} \right) = \sum_i \frac{\widetilde{S}_i}{z_i} + O(\widetilde{S}^2) \quad (\text{II.2.15})$$

(см. (I.3.44) и (I.3.46)) и

$$\sum_i \frac{M_i}{2} \left(z_i - \sqrt{z_i^2 - \frac{4gN_i}{M_i}} \right) = \sum_i \frac{gN_i}{z_i} + O(g^2 N^2) \quad (\text{II.2.16})$$

(см. (II.1.13)), т.е. в лидирующем приближении (ср. с [39])

$$\widetilde{S}_i = gN_i + O(g^2 N^2) = S_i + O(S^2). \quad (\text{II.2.17})$$

Величины $\rho_W(z|t)$ и $f_W(z|t)$ очень похожи на нетривиальные *гауссовы* средние, соответственно:

$$\langle\langle T(\phi|z) \rangle\rangle_W = \langle\langle T(\phi|z) e^{-\text{tr } \widetilde{W}(\phi)} \rangle\rangle_G \quad (\text{II.2.18})$$

и

$$\langle\langle R_W(\phi|z) \rangle\rangle_W = \langle\langle R_W(\phi|z) e^{-\text{tr } \widetilde{W}(\phi)} \rangle\rangle_G \quad (\text{II.2.19})$$

с

$$T(\phi|z) = \text{Tr} \frac{1}{z - \phi}, \quad R_W(\phi|z) = \text{Tr} \frac{W'(z) - W'(\phi)}{z - \phi} \quad (\text{II.2.20})$$

и $\widetilde{W}(z) = W(z) - W(\alpha) - \frac{M}{2}(z - \alpha)^2$. Проблема, однако, состоит в том, что эти средние плохо определены, поскольку существуют различные седловые точки α , которые являются корнями $W'(z)$ (эти седловые точки могут быть как минимумами, так и максимумами функции $W(z)$) с различными значениями $M = W''(\alpha)$. Выражения (II.2.18), (II.2.19) могут иметь смысл только для определенных $\widetilde{W}$, связанных с одним из корней. Таким образом, они описывают только специальные, *пертурбативные* ветви статистической суммы, т.е. случай, когда $N_i = N$, а все остальные $N_j = 0$. Для того чтобы описать общие *непертурбативные* ветви, необходимо вернуться к формулам (II.2.10) и (II.2.11).

Что касается *пертурбативных* фаз, то в каждой из них можно воспользоваться разложением (II.1.3) для гауссова препотенциала

$$\mathcal{F}_G^{(\cdot)} = F_G^{(\cdot)} + \oint v \rho_G^{(\cdot|1)} + \frac{1}{2!} \oint \oint v v \rho_G^{(\cdot|2)} + \dots \quad (\text{II.2.21})$$

и определить разложение для негауссова потенциала с помощью простого сдвига $v(z) \rightarrow -\widetilde{W}(z) + v(z)$, т.е. пересуммируя диаграммы:

$$\mathcal{F}_W^{(\cdot)} = F_W^{(\cdot)} + \oint v \rho_W^{(\cdot|1)} + \frac{1}{2!} \oint \oint v v \rho_W^{(\cdot|2)} + \dots, \quad (\text{II.2.22})$$

так что

$$\begin{aligned} F_W^{(\cdot)} &= F_G^{(\cdot)} + \oint \widetilde{W} \rho_G^{(\cdot|1)} + \frac{1}{2!} \oint \oint \widetilde{W} \widetilde{W} \rho_G^{(\cdot|2)} + \dots, \\ \rho_W^{(\cdot|1)} &= \rho_G^{(\cdot|1)} + \oint \widetilde{W} \rho_G^{(\cdot|2)} + \frac{1}{2!} \oint \oint \widetilde{W} \widetilde{W} \rho_G^{(\cdot|3)} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \langle\langle \text{Tr } \phi^k \exp(-\text{Tr } \widetilde{W}(\phi)) \rangle\rangle_G \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \langle\langle \text{Tr } \phi^k \rangle\rangle_W, \\ \rho_W^{(\cdot|2)} &= \rho_G^{(\cdot|2)} + \oint \widetilde{W} \rho_G^{(\cdot|3)} + \frac{1}{2!} \oint \oint \widetilde{W} \widetilde{W} \rho_G^{(\cdot|4)} + \dots \equiv \\ &\equiv \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{1}{z_1^{k_1+1} z_2^{k_2+1}} \langle\langle \text{Tr } \phi^{k_1} \text{Tr } \phi^{k_2} \rangle\rangle_W. \end{aligned} \quad (\text{II.2.23})$$

3. ПРЕПОТЕНЦИАЛ КИВ–ДВ

Как мы уже упоминали в разделе I, для заданного W решения условий Вирасоро, которые обладают разложением по родам, параметризуются произвольной функцией $F[g, T]$ первых n времен $T_0, \dots, T_{n-1}$ и g (зависимость от T_n и T_{N+1} предписывается соотношениями (I.3.43)). Чтобы соответствовать произвольным $F[g, T]$, переменные $S_i = gN_i$ в формулах разложения (II.2.4) должны также быть T - и g -зависимыми (хотя их возможные зависимости от T и g жестко ограничены).

Препотенциал КИВ–ДВ [45]–[47] определяется как $F[g, T]$ с *постоянными*

$$S_i = \text{const.} \quad (\text{II.3.1})$$

Таким образом, он непосредственно задается формулой (II.2.4), но остается неясным, какого рода дополнительные ограничения нужно добавить к условиям Вирасоро (I.3.10), для того чтобы восстановить ограничение (II.3.1). Однако, как обнаружили Р. Дийкграаф и К. Вафа [25], существует новое представление, а именно представление в терминах теории Зайберга–Виттена [35], [48]–[52]. Явные выражения для препотенциала КИВ–ДВ

$$\mathcal{F}_{\text{DV}}[T|S] = \sum_{p \geq 0} g^{2p} \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(p)}[T|S] \quad (\text{II.3.2})$$

можно найти далее в разделе III.

В рамках теории Зайберга–Виттена–Дийкграафа–Вафы не зависящие от T параметры S_i можно выразить через $\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} S_i &= \oint_{A_i} y_W(z) dz, \\ y_W^2(z) &= [W'(z)]^2 - 4f_W^{\text{DV}}(z), \\ f_W^{\text{DV}}(z) &= \check{R}_W(z) \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0)}[T|S] = \sum_{k, l \geq 0} (k + l + 2) T_{k+l+2} z^k \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0)}}{\partial T_l}, \\ \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0)}}{\partial S_i} &= \oint_{B_i} y_W(z) dz. \end{aligned} \quad (\text{II.3.3})$$

Теперь мы хотим перейти к вычислению препотенциала КИВ–ДВ с использованием формул разложения (II.2.4). Начнем с определения действия оператора

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \exp \left(- \sum_{k=3}^{n+1} \frac{W^{(k)}(\alpha_i)}{k!} \frac{\partial}{\partial t_k} \right) = \exp \left(- M_i \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k^{(i)}}{(k+2)} \frac{\partial}{\partial t_{k+2}} \right), \quad (\text{II.3.4})$$

где

$$\begin{aligned}
 M_i &= W^{(2)}(\alpha_i) = W''(\alpha_i) = (n+1)T_{n+1} \prod_{j \neq i}^n \alpha_{ij}, \\
 2M_i \sigma_1^{(i)} &= W^{(3)}(\alpha_i) = 2M_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_{ij}}, \\
 6M_i \sigma_2^{(i)} &= W^{(4)}(\alpha_i) = 6M_i \sum_{\substack{j < k \\ j, k \neq i}} \frac{1}{\alpha_{ij} \alpha_{ik}}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 (p+1)!M_i \sigma_p^{(i)} &= W^{(p+2)}(\alpha_i) = (p+1)!M_i \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_p \\ j_1, \dots, j_p \neq i}} \frac{1}{\alpha_{ij_1} \dots \alpha_{ij_p}},
 \end{aligned} \tag{II.3.5}$$

на отдельную гауссову статистическую сумму $Z_G^{M_i}(t|N_i)$:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{O}}_i Z_G^{M_i}(t|N_i)|_{t=0} &= \left[1 + \left(-\frac{W^{(4)}(\alpha_i)}{4!} \langle \text{tr } \phi^4 \rangle_G^{M_i} + \frac{[W^{(3)}(\alpha_i)]^2}{2!(3!)^2} \langle (\text{tr } \phi^3)^2 \rangle_G^{M_i} \right) + \right. \\
 &+ \left(-\frac{W^{(6)}(\alpha_i)}{6!} \langle \text{tr } \phi^6 \rangle_G^{M_i} + \frac{W^{(3)}(\alpha_i)W^{(5)}(\alpha_i)}{3!5!} \langle \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^5 \rangle_G^{M_i} + \right. \\
 &+ \frac{[W^{(4)}(\alpha_i)]^2}{2!(4!)^2} \langle (\text{tr } \phi^4)^2 \rangle_G^{M_i} - \frac{[W^{(3)}(\alpha_i)]^2 W^{(4)}(\alpha_i)}{2!(3!)^2 4!} \langle (\text{tr } \phi^3)^2 \text{tr } \phi^4 \rangle_G^{M_i} + \\
 &+ \left. \frac{[W^{(3)}(\alpha_i)]^4}{4!(3!)^4} \langle (\text{tr } \phi^3)^4 \rangle_G^{M_i} \right) + \\
 &+ \left(-\frac{W^{(8)}(\alpha_i)}{8!} \langle \text{tr } \phi^8 \rangle_G^{M_i} + \frac{W^{(3)}(\alpha_i)W^{(7)}(\alpha_i)}{3!7!} \langle \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^7 \rangle_G^{M_i} + \right. \\
 &+ \frac{W^{(4)}(\alpha_i)W^{(6)}(\alpha_i)}{4!6!} \langle \text{tr } \phi^4 \text{tr } \phi^6 \rangle_G^{M_i} + \frac{[W^{(5)}(\alpha_i)]^2}{2!(5!)^2} \langle (\text{tr } \phi^5)^2 \rangle_G^{M_i} - \\
 &- \frac{[W^{(3)}(\alpha_i)]^2 W^{(6)}(\alpha_i)}{2!(3!)^2 4!} \langle (\text{tr } \phi^3)^2 \text{tr } \phi^6 \rangle_G^{M_i} - \frac{[W^{(4)}(\alpha_i)]^3}{3!(4!)^3} \langle (\text{tr } \phi^4)^3 \rangle_G^{M_i} + \\
 &+ \left. \frac{[W^{(3)}(\alpha_i)]^3 W^{(5)}(\alpha_i)}{3!(3!)^3 5!} \langle (\text{tr } \phi^3)^3 \text{tr } \phi^5 \rangle_G^{M_i} \right) + \dots \Big] Z_G^{M_i}(t|N_i)|_{t=0}.
 \end{aligned} \tag{II.3.6}$$

Этот формальный ряд становится плохо определенным, когда некоторые $\alpha_{ij} = 0$, т.е. когда мы рассматриваем разложение вокруг вырожденного экстремума $\alpha_i = \alpha_j$. В таких случаях (для таких $W(z)$) нужно применять другой, существенно негауссов формализм, использующий выражения типа (для $N = 1$)¹¹⁾

$$\int_C d\phi \exp \left(-h\phi^p + \sum_{k=1}^{\infty} t_k \phi^k \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{\text{Sh}_k(t)}{ph^{\frac{k+1}{p}}} \Gamma_{C(p)} \left(\frac{k+1}{p} \right), \tag{II.3.7}$$

¹¹⁾ Контуры интегрирования под знаком суммы зависят от p из-за замены переменной интегрирования, которая зависит от p .

где $\text{Sh}_k(t)$ – это полиномы Шура

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \phi^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Sh}_k(t) \phi^k \quad (\text{II.3.8})$$

и гамма-функция для цепи C определяется равенством

$$\Gamma_C(z) = \int_C \phi^{z-1} e^{-\phi} d\phi. \quad (\text{II.3.9})$$

Обобщение этого вычисления на случай $N \neq 1$ осуществляется с помощью негауссовых полиплотностей ρ для $W(z) = W_p(z) = hz^p$. Отметим, что связь цепи C с функцией F_{W_p} и полиномами f_{W_p} достаточно нетривиальна: например, наивный выбор $f^{(0|1)} = \nu = \text{const}$ приводит к тому, что корреляционная функция

$$\langle \text{tr } \phi^k \rangle_{W_p}^{(0)} = \oint_{\infty} z^k \rho_{W_p}^{(0|1)}(z|f = \text{const}) dz = -\frac{1}{2} \oint_{\infty} z^k \sqrt{p^2 z^{2p-2} - 4S} dz \quad (\text{II.3.10})$$

не обращается в нуль, только если $k+1$ является *нечетным* кратным $p-1$, т.е. если $k = (2n-1)(p-1)-1$, хотя для $N=1$ она должна равняться $\Gamma_C\left(\frac{k+1}{p}\right)$. (В гауссовом случае $p=2$ это ограничение на C заключается в том, что $\Gamma_C(z) \neq 0$ только при полуцелых, а не при целых значениях аргумента.) Отметим также, что при $p \neq 2$ выбор $f^{(0|1)} = \nu = \text{const}$ никоим образом не является выделенным, поскольку не существует M и поэтому естественного определения параметра ν (который в гауссовом случае равен gN/M).

В дальнейшем мы будем рассматривать невырожденную ситуацию, когда все $\alpha_{ij} \neq 0$. При использовании формулы разложения (II.2.4) даже при $t=0$ члены вида

$$\frac{W^{(3)}(\alpha_i)}{3!} \frac{\partial}{\partial t_3}$$

в $\hat{\mathcal{O}}_W(\alpha_i)$, которые не дают вклада в (II.3.6), нужно учитывать, поскольку в комбинации с $\hat{\mathcal{O}}_{ij}$ они могут дать нетривиальные вклады даже при $t=0$.

Для использования формул (II.2.4) при явных вычислениях мы введем *двойную* градуировку препотенциала – по степеням g и S :

$$\mathcal{F} = \sum_{p \geq 0} \mathcal{F}^{(p)} = \sum_{\substack{p \geq 0 \\ m \geq 1}} \mathcal{F}^{(p|m)} + \tilde{\mathcal{F}} = \sum_{m \geq 1} \mathcal{F}_m + \tilde{\mathcal{F}}, \quad (\text{II.3.11})$$

где $\mathcal{F}^{(p|m)}$ и $\mathcal{F}_m$ обозначают вклады с m -й степенью по параметрам S для рода p и всех родов, соответственно. $\tilde{\mathcal{F}}$ – это вклад, сингулярный по S , вид которого можно извлечь из формулы (I.2.9). Явные выражения (которые содержат конечное количество членов) можно найти для каждой конкретной величины $\mathcal{F}^{(p|m)}|_{t=0}$. Формулы разложения (II.2.4) выражают $\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(p|m)}|_{t=0}$ через $\mathcal{F}_G^{(p'|m')}$ при $p' \leq p$, $m' \leq m$ и некоторых

$t \neq 0$; в конечном итоге времена, входящие в потенциал, нужно положить равными константам,

$$t_k^{(i)} = -T_k^{(i)} = -\frac{M_i \sigma_{k-2}^{(i)}}{k}, \quad 3 \leq k \leq n+1, \quad (\text{II.3.12})$$

но перед этим нужно взять по этим временам производные.

Формула разложения (II.2.4) гласит, что

$$\exp\left(\frac{1}{g^2} \mathcal{F}_{\text{DV}} \Big|_{t=0}\right) = \exp\left(\frac{1}{g^2} \mathcal{F}_{\text{DV}}^{\text{pert}}\right) \exp(-(S\partial)) \exp(g^2(c\partial\partial)) \exp\left(\frac{1}{g^2} F_G\right) \Big|_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}}, \quad (\text{II.3.13})$$

где мы используем следующие обозначения: для “нормировочной” части препотенциала –

$$\exp\left(\frac{1}{g^2} \mathcal{F}_{\text{DV}}^{\text{pert}}\right) = \frac{1}{\prod_i \text{Vol } U(S_i/g)} \prod_i \frac{e^{-S_i W(\alpha_i)}}{M_i^{S_i^2/2g^2}} \prod_{i < j} \alpha_{ij}^{2S_i S_j / g^2}, \quad (\text{II.3.14})$$

для суммы гауссовых препотенциалов –

$$F_G = \sum_{m \geq 1} F_m = \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_G^{M_i}(t^{(i)}) \quad (\text{II.3.15})$$

и для операторов –

$$\begin{aligned} (S\partial) &= \sum_{i \neq j}^n \left(\sum_{k \geq 1}^{\infty} \frac{2S_i}{k \alpha_{ij}^k} \frac{\partial}{\partial t_k^{(j)}} \right), \\ (c\partial\partial) &= \sum_{i \neq j}^n \left(\sum_{k, l \geq 1}^{\infty} \frac{(-)^{k+1} (k+l-1)!}{k! l! \alpha_{ij}^{k+l}} \frac{\partial}{\partial t_k^{(i)}} \frac{\partial}{\partial t_l^{(j)}} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.3.16})$$

Отметим, что оператор $(c\partial\partial)$ обращает в нуль любой отдельный препотенциал F_m и действует нетривиально только на билинейные комбинации F (и комбинации старших степеней).

Подставляя (см. [23]) формулу

$$\begin{aligned} \ln(\text{Vol } U(S/g)) &= -\frac{S^2}{2g^2} \ln\left(\frac{S}{g}\right) + \frac{1}{12} \ln\left(\frac{S}{g}\right) + \frac{3S^2}{4g^2} - \\ &\quad - \frac{S}{2g} \ln(2\pi) - \zeta'(-1) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_{2k}}{4k(k-1)} \frac{g^{2k-2}}{S^{2k-2}} \end{aligned} \quad (\text{II.3.17})$$

в (II.3.13), получаем (разлагая экспоненты в обеих частях равенства и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях S и g^2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1^{\text{DV}}|_{t=0} &= - \sum_i S_i W(\alpha_i) + F_1|_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}}, \\
\mathcal{F}_2^{\text{DV}}|_{t=0} &= -\frac{1}{2} \sum_{i < j} (S_i^2 - 4S_i S_j + S_j^2) \ln \alpha_{ij} - \frac{3}{4} \sum_i S_i^2 + \\
&\quad + \left[F_2 - (S\partial)F_1 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{g^{2k-2}}{k!} (c\partial\partial)^k F_1^2 \right]_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}}, \\
\mathcal{F}_3^{\text{DV}}|_{t=0} &= \left[F_3 - (S\partial)F_2 + \frac{1}{2} (S\partial)^2 F_1 + \right. \\
&\quad + \sum_{k \geq 1} \frac{g^{2k-2}}{k!} (c\partial\partial)^k [F_1 F_2 - F_1 (S\partial)F_1] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 2} \frac{g^{2k-4}}{k!} ((c\partial\partial)^k F_1^3 - 3F_1 (c\partial\partial)^k F_1^2) \right]_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}}. \tag{II.3.18}
\end{aligned}$$

В разделе III представлены некоторые старшие члены разложения.

В суммах, оставшихся в формулах (II.3.18), вклад в $\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(p|m)}|_{t=0}$ дает только конечное число членов с заданными p и m , причем необходимо учесть нетривиальную зависимость от g^2 выражения $F_m = \sum_i F_m(S_i|t^{(i)})$:

$$\begin{aligned}
F_m(S|t) &= S^m \sum_{p \geq 0} g^{2p} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_s \\ l_1, \dots, l_s}} \frac{t_{k_1}^{l_1} \dots t_{k_s}^{l_s}}{l_1! \dots l_s!} \langle\langle k_1^{l_1}, \dots, k_s^{l_s} \rangle\rangle^{(p)} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{M^{\frac{1}{2}(l_1 k_1 + \dots + l_s k_s)}} \delta\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^s l_j (k_j - 2) = m + 2p - 2\right) \right]. \tag{II.3.19}
\end{aligned}$$

Здесь мы ввели краткое обозначение для комбинаторных величин (задающих число соответствующих ленточных графов)

$$\langle\langle k_1^{l_1}, \dots, k_s^{l_s} \rangle\rangle^{(p)} = M^{\frac{1}{2}(l_1 k_1 + \dots + l_s k_s)} \langle\langle (\text{tr } \phi^{k_1})^{l_1} \dots (\text{tr } \phi^{k_s})^{l_s} \rangle\rangle_G^{(p)}. \tag{II.3.20}$$

Дельта-функция в формуле (II.3.19) ограничивает возможное число ненулевых $t_k = T_k$, $3 \leq k \leq n+1$, при заданных m , p , t_1 и t_2 . Однако, поскольку мы в конце концов собираемся положить $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$, их необходимо устранить, применяя операторы $(S\partial)$ и $(c\partial\partial)$, которые дадут дополнительные степени S и g^2 , соответственно. Таким образом, только конечное количество членов в разложении (II.3.19) дает вклад в заданную величину $\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(p|m)}|_{t=0}$. Для изучения этих правил отбора полезно ввести обозначение $\mathcal{N}_{k_j}$ для l_j в формуле (II.3.20). Тогда дельта-функция в формуле (II.3.19) задает следующее условие: должно выполняться равенство

$$\sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_1 + 2m + 4p - 4, \tag{II.3.21}$$

для того чтобы корреляционная функция

$$\langle\langle\{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots\}\rangle\rangle = \langle\langle(\text{tr } \phi)^{\mathcal{N}_1} (\text{tr } \phi^2)^{\mathcal{N}_2} \dots\rangle\rangle \quad (\text{II.3.22})$$

не обращалась в нуль.

Рассмотрим, например, $m = 1$. Поскольку

$$\mathcal{F}_1^{\text{DV}}|_{t=0} + \sum_i S_i W(\alpha_i) = F_1|_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}} \quad (\text{II.3.23})$$

и в формуле (II.3.19)

$$\sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_1 + 4p - 2, \quad (\text{II.3.24})$$

то при $p = 0$ в правой части равенства (II.3.20) нет ненулевых членов, в то время как при $p = 1$ мы имеем условие $2\mathcal{N}_4 + \mathcal{N}_3 = 2$ (т.е. либо $\mathcal{N}_4 = 1$, либо $\mathcal{N}_3 = 2$), а при $p = 2$ условие имеет вид $6\mathcal{N}_8 + 5\mathcal{N}_7 + 4\mathcal{N}_6 + 3\mathcal{N}_5 + 2\mathcal{N}_4 + \mathcal{N}_3 = 6$. Таким образом, для вкладов нулевого и первого порядков имеем следующие явные выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0|1)}|_{t=0} &= - \sum_i S_i W(\alpha_i), \\ \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(1|1)}|_{t=0} &= \sum_i \frac{S_i}{M_i} \left(- \frac{\langle\langle 4^1 \rangle\rangle^{(1)}}{4} \sigma_2^{(i)} + \frac{\langle\langle 3^2 \rangle\rangle^{(1)}}{2! \cdot 3^2} [\sigma_1^{(i)}]^2 \right) = \\ &= \sum_i \frac{S_i}{M_i} \left(- \frac{\sigma_2^{(i)}}{4} + \frac{3[\sigma_1^{(i)}]^2}{2! \cdot 3^2} \right) = \sum_i \frac{S_i}{12M_i} (2[\sigma_1^{(i)}]^2 - 3\sigma_2^{(i)}). \end{aligned} \quad (\text{II.3.25})$$

Другие явные выражения представлены в разделе III.

III. ТАБЛИЦЫ

1. ГАУССОВА СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА

1.1. Первые обобщенные числа Каталана. В таблице представлено количество графов рода p , построенных по одной $2k$ -валентной вершине, т.е. коэффициенты раз-

ложения коррелятора $\langle \text{Tr } \phi^{2k} \rangle$ по родам ($m = (2k - 1)!!$ – общее количество $2k$ -валентных графов):

$2k$	m	p					
		0	1	2	3	4	5
0	1	1	–	–	–	–	–
2	1	1	–	–	–	–	–
4	3	2	1	–	–	–	–
6	15	5	10	–	–	–	–
8	105	14	70	21	–	–	–
10	945	42	420	483	–	–	–
12	$945 \cdot 11$	132	2310	6468	1485	–	–
14	$945 \cdot 11 \cdot 13$	429	12012	66066	56628	–	–
16	$945 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15$	1430	60060	570570	1169740	225225	–
18	$945 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17$	4862	291720	4390386	17454580	12317877	–
20	$945 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$	16796	1385670	31039008	211083730	351683046	59520825

1.2. Первые гауссовы плотности (производящие функции обобщенных чисел Каталана); $\nu = gN/M$.

Род $p = 0$:

$$\frac{1}{M} \rho^{(0|1)}(z) = \frac{z - y(z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k \Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(1/2)(k + 1)!} \frac{\nu^{k+1}}{z^{2k+1}},$$

где

$$y^2(z) = y_G^2(z) = z^2 - 4\nu, \quad \nu = \frac{gN}{M} = \frac{S}{M}.$$

Род $p = 1$:

$$M \rho^{(1|1)}(z) = \frac{\nu}{y^5(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k \Gamma(k + 5/2)}{\Gamma(5/2)k!} \frac{\nu^{2k+1}}{z^{2k+5}}.$$

Род $p = 2$:

$$\begin{aligned} M^3 \rho^{(2|1)}(z) &= \frac{21\nu(z^2 + \nu)}{y^{11}(z)} = 21 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4^k \Gamma(k + 11/2)}{\Gamma(11/2)k!} + \frac{4^{k-1} \Gamma(k + 9/2)}{\Gamma(11/2)(k-1)!} \right) \frac{\nu^{2k+1}}{z^{2k+9}} = \\ &= \frac{\nu}{z^9} + \frac{14}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k-1} \Gamma(k + 9/2)(5k + 18)}{\Gamma(9/2)(k-1)!} \frac{\nu^{2k+1}}{z^{2k+9}}. \end{aligned}$$

Род $p = 3$:

$$\begin{aligned}
 M^5 \rho^{(3|1)}(z) &= \frac{11\nu(135z^4 + 558\nu z^2 + 158\nu^2)}{y^{17}(z)} = \\
 &= 11 \sum_{k=0}^{\infty} \left(135 \cdot \frac{4^k \Gamma(k+17/2)}{\Gamma(17/2)k!} + 558 \cdot \frac{4^{k-1} \Gamma(k+15/2)}{\Gamma(17/2)(k-1)!} + \right. \\
 &\quad \left. + 158 \cdot \frac{4^{k-2} \Gamma(k+13/2)}{\Gamma(17/2)(k-2)!} \right) \frac{\nu^{2k+1}}{z^{2k+13}} = \\
 &= \frac{\nu}{z^{13}} + \frac{\nu^2}{z^{15}} + \frac{44}{13 \cdot 15} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^{k-2} \Gamma(k+13/2)(ak^2 + bk + c)}{\Gamma(13/2)(k-1)!} \frac{\nu^{2k+1}}{z^{2k+13}}, \\
 ak^2 + bk + c &= 135 \cdot 16(k+13/2)(k+15/2) + 558 \cdot 4k(k+15/2) + 158k(k-1).
 \end{aligned}$$

Произвольный род $p > 0$:

$$M^{2p-1} \cdot \rho^{(p|1)}(z) = \frac{\nu Q_{p-1}(z^2|\nu)}{y^{6p-1}(z)}, \quad (\text{III.1.1})$$

где

$$Q_{p-1}(z^2|\nu) = \frac{(4p-1)!!}{2p+1} z^{2p-2} + \dots$$

— это полином степени $p-1$ по z^2 :

$$\begin{aligned}
 Q_0(x^2|\nu) &= \nu, \\
 Q_1(x^2|\nu) &= 21(x^2 + \nu), \\
 Q_2(x^2|\nu) &= 11(135x^4 + 558x^2\nu + 158\nu^2), \\
 Q_3(x^2|\nu) &= 143(1575x^6 + 13689x^4\nu + 18378x^2\nu^2 + 2339\nu^3), \\
 Q_4(x^2|\nu) &= 88179(675x^8 + 9660x^6\nu + 28764x^4\nu^2 + 18908x^2\nu^3 + 1354\nu^4), \\
 Q_5(x^2|\nu) &= 111435(218295x^{10} + 4534875x^8\nu + 23001156x^6\nu^2 + 34604118x^4\nu^3 + \\
 &\quad + 13447818x^2\nu^4 + 617926\nu^5).
 \end{aligned}$$

1.3. Первые рекуррентные соотношения для гауссовых полиплотностей:

$$\begin{aligned}
 y(z_1) \hat{\rho}^{(0|2)}(z_1, z_2) &= \partial_{z_2} \frac{\hat{\rho}^{(0|1)}(z_1) - \hat{\rho}^{(0|1)}(z_2)}{z_1 - z_2}, \\
 y(z_1) \hat{\rho}^{(1|1)}(z_1) &= \hat{\rho}^{(0|2)}(z_1, z_1), \\
 y(z_1) \hat{\rho}^{(0|3)}(z_1, z_2, z_3) &= 2\hat{\rho}^{(0|2)}(z_1, z_2) \hat{\rho}^{(0|2)}(z_1, z_3) + \partial_{z_2} \frac{\hat{\rho}^{(0|2)}(z_1, z_3) - \hat{\rho}^{(0|2)}(z_2, z_3)}{z_1 - z_2} + \\
 &\quad + \partial_{z_3} \frac{\hat{\rho}^{(0|2)}(z_1, z_2) - \hat{\rho}^{(0|2)}(z_2, z_3)}{z_1 - z_3}, \\
 y(z_1) \hat{\rho}^{(1|2)}(z_1, z_2) &= 2\hat{\rho}^{(0|2)}(z_1, z_2) \hat{\rho}^{(1|1)}(z_1) + \hat{\rho}^{(0|3)}(z_1, z_1, z_2) + \\
 &\quad + \partial_{z_2} \frac{\hat{\rho}^{(1|1)}(z_1) - \hat{\rho}^{(1|1)}(z_2)}{z_1 - z_2}, \\
 y(z_1) \hat{\rho}^{(2|1)}(z_1) &= (\hat{\rho}^{(1|1)}(z_1))^2 + \hat{\rho}^{(1|2)}(z_1, z_1).
 \end{aligned}$$

1.4. Первые гауссовы полиплотности: аналитические выражения; $\nu = gN/M$, $y(z) = z^2 - 4\nu$. Первые гауссовы полиплотности (одно-, двух-, трех-, ... точечные функции).

Род $p = 0$:

$$\frac{1}{M}\rho^{(0|1)}(z) = \frac{z - y(z)}{2},$$

$$\rho^{(0|2)}(z_1, z_2) = \frac{1}{2(z_1 - z_2)^2} \left(\frac{z_1 z_2 - 4\nu}{y(z_1)y(z_2)} - 1 \right),$$

причем при $z_1 = z_2$ нет особенности, и при совпадающих переменных двухточечная функция рода нуль имеет вид

$$\rho^{(0|2)}(z, z) = \frac{\nu}{y^4(z)},$$

$$M\rho^{(0|3)}(z_1, z_2, z_3) = \frac{2\nu}{y(z_1)y(z_2)y(z_3)} \left(\frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)y^2(z_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)y^2(z_2)} + \frac{1}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)y^2(z_3)} \right) =$$

$$= \frac{2\nu(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + 4\nu)}{y^3(z_1)y^3(z_2)y^3(z_3)},$$

$$M^2\rho^{(0|4)}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\nu}{y(z_1)^5 y(z_2)^5 y(z_3)^5 y(z_4)^5} \times$$

$$\times \left(2[4z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4) + \right.$$

$$+ 3z_1 z_2 z_3 z_4 (z_1^2 z_2^2 z_3^2 + z_1^2 z_2^2 z_4^2 + z_1^2 z_3^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 z_4^2)] -$$

$$- 8[(z_1^2 z_2^2 z_3^2 + z_1^2 z_2^2 z_4^2 + z_1^2 z_3^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 z_4^2) \times$$

$$\times (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4) +$$

$$+ 6z_1 z_2 z_3 z_4 (z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_1^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 + z_2^2 z_4^2 + z_3^2 z_4^2) - 6z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2] \nu -$$

$$- 32[2(z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_1^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 + z_2^2 z_4^2 + z_3^2 z_4^2) \times$$

$$\times (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4) +$$

$$+ 3(z_1^2 z_2^2 z_3^2 + z_1^2 z_2^2 z_4^2 + z_1^2 z_3^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 z_4^2) - 9z_1 z_2 z_3 z_4 (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)] \nu^2 +$$

$$+ 128[5(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4) -$$

$$- 12z_1 z_2 z_3 z_4] \nu^3 + 512[3(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) -$$

$$- 8(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4)] \nu^4 - 12288 \nu^5 \Big).$$

Род $p = 1$:

$$M\rho^{(1|1)}(z) = \frac{\nu}{y^5(z)},$$

$$M^2\rho^{(1|2)}(z_1, z_2) = \frac{\nu}{y^7(z_1)y^7(z_2)} \left(z_1 z_2 (5z_1^4 + 4z_1^3 z_2 + 3z_1^2 z_2^2 + 4z_1 z_2^3 + 5z_2^4) + \right.$$

$$+ 4\nu[z_1^4 - 13z_1 z_2 (z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + z_2^4] +$$

$$\begin{aligned}
& + 16\nu^2(-z_1^2 + 13z_1z_2 - z_2^2) + 320\nu^3), \\
M^3\rho^{(1|3)}(z_1, z_2, z_3) = & \frac{\nu}{y(z_1)^9y(z_2)^9y(z_3)^9} \Big(6[5z_1^2z_2^2z_3^2(z_1^5z_2^5 + z_1^5z_3^5 + z_2^5z_3^5 + \\
& + z_1z_2z_3(z_1^3z_2^4 + z_1^4z_2^3 + z_1^3z_3^4 + z_1^4z_3^3 + z_2^3z_3^4 + z_2^4z_3^3)) + \\
& + 4z_1^4z_2^4z_3^4(z_1z_2^3 + z_1^3z_2 + z_1z_3^3 + z_1^3z_3 + z_2z_3^3 + z_2^3z_3 + z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2) + \\
& + 3z_1^5z_2^5z_3^5(z_1 + z_2 + z_3)] + 4[5(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)(z_1^6z_2^6 + z_1^6z_3^6 + z_2^6z_3^6) - \\
& - 108z_1^2z_2^2z_3^2(z_1^5z_2^3 + z_1^3z_2^5 + z_1^5z_3^3 + z_1^3z_3^5 + z_2^5z_3^3 + z_2^3z_3^5 + \\
& + z_1z_2^2z_3^5 + z_1z_2^5z_3^2 + z_1^2z_2z_3^5 + z_1^5z_2z_3^2 + z_1^2z_2^5z_3 + z_1^5z_2^2z_3) - \\
& - 96z_1^3z_2^3z_3^3(z_1z_2z_3^3 + z_1z_2^3z_3 + z_1^3z_2z_3 + z_1^2z_2^3 + z_1^3z_2^2 + \\
& + z_1^2z_3^3 + z_1^3z_2^3 + z_2^2z_3^3 + z_3^2z_2^3) - 180z_1^4z_2^4z_3^4(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) + \\
& + 12z_1^2z_2^2z_3^2(z_1^4z_2^4 + z_1^4z_3^4 + z_2^4z_3^4)]\nu + 16[-(z_1^6z_2^6 + z_1^6z_3^6 + z_2^6z_3^6) - \\
& - 21(z_1^5z_2^5(z_1^2 + z_2^2) + z_1^5z_3^5(z_1^2 + z_3^2) + z_2^5z_3^5(z_2^2 + z_3^2) + \\
& + z_1z_2z_3(z_1^3z_2^6 + z_1^6z_2^3 + z_1^3z_3^6 + z_1^6z_3^3 + z_2^3z_3^6 + z_2^6z_3^3)) - \\
& - 27z_1z_2z_3(z_1^4z_2^5 + z_1^5z_2^4 + z_1^4z_3^5 + z_1^5z_3^4 + z_2^4z_3^5 + z_2^5z_3^4) - \\
& - 30z_1^2z_2^2z_3^2(z_1^4z_2^2 + z_1^2z_2^4 + z_1^4z_3^2 + z_1^2z_3^4 + z_2^4z_3^2 + z_2^2z_3^4) + \\
& + 132z_1^3z_2^3z_3^3(z_1^3 + z_2^3 + z_3^3) + \\
& + 156z_1^2z_2^2z_3^2(z_1z_2^5 + z_1^5z_2 + z_1z_3^5 + z_1^5z_3 + z_2z_3^5 + z_2^5z_3) + \\
& + 378z_1^3z_2^3z_3^3(z_1z_2^2 + z_1^2z_2 + z_1z_3^2 + z_1^2z_3 + z_2z_3^2 + z_2^2z_3) + \\
& + 396z_1^2z_2^2z_3^2(z_1^3z_2^3 + z_1^3z_3^3 + z_2^3z_3^3) + 234z_1^4z_2^4z_3^4]\nu^2 + \\
& + 192[-(z_1^4z_2^4(z_1^2 + z_2^2) + z_1^4z_3^4(z_1^2 + z_3^2) + z_2^4z_3^4(z_2^2 + z_3^2)) + \\
& + 60z_1^2z_2^2z_3^2(z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2) + \\
& + 9(z_1^3z_2^3(z_1^4 + z_2^4) + z_1^3z_3^3(z_1^4 + z_3^4) + z_2^3z_3^3(z_2^4 + z_3^4) + \\
& + z_1z_2z_3(z_1z_2^6 + z_1^6z_2 + z_1z_3^6 + z_1^6z_3 + z_2z_3^6 + z_2^6z_3)) + 27(z_1^5z_2^5 + z_1^5z_3^5 + z_2^5z_3^5) - \\
& - 156z_1^2z_2^2z_3^2(z_1z_2^3 + z_1^3z_2 + z_1z_3^3 + z_1^3z_3 + z_2z_3^3 + z_2^3z_3) + \\
& + 48z_1^2z_2^2z_3^2(z_1^4 + z_2^4 + z_3^4) + \\
& + 13z_1z_2z_3(z_1^2z_2^5 + z_1^5z_2^2 + z_1^2z_3^5 + z_1^5z_3^2 + z_2^2z_3^5 + z_2^5z_3^2) - \\
& - 144z_1^3z_2^3z_3^3(z_1 + z_2 + z_3) + \\
& + 31z_1z_2z_3(z_1^4z_2^3 + z_1^3z_2^4 + z_1^4z_3^3 + z_1^3z_3^4 + z_2^4z_3^3 + z_2^3z_3^4)]\nu^3 - \\
& - 256[3(z_1^4z_2^4 + z_1^4z_3^4 + z_2^4z_3^4) + \\
& + 6(z_1^2z_2^2(z_1^4 + z_2^4) + z_1^2z_3^2(z_1^4 + z_3^4) + z_2^2z_3^2(z_2^4 + z_3^4)) + \\
& + 129(z_1^3z_2^3(z_1^2 + z_2^2) + z_1^3z_3^3(z_1^2 + z_3^2) + z_2^3z_3^3(z_2^2 + z_3^2)) + \\
& + 52z_1z_2z_3(z_1^5 + z_2^5 + z_3^5) + 46(z_1z_2(z_1^6 + z_2^6) + z_1z_3(z_1^6 + z_3^6) + z_2z_3(z_2^6 + z_3^6)) + \\
& + 378z_1^2z_2^2z_3^2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) + \\
& + 153z_1z_2z_3(z_1^2z_2^3 + z_1^3z_2^2 + z_1^2z_3^3 + z_1^3z_3^2 + z_2^2z_3^3 + z_2^3z_3^2) + \\
& + 540z_1^2z_2^2z_3^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 135z_1z_2z_3(z_1z_2^4 + z_1^4z_2 + z_1z_3^4 + z_1^4z_3 + z_2z_3^4 + z_2^4z_3)]\nu^4 + \\
& + 1024[-10(z_1^6 + z_2^6 + z_3^6) + 75(z_1^2z_2^2(z_1^2 + z_2^2) + \\
& + z_1^2z_3^2(z_1^2 + z_3^2) + z_2^2z_3^2(z_2^2 + z_3^2)) + \\
& + 174(z_1z_2(z_1^4 + z_2^4) + z_1z_3(z_1^4 + z_3^4) + z_2z_3(z_2^4 + z_3^4)) + \\
& + 237(z_1^3z_2^3 + z_1^3z_3^3 + z_2^3z_3^3) + 249z_1z_2z_3(z_1^2z_2 + z_1z_2^2 + z_1^2z_3 + \\
& + z_1z_3^2 + z_2^2z_3 + z_2z_3^2) + 186z_1z_2z_3(z_1^3 + z_2^3 + z_3^3) + 828z_1^2z_2^2z_3^2]\nu^5 - \\
& - 12288[80(z_1z_2(z_1^2 + z_2^2) + z_1z_3(z_1^2 + z_3^2) + z_2z_3(z_2^2 + z_3^2)) - 12(z_1^4 + z_2^4 + z_3^4) + \\
& + 39(z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2) + 82z_1z_2z_3(z_1 + z_2 + z_3)]\nu^6 + \\
& + 344064[-2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) + 7(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)]\nu^7 + 3342336\nu^8).
\end{aligned}$$

Род $p = 2$:

$$\begin{aligned}
M^3\rho^{(2|1)}(z) &= \frac{21\nu(z^2 + \nu)}{y^{11}(z)}, \\
M^4\rho^{(2|2)}(z_1, z_2) &= \frac{\nu}{y(z_1)^{13}y(z_2)^{13}} \left(189z_1^{11}z_2^3 + 168z_1^{10}z_2^4 + 147z_1^9z_2^5 + 156z_1^8z_2^6 + \right. \\
& + 165z_1^7z_2^7 + 156z_1^6z_2^8 + 147z_1^5z_2^9 + 168z_1^4z_2^{10} + 189z_1^3z_2^{11} + \\
& + [399z_1^{11}z_2 + 462z_1^{10}z_2^2 - 4011z_1^9z_2^3 - 3664z_1^8z_2^4 - 3317z_1^7z_2^5 - 3342z_1^6z_2^6 - \\
& - 3317z_1^5z_2^7 - 3664z_1^4z_2^8 - 4011z_1^3z_2^9 + 462z_1^2z_2^{10} + 399z_1z_2^{11}]\nu + \\
& + [84z_1^{10} - 9408z_1^9z_2 - 10516z_1^8z_2^2 + 33736z_1^7z_2^3 + 30980z_1^6z_2^4 + 27624z_1^5z_2^5 + \\
& + 30980z_1^4z_2^6 + 33736z_1^3z_2^7 - 10516z_1^2z_2^8 - 9408z_1z_2^9 + 84z_2^{10}]\nu^2 + \\
& + [-1696z_1^8 + 92368z_1^7z_2 + 101120z_1^6z_2^2 - 129648z_1^5z_2^3 - 133248z_1^4z_2^4 - \\
& - 129648z_1^3z_2^5 + 101120z_1^2z_2^6 + 92368z_1z_2^7 - 1696z_2^8]\nu^3 + \\
& + [12992z_1^6 - 487936z_1^5z_2 - 491072z_1^4z_2^2 + 202752z_1^3z_2^3 - \\
& - 491072z_1^2z_2^4 - 487936z_1z_2^5 + 12992z_2^6]\nu^4 + \\
& + [-77312z_1^4 + 1415936z_1^3z_2 + 2519552z_1^2z_2^2 + 1415936z_1z_2^3 - 77312z_2^4]\nu^5 + \\
& + [-560128z_1^2 - 2951168z_1z_2 - 560128z_2^2]\nu^6 - 1736704\nu^7).
\end{aligned}$$

Род $p = 3$:

$$M^5\rho^{(3|1)}(z) = \frac{11\nu(135z_1^4 + 558z_1^2\nu + 158\nu^2)}{y(z)^{17}}.$$

Отметим, что все эти полиплотности определены для любых конечных значений N и не имеют отношения к пределу $N \rightarrow \infty$. Альтернативный подход к этому вопросу изучался в работе [53].

1.5. Первые гауссовы полиплотности: первые члены N -разложений. В этом пункте мы положим $M = 1$ и $g = 1$, так что $\nu = N$.

Одноточечные функции:

$$\begin{aligned}
\rho_G^{(0|1)}(x) &= \frac{1}{x}N + \frac{1}{x^3}N^2 + \frac{2}{x^5}N^3 + \frac{5}{x^7}N^4 + \frac{14}{x^9}N^5 + \frac{42}{x^{11}}N^6 + \\
&\quad + \frac{132}{x^{13}}N^7 + \frac{429}{x^{15}}N^8 + \frac{1430}{x^{17}}N^9 + O(N^{10}), \\
\rho_G^{(1|1)}(x) &= \frac{1}{x^5}N + \frac{10}{x^7}N^2 + \frac{70}{x^9}N^3 + \frac{420}{x^{11}}N^4 + \frac{2310}{x^{13}}N^5 + \\
&\quad + \frac{12012}{x^{15}}N^6 + \frac{60060}{x^{17}}N^7 + \frac{291720}{x^{19}}N^8 + \frac{1385670}{x^{21}}N^9 + O(N^{10}), \\
\rho_G^{(2|1)}(x) &= \frac{21}{x^9}N + \frac{483}{x^{11}}N^2 + \frac{6468}{x^{13}}N^3 + \frac{66066}{x^{15}}N^4 + \frac{570570}{x^{17}}N^5 + \\
&\quad + \frac{4390386}{x^{19}}N^6 + \frac{31039008}{x^{21}}N^7 + \frac{205633428}{x^{23}}N^8 + \frac{1293938646}{x^{25}}N^9 + O(N^{10}), \\
\rho_G^{(3|1)}(x) &= \frac{1485}{x^{13}}N + \frac{56628}{x^{15}}N^2 + \frac{1169740}{x^{17}}N^3 + \frac{17454580}{x^{19}}N^4 + \\
&\quad + \frac{211083730}{x^{21}}N^5 + \frac{2198596400}{x^{23}}N^6 + \frac{20465052608}{x^{25}}N^7 + \\
&\quad + \frac{174437377400}{x^{27}}N^8 + \frac{1384928666550}{x^{29}}N^9 + O(N^{10}).
\end{aligned}$$

Двухточечные функции:

$$\begin{aligned}
\rho_G^{(0|2)}(x, y) &= \frac{1}{2(x-y)^2} \left[-1 + \left(1 - \frac{4N}{xy} \right) \left(1 + \frac{2N}{x^2} + \frac{6N^2}{x^4} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{20N^3}{x^6} + \frac{70N^4}{x^8} + \frac{252N^5}{x^{10}} + \dots \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(1 + \frac{2N}{y^2} + \frac{6N^2}{y^4} + \frac{20N^3}{y^6} + \frac{70N^4}{y^8} + \frac{252N^5}{y^{10}} + \dots \right) \right] = \\
&= \frac{N}{x^2y^2} + N^2 \left(\frac{3}{x^4y^2} + \frac{2}{x^3y^3} + \frac{3}{x^2y^4} \right) + \\
&\quad + N^3 \left(\frac{10}{x^6y^2} + \frac{8}{x^5y^3} + \frac{12}{x^4y^4} + \frac{8}{x^3y^5} + \frac{10}{x^2y^6} \right) + \\
&\quad + N^4 \left(\frac{35}{x^8y^2} + \frac{30}{x^7y^3} + \frac{45}{x^6y^4} + \frac{36}{x^5y^5} + \frac{45}{x^4y^6} + \frac{30}{x^3y^7} + \frac{35}{x^2y^8} \right) + \\
&\quad + N^5 \left(\frac{126}{x^{10}y^2} + \frac{112}{x^9y^3} + \frac{168}{x^8y^4} + \frac{144}{x^7y^5} + \frac{180}{x^6y^6} + \frac{144}{x^5y^7} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{168}{x^4y^8} + \frac{112}{x^3y^9} + \frac{126}{x^2y^{10}} \right) + O(N^6), \\
\rho_G^{(1|2)}(x, y) &= \left(\frac{5}{x^6y^2} + \frac{4}{x^5y^3} + \frac{3}{x^4y^4} + \frac{4}{x^3y^5} + \frac{5}{x^2y^6} \right) N + \\
&\quad + \left(\frac{70}{x^8y^2} + \frac{60}{x^7y^3} + \frac{60}{x^6y^4} + \frac{60}{x^5y^5} + \frac{60}{x^4y^6} + \frac{60}{x^3y^7} + \frac{70}{x^2y^8} \right) N^2 + \\
&\quad + \left(\frac{630}{x^{10}y^2} + \frac{560}{x^9y^3} + \frac{630}{x^8y^4} + \frac{600}{x^7y^5} + \frac{600}{x^6y^6} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{600}{x^5 y^7} + \frac{630}{x^4 y^8} + \frac{560}{x^3 y^9} + \frac{630}{x^2 y^{10}} \Big) N^3 + \\
& + \left(\frac{4620}{x^{12} y^2} + \frac{4200}{x^{11} y^3} + \frac{5040}{x^{10} y^4} + \frac{4760}{x^9 y^5} + \frac{4900}{x^8 y^6} + \frac{4800}{x^7 y^7} + \right. \\
& + \frac{4900}{x^6 y^8} + \frac{4760}{x^5 y^9} + \frac{5040}{x^4 y^{10}} + \frac{4200}{x^3 y^{11}} + \frac{4620}{x^2 y^{12}} \Big) N^4 + \\
& + \left(\frac{30030}{x^{14} y^2} + \frac{27720}{x^{13} y^3} + \frac{34650}{x^{12} y^4} + \frac{32760}{x^{11} y^5} + \frac{34650}{x^{10} y^6} + \frac{33600}{x^9 y^7} + \frac{34300}{y^8 x^8} + \right. \\
& + \frac{33600}{x^7 y^9} + \frac{34650}{x^6 y^{10}} + \frac{32760}{x^5 y^{11}} + \frac{34650}{x^4 y^{12}} + \frac{27720}{x^3 y^{13}} + \frac{30030}{x^2 y^{14}} \Big) N^5 + O(N^6), \\
\rho_G^{(2|2)}(x, y) = & \left(\frac{189}{xy^9} + \frac{168}{x^8 y^2} + \frac{147}{x^7 y^3} + \frac{156}{x^6 y^4} + \frac{165}{x^5 y^5} + \frac{156}{x^4 y^6} + \frac{147}{x^3 y^7} + \frac{168}{x^2 y^8} + \frac{189}{x^9 y} \right) N + \\
& + \left(\frac{5313}{x^{11} y} + \frac{4830}{x^{10} y^2} + \frac{4725}{x^9 y^3} + \frac{4760}{x^8 y^4} + \frac{4795}{x^7 y^5} + \frac{4770}{x^6 y^6} + \right. \\
& + \frac{4795}{x^5 y^7} + \frac{4760}{x^4 y^8} + \frac{4725}{x^3 y^9} + \frac{4830}{x^2 y^{10}} + \frac{5313}{xy^{11}} \Big) N^2 + \\
& + \left(\frac{84084}{x^{13} y} + \frac{77616}{x^{12} y^2} + \frac{81774}{x^{11} y^3} + \frac{80640}{x^{10} y^4} + \frac{80640}{x^9 y^5} + \frac{80640}{x^8 y^6} + \frac{81340}{x^7 y^7} + \right. \\
& + \frac{80640}{x^6 y^8} + \frac{80640}{x^5 y^9} + \frac{80640}{x^4 y^{10}} + \frac{81774}{x^3 y^{11}} + \frac{77616}{x^2 y^{12}} + \frac{84084}{xy^{13}} \Big) N^3 + O(N^4).
\end{aligned}$$

Трехточечные функции:

$$\begin{aligned}
\rho_G^{(0|3)}(x, y, z) = & 2 \left(\frac{1}{x^2 y^2 z^3} + \frac{1}{x^2 y^3 z^2} + \frac{1}{x^3 y^2 z^2} \right) N + \\
& + \left[12 \left(\frac{1}{x^2 y^2 z^5} + \frac{1}{x^2 y^5 z^2} + \frac{1}{x^5 y^2 z^2} + \frac{1}{x^2 y^3 z^4} + \frac{1}{x^3 y^4 z^2} + \frac{1}{x^4 y^3 z^2} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{x^2 y^4 z^3} + \frac{1}{x^3 y^2 z^4} + \frac{1}{x^4 y^2 z^3} \Big) + \frac{8}{x^3 y^3 z^3} \Big] N^2 + \\
& + \left[60 \left(\frac{1}{x^3 y^6 z^2} + \frac{1}{x^6 y^3 z^2} + \frac{1}{z^6 x^3 y^2} + \frac{1}{z^3 x^2 y^6} + \frac{1}{z^3 x^6 y^2} + \frac{1}{z^6 x^2 y^3} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{x^7 y^2 z^2} + \frac{1}{z^7 x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 y^7 z^2} \Big) + 72 \left(\frac{1}{z^3 x^4 y^4} + \frac{1}{z^4 x^4 y^3} + \frac{1}{z^4 x^3 y^4} + \right. \\
& + \frac{1}{x^5 y^4 z^2} + \frac{1}{z^5 x^4 y^2} + \frac{1}{z^4 x^5 y^2} + \frac{1}{z^4 x^2 y^5} + \frac{1}{z^5 x^2 y^4} + \frac{1}{x^4 y^5 z^2} \Big) + \\
& + 48 \left(\frac{1}{z^3 x^3 y^5} + \frac{1}{z^5 x^3 y^3} + \frac{1}{z^3 x^5 y^3} \right) \Big] N^3 + \\
& + \left[280 \left(\frac{1}{z^9 x^2 y^2} + \frac{1}{x^9 y^2 z^2} + \frac{1}{x^2 y^9 z^2} + \frac{1}{z^3 x^8 y^2} + \frac{1}{z^8 x^3 y^2} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{z^3 x^2 y^8} + \frac{1}{z^8 x^2 y^3} + \frac{1}{x^8 y^3 z^2} + \frac{1}{x^3 y^8 z^2} \Big) + \\
& + 360 \left(\frac{1}{z^4 x^7 y^2} + \frac{1}{z^7 x^4 y^2} + \frac{1}{z^4 x^2 y^7} + \frac{1}{z^7 x^2 y^4} + \frac{1}{x^7 y^4 z^2} + \frac{1}{x^4 y^7 z^2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{z^5 x^6 y^2} + \frac{1}{z^6 x^5 y^2} + \frac{1}{z^5 x^2 y^6} + \frac{1}{z^6 x^2 y^5} + \frac{1}{x^5 y^6 z^2} + \frac{1}{x^6 y^5 z^2} + \\
& + \frac{1}{z^4 x^6 y^3} + \frac{1}{z^3 x^6 y^4} + \frac{1}{z^6 x^4 y^3} + \frac{1}{z^3 x^4 y^6} + \frac{1}{z^6 x^3 y^4} + \frac{1}{z^4 x^3 y^6} \Big) + \\
& + 240 \left(\frac{1}{z^3 x^7 y^3} + \frac{1}{z^3 x^3 y^7} + \frac{1}{z^7 x^3 y^3} \right) + \\
& + 288 \left(\frac{1}{z^3 x^5 y^5} + \frac{1}{z^5 x^3 y^5} + \frac{1}{z^5 x^5 y^3} \right) + \\
& + 432 \left(\frac{1}{z^4 x^5 y^4} + \frac{1}{z^4 x^4 y^5} + \frac{1}{z^5 x^4 y^4} \right) \Big] N^4 + \\
& + \left[1680 \left(\frac{1}{z^3 x^8 y^4} + \frac{1}{z^4 x^8 y^3} + \frac{1}{z^4 x^3 y^8} + \frac{1}{z^8 x^3 y^4} + \frac{1}{z^8 x^4 y^3} + \frac{1}{z^3 x^4 y^8} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{x^4 y^9 z^2} + \frac{1}{z^9 x^4 y^2} + \frac{1}{z^4 x^2 y^9} + \frac{1}{z^9 x^2 y^4} + \frac{1}{x^9 y^4 z^2} + \frac{1}{z^4 x^9 y^2} + \\
& + \frac{1}{z^8 x^5 y^2} + \frac{1}{z^5 x^2 y^8} + \frac{1}{z^5 x^8 y^2} + \frac{1}{z^8 x^2 y^5} + \frac{1}{x^8 y^5 z^2} + \frac{1}{x^5 y^8 z^2} \Big) + \\
& + 1440 \left(\frac{1}{z^3 x^7 y^5} + \frac{1}{z^5 x^7 y^3} + \frac{1}{z^5 x^3 y^7} + \frac{1}{z^7 x^3 y^5} + \frac{1}{z^3 x^5 y^7} + \frac{1}{z^7 x^5 y^3} \right) + \\
& + 2160 \left(\frac{1}{z^4 x^5 y^6} + \frac{1}{z^6 x^5 y^4} + \frac{1}{z^5 x^6 y^4} + \frac{1}{z^6 x^4 y^5} + \frac{1}{z^4 x^6 y^5} + \right. \\
& + \frac{1}{z^5 x^4 y^6} + \frac{1}{z^4 x^7 y^4} + \frac{1}{z^4 x^4 y^7} + \frac{1}{z^7 x^4 y^4} \Big) + \\
& + 1120 \left(\frac{1}{z^3 x^3 y^9} + \frac{1}{z^9 x^3 y^3} + \frac{1}{z^3 x^9 y^3} \right) + \\
& + 1800 \left(\frac{1}{z^7 x^6 y^2} + \frac{1}{z^6 x^7 y^2} + \frac{1}{x^7 y^6 z^2} + \frac{1}{z^7 x^2 y^6} + \frac{1}{z^6 x^2 y^7} + \frac{1}{x^6 y^7 z^2} + \right. \\
& + \frac{1}{z^6 x^3 y^6} + \frac{1}{z^3 x^6 y^6} + \frac{1}{z^6 x^6 y^3} \Big) + 1260 \left(\frac{1}{z^{11} x^2 y^2} + \frac{1}{x^{11} y^2 z^2} + \right. \\
& + \frac{1}{x^2 y^{11} z^2} + \frac{1}{z^3 x^{10} y^2} + \frac{1}{z^{10} x^3 y^2} + \frac{1}{z^3 x^2 y^{10}} + \\
& + \frac{1}{z^{10} x^2 y^3} + \frac{1}{x^{10} y^3 z^2} + \frac{1}{x^3 y^{10} z^2} \Big) + \frac{1728}{z^5 x^5 y^5} \Big] N^5 + O(N^6), \\
\rho_G^{(1|3)}(x, y, z) = & \left[24 \left(\frac{1}{x^3 z y^4} + \frac{1}{x^4 z y^3} + \frac{1}{z^4 x y^3} + \frac{1}{z^3 x^4 y} + \frac{1}{z^4 x^3 y} + \frac{1}{z^3 x y^4} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{z^2 x^2 y^4} + \frac{1}{z^2 x^4 y^2} + \frac{1}{z^4 x^2 y^2} \Big) + 18 \left(\frac{1}{z^2 x^3 y^3} + \frac{1}{z^3 x^2 y^3} + \frac{1}{z^3 x^3 y^2} \right) + \\
& + 30 \left(\frac{1}{x^2 z y^5} + \frac{1}{z^5 x^2 y} + \frac{1}{z^2 x y^5} + \frac{1}{z^5 x y^2} + \frac{1}{z^2 x^5 y} + \right. \\
& + \frac{1}{x^5 z y^2} + \frac{1}{x^6 z y} + \frac{1}{x z y^6} + \frac{1}{z^6 x y} \Big) \Big] N +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[540 \left(\frac{1}{x^5 z y^4} + \frac{1}{z^4 x^5 y} + \frac{1}{z^5 x^4 y} + \frac{1}{z^5 x y^4} + \frac{1}{x^4 z y^5} + \frac{1}{z^4 x y^5} \right) + \right. \\
& + 480 \left(\frac{1}{z^2 x^5 y^3} + \frac{1}{z^3 x^5 y^2} + \frac{1}{z^5 x^3 y^2} + \frac{1}{z^5 x^2 y^3} + \frac{1}{z^3 x^2 y^5} + \frac{1}{z^2 x^3 y^5} \right) + \\
& + 540 \left(\frac{1}{z^6 x^3 y} + \frac{1}{x^3 z y^6} + \frac{1}{z^3 x y^6} + \frac{1}{x^6 z y^3} + \frac{1}{z^3 x^6 y} + \frac{1}{z^6 x y^3} \right) + \\
& + 560 \left(\frac{1}{z^7 x y^2} + \frac{1}{x^2 z y^7} + \frac{1}{z^2 x y^7} + \frac{1}{z^2 x^7 y} + \frac{1}{z^7 x^2 y} + \frac{1}{x^7 z y^2} \right) + \\
& + 480 \left(\frac{1}{z^4 x^2 y^4} + \frac{1}{z^4 x^4 y^2} + \frac{1}{z^2 x^4 y^4} \right) + 560 \left(\frac{1}{z^8 x y} + \frac{1}{x z y^8} + \frac{1}{x^8 z y} \right) + \\
& + 468 \left(\frac{1}{z^4 x^3 y^3} + \frac{1}{z^3 x^3 y^4} + \frac{1}{z^3 x^4 y^3} \right) + \\
& + 480 \left(\frac{1}{z^2 x^2 y^6} + \frac{1}{z^6 x^2 y^2} + \frac{1}{z^2 x^6 y^2} \right) \Big] N^2 + \\
& + \left[6300 \left(\frac{1}{z^3 x^7 y^2} + \frac{1}{z^7 x^3 y^2} + \frac{1}{z^2 x^7 y^3} + \frac{1}{z^7 x^2 y^3} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{z^3 x^2 y^7} + \frac{1}{z^2 x^3 y^7} + \frac{1}{x^{10} z y} + \frac{1}{z^{10} x y} + \frac{1}{x z y^{10}} \Big) + \\
& + 6000 \left(\frac{1}{z^4 x^2 y^6} + \frac{1}{z^2 x^6 y^4} + \frac{1}{z^6 x^2 y^4} + \frac{1}{z^4 x^6 y^2} + \right. \\
& + \frac{1}{z^2 x^4 y^6} + \frac{1}{z^6 x^4 y^2} + \frac{1}{z^2 x^5 y^5} + \frac{1}{z^5 x^2 y^5} + \frac{1}{z^5 x^5 y^2} \Big) + \\
& + 6300 \left(\frac{1}{z^2 x^9 y} + \frac{1}{x^9 z y^2} + \frac{1}{x^2 z y^9} + \frac{1}{z^9 x y^2} + \frac{1}{z^2 x y^9} + \frac{1}{z^9 x^2 y} \right) + \\
& + 6660 \left(\frac{1}{z^6 x^3 y^3} + \frac{1}{z^3 x^3 y^6} + \frac{1}{z^3 x^6 y^3} \right) + \\
& + 6720 \left(\frac{1}{z^4 x^7 y} + \frac{1}{x^7 z y^4} + \frac{1}{z^7 x y^4} + \frac{1}{z^4 x y^7} + \frac{1}{z^7 x^4 y} + \frac{1}{x^4 z y^7} \right) + \\
& + 5600 \left(\frac{1}{z^8 x^2 y^2} + \frac{1}{z^2 x^2 y^8} + \frac{1}{z^2 x^8 y^2} \right) + \\
& + 6300 \left(\frac{1}{z^2 x^9 y} + \frac{1}{x^9 z y^2} + \frac{1}{x^2 z y^9} + \frac{1}{z^9 x y^2} + \frac{1}{z^2 x y^9} + \frac{1}{z^9 x^2 y} \right) + \\
& + 5600 \left(\frac{1}{z^8 x^2 y^2} + \frac{1}{z^2 x^2 y^8} + \frac{1}{z^2 x^8 y^2} \right) + \\
& + 6720 \left(\frac{1}{z^8 x^3 y} + \frac{1}{x^3 z y^8} + \frac{1}{x^8 z y^3} + \frac{1}{z^3 x y^8} + \frac{1}{z^8 x y^3} + \frac{1}{z^3 x^8 y} \right) + \\
& + 6600 \left(\frac{1}{z^5 x^6 y} + \frac{1}{z^6 x y^5} + \frac{1}{z^6 x^5 y} + \frac{1}{z^5 x y^6} + \frac{1}{x^6 z y^5} + \frac{1}{x^5 z y^6} \right) + \\
& + 6480 \left(\frac{1}{z^4 x^3 y^5} + \frac{1}{z^4 x^5 y^3} + \frac{1}{z^3 x^5 y^4} + \frac{1}{z^3 x^4 y^5} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{z^5 x^4 y^3} + \frac{1}{z^5 x^3 y^4} \Big) + \frac{6336}{z^4 x^4 y^4} \Big] N^3 + O(N^4).$$

Четырехточечные функции:

$$\begin{aligned} \rho_G^{(0|4)}(x, y, z, w) = & \left[8 \left(\frac{1}{w^2 xy^2 z} + \frac{1}{x^2 y w z^2} + \frac{1}{w^2 x^2 y z} + \frac{1}{xy^2 w z^2} + \frac{1}{w^2 xy z^2} + \frac{1}{x^2 y^2 w z} \right) + \right. \\ & + 6 \left(\frac{1}{xy^3 w z} + \frac{1}{xy w z^3} + \frac{1}{w^3 xy z} + \frac{1}{y x^3 w z} \right) \Big] N + \\ & + \left[72 \left(\frac{1}{w^3 x^2 y z^2} + \frac{1}{w^2 x y^3 z^2} + \frac{1}{w^2 x y^2 z^3} + \frac{1}{w^3 x y^2 z^2} + \frac{1}{w^2 x^3 y^2 z} + \frac{1}{x^3 y^2 w z^2} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{w^2 x^3 y z^2} + \frac{1}{w^2 x^2 y^3 z} + \frac{1}{x^2 y^3 w z^2} + \frac{1}{w^3 x^2 y^2 z} + \frac{1}{x^2 y^2 w z^3} + \frac{1}{w^2 x^2 y z^3} + \\ & + \frac{1}{x^2 y w z^4} + \frac{1}{xy^4 w z^2} + \frac{1}{w^2 xy^4 z} + \frac{1}{w^4 xy z^2} + \frac{1}{w^2 xy z^4} + \frac{1}{w^2 x^4 y z} + \\ & + \frac{1}{w^4 xy^2 z} + \frac{1}{xy^2 w z^4} + \frac{1}{x^4 y^2 w z} + \frac{1}{x^2 y^4 w z} + \frac{1}{w^4 x^2 y z} + \frac{1}{x^4 y w z^2} + \\ & + \frac{1}{w^3 xy^3 z} + \frac{1}{xy^3 w z^3} + \frac{1}{w^3 xy z^3} + \frac{1}{x^3 y^3 w z} + \frac{1}{w^3 x^3 y z} + \left. \frac{1}{x^3 y w z^3} \right) + \\ & + 60 \left(\frac{1}{yx^5 w z} + \frac{1}{xy w z^5} + \frac{1}{w^5 xy z} + \frac{1}{xy^5 w z} \right) + \frac{48}{w^2 x^2 y^2 z^2} \Big] N^2 + \\ & + \left[576 \left(\frac{1}{w^3 x^3 y^2 z^2} + \frac{1}{w^2 x^3 y^3 z^2} + \frac{1}{w^3 x^2 y^3 z^2} + \frac{1}{w^2 x^2 y^3 z^3} + \frac{1}{w^2 x^3 y^2 z^3} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{w^3 x^2 y^2 z^3} + \frac{1}{w^3 x^2 y z^4} + \frac{1}{w^4 x^3 y^2 z} + \frac{1}{x^3 y^2 w z^4} + \frac{1}{x^4 y^2 w z^3} + \frac{1}{w^3 x^4 y^2 z} + \\ & + \frac{1}{w^2 x^4 y^3 z} + \frac{1}{x^4 y^3 w z^2} + \frac{1}{w^4 xy^2 z^3} + \frac{1}{w^4 x^3 y z^2} + \frac{1}{w^2 xy^4 z^3} + \frac{1}{x^2 y^4 w z^3} + \\ & + \frac{1}{w^3 xy^4 z^2} + \frac{1}{w^3 x^4 y z^2} + \frac{1}{w^2 x^4 y z^3} + \frac{1}{w^2 xy^3 z^4} + \frac{1}{w^4 xy^3 z^2} + \frac{1}{w^3 xy^2 z^4} + \\ & + \frac{1}{w^4 x^2 y^3 z} + \frac{1}{w^4 x^2 y z^3} + \frac{1}{w^2 x^3 y z^4} + \frac{1}{w^2 x^3 y^4 z} + \frac{1}{x^3 y^4 w z^2} + \frac{1}{w^3 x^2 y^4 z} + \\ & + \left. \frac{1}{x^2 y^3 w z^4} \right) + 480 \left(\frac{1}{w^2 x^6 y z} + \frac{1}{xy^6 w z^2} + \frac{1}{w^6 xy^2 z} + \frac{1}{w^6 xy z^2} + \right. \\ & + \frac{1}{x^6 y w z^2} + \frac{1}{x^6 y^2 w z} + \frac{1}{w^2 xy z^6} + \frac{1}{xy^2 w z^6} + \frac{1}{w^6 x^2 y z} + \frac{1}{x^2 y w z^6} + \\ & + \frac{1}{w^2 xy^6 z} + \frac{1}{x^2 y^6 w z} + \frac{1}{w^5 xy^2 z^2} + \frac{1}{w^5 x^2 y z^2} + \frac{1}{x^2 y^2 w z^5} + \frac{1}{x^2 y^5 w z^2} + \\ & + \frac{1}{w^2 x^2 y z^5} + \frac{1}{w^2 x^5 y z^2} + \frac{1}{w^5 x^2 y^2 z} + \frac{1}{w^2 x^2 y^5 z} + \frac{1}{w^2 x^5 y^2 z} + \\ & + \left. \frac{1}{x^5 y^2 w z^2} + \frac{1}{w^2 xy^5 z^2} + \frac{1}{w^2 xy^2 z^5} \right) + 540 \left(\frac{1}{x^3 y w z^5} + \frac{1}{xy^5 w z^3} + \frac{1}{w^5 x^3 y z} + \right. \\ & + \frac{1}{w^5 xy z^3} + \frac{1}{w^3 xy^5 z} + \frac{1}{x^5 y w z^3} + \left. \frac{1}{w^3 x^5 y z} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{w^5 xy^3 z} + \frac{1}{x^3 y^5 wz} + \frac{1}{xy^3 wz^5} + \frac{1}{w^3 xy z^5} \Big) + \\
& + 420 \left(\frac{1}{xy^7 wz} + \frac{1}{yx^7 wz} + \frac{1}{xy wz^7} + \frac{1}{w^7 xyz} \right) + \\
& + 648 \left(\frac{1}{w^3 x^3 y^3 z} + \frac{1}{w^3 xy^3 z^3} + \frac{1}{x^3 y^3 wz^3} + \frac{1}{w^3 x^3 yz^3} \right) + \\
& + 384 \left(\frac{1}{w^2 x^2 y^2 z^4} + \frac{1}{w^4 x^2 y^2 z^2} + \frac{1}{w^2 x^4 y^2 z^2} + \frac{1}{w^2 x^2 y^4 z^2} \right) + \\
& + 576 \left(\frac{1}{x^4 y^4 wz} + \frac{1}{w^4 x^4 yz} + \frac{1}{x^4 y wz^4} + \frac{1}{w^4 xy^4 z} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{w^4 xyz^4} + \frac{1}{xy^4 wz^4} \right) \Big] N^3 + O(N^4).
\end{aligned}$$

1.6. Рекуррентные формулы для гауссовых корреляционных функций.

Общая рекуррентная формула для связанных корреляционных функций, содержащих $\text{tr } \phi$, имеет вид¹²⁾

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\text{tr } \phi)^k \text{tr } \phi^{i_1} \dots \text{tr } \phi^{i_m} \rangle\rangle_G &= k! \sum_{\substack{0 \leq a_1, \dots, a_m \leq k \\ a_1 + \dots + a_m = k}} \frac{i_1!}{a_1!(i_1 - a_1)!} \dots \frac{i_m!}{a_m!(i_m - a_m)!} \times \\
&\times \langle\langle \text{tr } \phi^{i_1 - a_1} \dots \text{tr } \phi^{i_m - a_m} \rangle\rangle_G.
\end{aligned}$$

Некоторые примеры:

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\text{tr } \phi)^k \rangle\rangle_G &= \delta_{k,0} + N\delta_{k,2}, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^k \text{tr } \phi^2 \rangle\rangle_G &= N^2\delta_{k,0} + 2N\delta_{k,2}, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^k \text{tr } \phi^3 \rangle\rangle_G &= 3N^2\delta_{k,1} + 6N\delta_{k,3}, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^k \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= (2N^3 + N)\delta_{k,0} + 12N^2\delta_{k,2} + 24N\delta_{k,4}, \\
&\dots\dots\dots \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^k \text{tr } \phi^k \rangle\rangle_G &= Nk!, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^k \text{tr } \phi^m \rangle\rangle_G &= 0 \quad \text{для } k > m.
\end{aligned}$$

Вообще говоря, для $k+1$ -точечных корреляционных функций

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\text{tr } \phi)^k \text{tr } \phi^{2m} \rangle\rangle_G &= c_{2m}\delta_{k,0} + 2m(2m-1)c_{2m-2}\delta_{k,2} + \dots + (2m)!N\delta_{k,2m}, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^k \text{tr } \phi^{2m+1} \rangle\rangle_G &= (2m+1)c_{2m}\delta_{k,1} + \\
&+ 2m(4m^2-1)c_{2m-2}\delta_{k,3} + \dots + (2m+1)!N\delta_{k,2m+1},
\end{aligned}$$

где $c_{2m} = \langle\langle \text{tr } \phi^{2k} \rangle\rangle_G$.

¹²⁾ При использовании этой формулы нужно проявлять осторожность: если некоторые $i_\alpha - a_\alpha = 0$, хотя некоторые другие $i_\beta - a_\beta > 0$, то соответствующие связанные корреляционные функции в правой части равенства обращаются в нуль: $\langle\langle \text{tr } I \dots \text{tr } \phi^{i_\beta - a_\beta} \dots \rangle\rangle_G = 0$.

Несвязные корреляционные функции имеют вид

$$\langle (\text{tr } \phi)^{2k} \rangle_G = (2k-1)!! N^k.$$

Гауссовы корреляционные функции от величин $\text{tr } \phi^2$:

$$\begin{aligned} \langle\langle (\text{tr } \phi^2)^k \rangle\rangle_G &= 4(k-1)(k-2) \langle\langle (\text{tr } \phi^2)^{k-2} \rangle\rangle_G = 2^{k-1}(k-1)! N^2, \\ \langle (\text{tr } \phi^2)^k \rangle_G &= N^2 \langle (\text{tr } \phi^2)^{k-1} \rangle_G + 2(k-1)[N^2 + 2(k-2)] \langle (\text{tr } \phi^2)^{k-2} \rangle_G = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \sum_{\substack{0 \leq l_1, \dots, l_j \leq k \\ l_1 + \dots + l_j = k}} \frac{k!}{l_1! \dots l_j!} \langle\langle (\text{tr } \phi^2)^{l_1} \rangle\rangle_G \dots \langle\langle (\text{tr } \phi^2)^{l_j} \rangle\rangle_G = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{2^{k-j} k!}{j!} N^{2j} \sum_{\substack{0 \leq l_1, \dots, l_j \leq k \\ l_1 + \dots + l_j = k}} \frac{1}{l_1! \dots l_j!}. \end{aligned}$$

Некоторые примеры:

$$\begin{aligned} \langle \text{tr } \phi^2 \rangle_G &= N^2, \\ \langle (\text{tr } \phi^2)^2 \rangle_G &= N^4 + 2N^2, \\ \langle (\text{tr } \phi^2)^3 \rangle_G &= N^6 + 6N^4 + 8N^2, \\ \langle (\text{tr } \phi^2)^4 \rangle_G &= N^8 + 12N^6 + 44N^4 + 48N^2, \\ \langle (\text{tr } \phi^2)^5 \rangle_G &= N^{10} + 20N^8 + 140N^6 + 400N^4 + 384N^2. \end{aligned}$$

Рекуррентные формулы для корреляционных функций с $\text{tr } \phi^k$ при $k \geq 2$ сложнее с точки зрения зависимости от N (разложения по родам). Конкретные примеры с $\text{tr } \phi^2$ см. в формулах (III.1.2) и (III.1.3).

1.7. Младшие гауссовы корреляционные функции, связанные и несвязные.

Для того чтобы восстановить зависимость от g и M в приведенных ниже формулах, каждую корреляционную функцию $\langle \text{tr } \phi^{k_1} \dots \text{tr } \phi^{k_m} \rangle$ нужно умножить на $(g/M)^{\frac{r_1 + \dots + k_m}{2}}$.

Правила отбора:

а) для *несвязных* корреляционных функций при $N = 1$

$$\langle \text{tr } \phi^{i_1} \dots \text{tr } \phi^{i_k} \rangle_G = (i_1 + \dots + i_k - 1)!!;$$

б) чтобы коррелятор не обращался в нуль, сумма $i_1 + \dots + i_k$ должна быть четной.

Одноточечные корреляционные функции (обобщенные числа Каталана):

$$\begin{aligned} \langle \text{tr } \phi^2 \rangle_G &= \langle\langle \text{tr } \phi^2 \rangle\rangle_G = N^2, \\ \langle \text{tr } \phi^4 \rangle_G &= \langle\langle \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G = 2N^3 + N, \\ \langle \text{tr } \phi^6 \rangle_G &= \langle\langle \text{tr } \phi^6 \rangle\rangle_G = 5N^4 + 10N^2, \\ \langle \text{tr } \phi^8 \rangle_G &= \langle\langle \text{tr } \phi^8 \rangle\rangle_G = 14N^5 + 70N^3 + 21N, \\ \langle \text{tr } \phi^{10} \rangle_G &= \langle\langle \text{tr } \phi^{10} \rangle\rangle_G = 42N^6 + 420N^4 + 483N^2. \end{aligned}$$

Двухточечные корреляционные функции:

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 \rangle\rangle_G &= \langle (\text{tr } \phi)^2 \rangle_G = N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^2)^2 \rangle\rangle_G &= 2N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi^2)^2 \rangle_G &= N^4 + 2N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^3)^2 \rangle\rangle_G &= \langle (\text{tr } \phi^3)^2 \rangle_G = 12N^3 + 3N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^4)^2 \rangle\rangle_G &= 36N^4 + 60N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi^4)^2 \rangle_G &= 4N^6 + 40N^4 + 61N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^5)^2 \rangle\rangle_G &= \langle (\text{tr } \phi^5)^2 \rangle_G = 180N^5 + 600N^3 + 165N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{ tr } \phi^3 \rangle\rangle_G &= \langle \text{tr } \phi \text{ tr } \phi^3 \rangle_G = 3N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{ tr } \phi^5 \rangle\rangle_G &= \langle \text{tr } \phi \text{ tr } \phi^5 \rangle_G = 10N^3 + 5N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{ tr } \phi^7 \rangle\rangle_G &= \langle \text{tr } \phi \text{ tr } \phi^7 \rangle_G = 35N^4 + 70N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{ tr } \phi^9 \rangle\rangle_G &= \langle \text{tr } \phi \text{ tr } \phi^9 \rangle_G = 126N^5 + 630N^3 + 189N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi^2 \text{ tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= 8N^3 + 4N, \\
\langle \text{tr } \phi^2 \text{ tr } \phi^4 \rangle_G &= 2N^5 + 9N^3 + 4N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi^2 \text{ tr } \phi^6 \rangle\rangle_G &= 30N^4 + 60N^2, \\
\langle \text{tr } \phi^2 \text{ tr } \phi^6 \rangle_G &= 5N^6 + 40N^4 + 60N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi^2 \text{ tr } \phi^8 \rangle\rangle_G &= 112N^5 + 560N^3 + 178N, \\
\langle \text{tr } \phi^2 \text{ tr } \phi^8 \rangle_G &= 14N^7 + 182N^5 + 581N^3 + 178N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi^3 \text{ tr } \phi^5 \rangle\rangle_G &= \langle \text{tr } \phi^3 \text{ tr } \phi^5 \rangle_G = 45N^4 + 60N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi^3 \text{ tr } \phi^7 \rangle\rangle_G &= \langle \text{tr } \phi^3 \text{ tr } \phi^7 \rangle_G = 168N^5 + 630N^3 + 147N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi^4 \text{ tr } \phi^6 \rangle\rangle_G &= 144N^5 + 600N^3 + 156N, \\
\langle \text{tr } \phi^4 \text{ tr } \phi^6 \rangle_G &= 10N^7 + 169N^5 + 610N^3 + 156N.
\end{aligned}$$

Трехточечные корреляционные функции:

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\text{tr } \phi^2)^3 \rangle\rangle_G &= 8N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^2)^3 \rangle\rangle_G &= N^6 + 6N^4 + 8N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{ tr } \phi^2 \rangle\rangle_G &= 2N, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{ tr } \phi^2 \rangle_G &= N^3 + 2N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{ tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= 12N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{ tr } \phi^4 \rangle_G &= 2N^4 + 13N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{ tr } \phi^6 \rangle\rangle_G &= 60N^3 + 30N, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{ tr } \phi^6 \rangle_G &= 5N^5 + 70N^3 + 30N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{ tr } \phi^8 \rangle\rangle_G &= 280N^4 + 560N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{ tr } \phi^8 \rangle_G &= 14N^6 + 350N^4 + 581N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^2)^2 \text{ tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= 48N^3 + 24N,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (\text{tr } \phi^2)^2 \text{tr } \phi^4 \rangle_G &= 2N^7 + 21N^5 + 58N^3 + 24N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^2)^2 \text{tr } \phi^6 \rangle\rangle_G &= 240N^4 + 480N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi^2)^2 \text{tr } \phi^6 \rangle_G &= 5N^8 + 80N^6 + 380N^4 + 480N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^3)^2 \text{tr } \phi^2 \rangle\rangle_G &= 72N^3 + 18N, \\
\langle (\text{tr } \phi^3)^2 \text{tr } \phi^2 \rangle_G &= 12N^5 + 75N^3 + 18N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^3)^2 \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= 432N^4 + 468N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi^3)^2 \text{tr } \phi^4 \rangle_G &= 24N^6 + 450N^4 + 471N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^4)^2 \text{tr } \phi^2 \rangle\rangle_G &= 2(8N\langle\langle \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G + 4\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G) + 2 \cdot 16\langle\langle \text{tr } \phi^6 \rangle\rangle_G = \\
&= 288N^4 + 480N^2, \tag{III.1.2} \\
\langle (\text{tr } \phi^4)^2 \text{tr } \phi^2 \rangle_G &= 36N^6 + 360N^4 + 549N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^3 \rangle\rangle_G &= 12N^2, \\
\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^3 \rangle_G &= 3N^4 + 12N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^5 \rangle\rangle_G &= 60N^3 + 30N, \\
\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^5 \rangle_G &= 10N^5 + 65N^3 + 30N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^7 \rangle\rangle_G &= 280N^4 + 560N^2, \\
\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^7 \rangle_G &= 35N^6 + 350N^4 + 560N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= 72N^3 + 24N, \\
\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^4 \rangle_G &= 6N^5 + 75N^3 + 24N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^6 \rangle\rangle_G &= 360N^4 + 540N^2, \\
\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^6 \rangle_G &= 15N^6 + 390N^4 + 540N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^4 \text{tr } \phi^5 \rangle\rangle_G &= 360N^4 + 540N^2, \\
\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^4 \text{tr } \phi^5 \rangle_G &= 20N^6 + 380N^4 + 545N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^5 \rangle\rangle_G &= 6N\langle\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^5 \rangle\rangle_G + (10N\langle\langle (\text{tr } \phi^3)^2 \rangle\rangle_G + \\
&\quad + 10\langle\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^3 \rangle\rangle_G) + 2 \cdot 3 \cdot 5\langle\langle \text{tr } \phi^6 \rangle\rangle_G = \\
&= 360N^4 + 480N^2, \tag{III.1.3} \\
\langle \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^5 \rangle_G &= 45N^6 + 420N^4 + 480N^2.
\end{aligned}$$

Четырехточечные корреляционные функции:

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\text{tr } \phi)^4 \rangle\rangle_G &= 0, \\
\langle (\text{tr } \phi)^4 \rangle_G &= 3N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^2)^4 \rangle\rangle_G &= 48N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi^2)^4 \rangle_G &= N^8 + 12N^6 + 44N^4 + 48N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^3 \text{tr } \phi^3 \rangle\rangle_G &= 6N, \\
\langle (\text{tr } \phi)^3 \text{tr } \phi^3 \rangle_G &= 9N^3 + 6N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^3 \text{tr } \phi^5 \rangle\rangle_G &= 60N^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (\text{tr } \phi)^3 \text{tr } \phi^5 \rangle_G &= 30N^4 + 75N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^3 \text{tr } \phi^7 \rangle\rangle_G &= 420N^3 + 210N, \\
\langle (\text{tr } \phi)^3 \text{tr } \phi^7 \rangle_G &= 105N^5 + 630N^3 + 210N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^2)^3 \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= 384N^3 + 192N, \\
\langle (\text{tr } \phi^2)^3 \text{tr } \phi^4 \rangle_G &= 2N^9 + 37N^7 + 226N^5 + 488N^3 + 192N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^3)^3 \text{tr } \phi \rangle\rangle_G &= 648N^3 + 162N, \\
\langle (\text{tr } \phi^3)^3 \text{tr } \phi \rangle_G &= 108N^5 + 675N^3 + 162N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 (\text{tr } \phi^2)^2 \rangle\rangle_G &= 8N, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 (\text{tr } \phi^2)^2 \rangle_G &= N^5 + 6N^3 + 8N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 (\text{tr } \phi^3)^2 \rangle\rangle_G &= 72N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 (\text{tr } \phi^3)^2 \rangle_G &= 30N^4 + 75N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 (\text{tr } \phi^4)^2 \rangle\rangle_G &= 576N^3 + 192N, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 (\text{tr } \phi^4)^2 \rangle_G &= 4N^7 + 88N^5 + 661N^3 + 192N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi^2)^2 (\text{tr } \phi^3)^2 \rangle\rangle_G &= 576N^3 + 144N, \\
\langle (\text{tr } \phi^2)^2 (\text{tr } \phi^3)^2 \rangle_G &= 12N^7 + 171N^5 + 618N^3 + 144N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= 72N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^4 \rangle_G &= 2N^6 + 25N^4 + 78N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^6 \rangle\rangle_G &= 480N^3 + 240N, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^6 \rangle_G &= 5N^7 + 110N^5 + 590N^3 + 240N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi (\text{tr } \phi^2)^2 \text{tr } \phi^3 \rangle\rangle_G &= 72N^2, \\
\langle \text{tr } \phi (\text{tr } \phi^2)^2 \text{tr } \phi^3 \rangle_G &= 3N^6 + 30N^4 + 72N^2, \\
\langle\langle \text{tr } \phi (\text{tr } \phi^2)^2 \text{tr } \phi^5 \rangle\rangle_G &= 480N^3 + 240N, \\
\langle \text{tr } \phi (\text{tr } \phi^2)^2 \text{tr } \phi^5 \rangle_G &= 10N^7 + 145N^5 + 550N^3 + 240N, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^5 \rangle\rangle_G &= 540N^3 + 210N, \\
\langle (\text{tr } \phi)^2 \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^5 \rangle_G &= 105N^5 + 630N^3 + 210N, \\
\langle\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= 576N^3 + 192N, \\
\langle \text{tr } \phi \text{tr } \phi^2 \text{tr } \phi^3 \text{tr } \phi^4 \rangle_G &= 126N^5 + 627N^3 + 192N.
\end{aligned}$$

Пятиточечные корреляционные функции:

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\text{tr } \phi^2)^5 \rangle\rangle_G &= 384N^2, \\
\langle (\text{tr } \phi^2)^5 \rangle_G &= N^{10} + 20N^8 + 140N^6 + 400N^4 + 384N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^4 \text{tr } \phi^2 \rangle\rangle_G &= 0, \\
\langle (\text{tr } \phi)^4 \text{tr } \phi^2 \rangle_G &= 3N^4 + 12N^2, \\
\langle\langle (\text{tr } \phi)^4 \text{tr } \phi^4 \rangle\rangle_G &= 24N, \\
\langle (\text{tr } \phi)^4 \text{tr } \phi^4 \rangle_G &= 6N^5 + 75N^3 + 24N,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^3 \operatorname{tr} \phi^2 \operatorname{tr} \phi^3 \rangle\rangle_G &= 36N, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^3 \operatorname{tr} \phi^2 \operatorname{tr} \phi^3 \rangle_G &= 9N^5 + 60N^3 + 36N, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^3 \operatorname{tr} \phi^2 \operatorname{tr} \phi^5 \rangle\rangle_G &= 480N^2, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^3 \operatorname{tr} \phi^2 \operatorname{tr} \phi^5 \rangle_G &= 30N^6 + 315N^4 + 600N^2, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^3 \operatorname{tr} \phi^3 \operatorname{tr} \phi^4 \rangle\rangle_G &= 504N^2, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^3 \operatorname{tr} \phi^3 \operatorname{tr} \phi^4 \rangle_G &= 18N^6 + 345N^4 + 582N^2, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi^2)^3 (\operatorname{tr} \phi)^2 \rangle\rangle_G &= 48N, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi^2)^3 (\operatorname{tr} \phi)^2 \rangle_G &= N^7 + 12N^5 + 44N^3 + 48N, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^2 (\operatorname{tr} \phi^2)^2 \operatorname{tr} \phi^4 \rangle\rangle_G &= 384N^2, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^2 (\operatorname{tr} \phi^2)^2 \operatorname{tr} \phi^4 \rangle_G &= 2N^8 + 41N^6 + 278N^4 + 624N^2.
\end{aligned}$$

Шеститочечные корреляционные функции:

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^6 \rangle\rangle_G &= 0, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^6 \rangle_G &= 15N^3, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^5 \operatorname{tr} \phi^3 \rangle\rangle_G &= 0, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^5 \operatorname{tr} \phi^3 \rangle_G &= 45N^4 + 60N, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^5 \operatorname{tr} \phi^5 \rangle\rangle_G &= 120N, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^5 \operatorname{tr} \phi^5 \rangle_G &= 150N^5 + 675N^3 + 120N, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^4 (\operatorname{tr} \phi^2)^2 \rangle\rangle_G &= 0, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^4 (\operatorname{tr} \phi^2)^2 \rangle_G &= 3N^6 + 30N^4 + 72N^2, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^4 (\operatorname{tr} \phi^3)^2 \rangle\rangle_G &= 216N, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^4 (\operatorname{tr} \phi^3)^2 \rangle_G &= 144N^5 + 585N^3 + 216N, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi^2)^4 (\operatorname{tr} \phi)^2 \rangle\rangle_G &= 384N, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi^2)^4 (\operatorname{tr} \phi)^2 \rangle_G &= N^9 + 20N^7 + 140N^5 + 400N^3 + 384N, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^3 (\operatorname{tr} \phi^2)^2 \operatorname{tr} \phi^3 \rangle\rangle_G &= 288N, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^3 (\operatorname{tr} \phi^2)^2 \operatorname{tr} \phi^3 \rangle_G &= 9N^7 + 132N^5 + 516N^3 + 288N.
\end{aligned}$$

Семиточечные корреляционные функции:

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^6 \operatorname{tr} \phi^2 \rangle\rangle_G &= 0, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^6 \operatorname{tr} \phi^2 \rangle_G &= 15N^5 + 90N^3, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^6 \operatorname{tr} \phi^4 \rangle\rangle_G &= 0, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^6 \operatorname{tr} \phi^4 \rangle_G &= 30N^6 + 555N^4 + 360N^2, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^5 \operatorname{tr} \phi^2 \operatorname{tr} \phi^3 \rangle\rangle_G &= 0, \\
\langle (\operatorname{tr} \phi)^5 \operatorname{tr} \phi^2 \operatorname{tr} \phi^3 \rangle_G &= 45N^6 + 420N^4 + 480N^2, \\
\langle\langle (\operatorname{tr} \phi)^4 (\operatorname{tr} \phi^2)^3 \rangle\rangle_G &= 0,
\end{aligned}$$

$$\langle (\mathrm{tr} \phi)^4 (\mathrm{tr} \phi^2)^3 \rangle_G = 3N^8 + 54N^6 + 312N^4 + 576N^2.$$

Восьмиточечные корреляционные функции:

$$\begin{aligned} \langle\langle (\mathrm{tr} \phi)^8 \rangle\rangle_G &= 0, \\ \langle (\mathrm{tr} \phi)^8 \rangle_G &= 105N, \\ \langle\langle (\mathrm{tr} \phi)^7 \mathrm{tr} \phi^3 \rangle\rangle_G &= 0, \\ \langle (\mathrm{tr} \phi)^7 \mathrm{tr} \phi^3 \rangle_G &= 315N^5 + 630N^3, \\ \langle\langle (\mathrm{tr} \phi)^6 (\mathrm{tr} \phi^2)^2 \rangle\rangle_G &= 0, \\ \langle (\mathrm{tr} \phi)^6 (\mathrm{tr} \phi^2)^2 \rangle_G &= 15N^7 + 210N^5 + 720N^3. \end{aligned}$$

Девятиточечные корреляционные функции:

$$\begin{aligned} \langle\langle (\mathrm{tr} \phi)^8 \mathrm{tr} \phi^2 \rangle\rangle_G &= 0, \\ \langle (\mathrm{tr} \phi)^8 \mathrm{tr} \phi^2 \rangle_G &= 105N^6 + 840N^4. \end{aligned}$$

Десятиточечные корреляционные функции:

$$\begin{aligned} \langle\langle (\mathrm{tr} \phi)^{10} \rangle\rangle_G &= 0, \\ \langle (\mathrm{tr} \phi)^{10} \rangle_G &= 945N. \end{aligned}$$

1.8. Младшие препотенциалы $\mathcal{F}^{(p)}$: первые члены разложения по t . Препотенциал — это производящая функция для связанных корреляционных функций

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_G &= Nt_0 + \sum_{k=1}^{\infty} t_k \langle\langle \mathrm{tr} \phi^k \rangle\rangle_G + \frac{1}{2!} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} t_{k_1} t_{k_2} \langle\langle \mathrm{tr} \phi^{k_1} \mathrm{tr} \phi^{k_2} \rangle\rangle_G + \\ &+ \frac{1}{6!} \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} t_{k_1} t_{k_2} t_{k_3} \langle\langle \mathrm{tr} \phi^{k_1} \mathrm{tr} \phi^{k_2} \mathrm{tr} \phi^{k_3} \rangle\rangle_G + \dots \end{aligned}$$

Для корреляционных функций, взятых из п. III.1.7, необходимо восстановить зависимость от g и M и сделать подстановку $N = MS/g$, так что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_G(t|S) &= \sum_{p \geq 0} g^{2p-2} \mathcal{F}_G^{(p)}(t|S) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} \frac{t_{k_1} \dots t_{k_m}}{g^m} \left(\frac{g}{M} \right)^{\frac{k_1 + \dots + k_m}{2}} \langle\langle \mathrm{tr} \phi^{k_1} \dots \mathrm{tr} \phi^{k_m} \rangle\rangle_G \langle \mathrm{tr} \phi^2 \rangle_G = \\ &= \frac{Nt_0}{g} + \frac{N^2 t_2}{M} + \frac{g(2N^3 + N)t_4}{M^2} + \frac{g^2(5N^4 + 10N^2)t_6}{M^3} + \\ &+ \frac{g^3(14N^5 + 70N^3 + 21N)t_8}{M^4} + \frac{g^4(42N^6 + 420N^4 + 483N^2)t_{10}}{M^5} + \dots \\ &\dots + \frac{Nt_1^2}{2gM} + \frac{N^2 t_2^2}{M^2} + \frac{g(12N^3 + 3N)t_3^2}{2M^3} + \frac{g^2(36N^4 + 60N^2)t_4^2}{2M^4} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g^3(180N^5 + 600N^3 + 165N)t_5^2}{2M^5} + \dots + \frac{3N^2t_1t_3}{M^2} + \frac{g(10N^3 + 5N)t_1t_5}{M^3} + \\
& + \frac{g^2(35N^4 + 70N^2)t_1t_7}{M^4} + \frac{g^3(126N^5 + 630N^3 + 189N)t_1t_9}{M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g(8N^3 + 4N)t_2t_4}{M^3} + \frac{g^2(30N^4 + 60N^2)t_2t_6}{M^4} + \\
& + \frac{g^3(112N^5 + 560N^3 + 178N)t_2t_8}{M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g^2(45N^4 + 60N^2)t_3t_5}{M^4} + \frac{g^3(168N^5 + 630N^3 + 147N)t_3t_7}{M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g^3(144N^5 + 600N^3 + 156N)t_4t_6}{M^5} + \dots + \frac{8N^2t_2^3}{6M^3} + \dots + \frac{2Nt_1^2t_2}{2gM^2} + \\
& + \frac{12N^2t_1^2t_4}{2M^3} + \frac{g(60N^3 + 30N)t_1^2t_6}{2M^4} + \frac{g^2(280N^4 + 560N^2)t_1^2t_8}{2M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g(48N^3 + 24N)t_2^2t_4}{2M^4} + \frac{g^2(240N^4 + 480N^2)t_2^2t_6}{2M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g(72N^3 + 18N)t_2t_3^2}{2M^4} + \frac{g^2(432N^4 + 468N^2)t_3^2t_4}{2M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g^2(288N^4 + 480N^2)t_2t_4^2}{2M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{12N^2t_1t_2t_3}{M^3} + \frac{g(60N^3 + 30N)t_1t_2t_5}{M^4} + \frac{g^2(280N^4 + 560N^2)t_1t_2t_7}{M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g(72N^3 + 24N)t_1t_3t_4}{M^4} + \frac{g^2(360N^4 + 540N^2)t_1t_3t_6}{M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g^2(360N^4 + 540N^2)t_1t_4t_5}{M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g^2(360N^4 + 480N^2)t_2t_3t_5}{M^5} + \dots + \frac{48N^2t_2^4}{24M^4} + \dots + \frac{6Nt_1^3t_3}{6gM^3} + \\
& + \frac{60N^2t_1^3t_5}{6M^4} + \frac{g(420N^3 + 210N)t_1^3t_7}{6M^5} + \dots + \frac{g(384N^3 + 192N)t_2^3t_4}{6M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{8Nt_1^2t_2^2}{4gM^3} + \frac{72N^2t_1^2t_3^2}{4M^4} + \frac{g(576N^3 + 192N)t_1^2t_4^2}{4M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g(576N^3 + 144N)t_2^2t_3^2}{4M^5} + \dots + \frac{72N^2t_1^2t_2t_4}{2M^4} + \\
& + \frac{g(540N^3 + 210N)t_1^2t_3t_5}{2M^5} + \frac{g(480N^3 + 240N)t_1^2t_2t_6}{2M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{72N^2t_1t_2^2t_3}{2M^4} + \frac{g(480N^3 + 240N)t_1t_2^2t_5}{2M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g(576N^3 + 192N)t_1t_2t_3t_4}{M^5} + \dots + \frac{384N^2t_2^5}{120M^5} + \dots + \frac{24Nt_1^4t_4}{24M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{36Nt_1^3t_2t_3}{6gM^4} + \frac{480N^2t_1^3t_2t_5}{6M^5} + \frac{504N^2t_1^3t_3t_4}{6M^5} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{48Nt_1^2t_2^3}{12gM^4} + \dots + \frac{384N^2t_1^2t_2^2t_4}{4M^5} + \dots + \frac{Nt_1^5t_5}{gM^5} + \dots \\ & \dots + \frac{216Nt_1^4t_3^2}{48gM^5} + \dots + \frac{384Nt_1^2t_2^4}{48gM^5} + \dots + \frac{288Nt_1^3t_2^2t_3}{16gM^5} + \dots \end{aligned}$$

1.9. Функции $Z_G(t|N)$: первые члены разложения по t –

$$\begin{aligned} e^{-\frac{Nt_0}{g}} Z_G(t|N) = & 1 + \frac{N^2t_2}{M} + \frac{g(2N^3 + N)t_4}{M^2} + \frac{g^2(5N^4 + 10N^2)t_6}{M^3} + \\ & + \frac{g^3(14N^5 + 70N^3 + 21N)t_8}{M^4} + \frac{g^4(42N^6 + 420N^4 + 483N^2)t_{10}}{M^5} + \dots \\ & \dots + \frac{Nt_1^2}{2gM} + \frac{(N^4 + 2N^2)t_2^2}{2M^2} + \frac{g(12N^3 + 3N)t_3^2}{2M^3} + \\ & + \frac{g^2(4N^6 + 40N^4 + 61N^2)t_4^2}{2M^4} + \frac{g^3(180N^5 + 600N^3 + 165N)t_5^2}{2M^5} + \dots \\ & \dots + \frac{3N^2t_1t_3}{M^2} + \frac{g(10N^3 + 5N)t_1t_5}{M^3} + \frac{g^2(35N^4 + 70N^2)t_1t_7}{M^4} + \\ & + \frac{g^3(126N^5 + 630N^3 + 189N)t_1t_9}{M^5} + \dots \\ & \dots + \frac{g(2N^5 + 9N^3 + 4N)t_2t_4}{M^3} + \frac{g^2(5N^6 + 40N^4 + 60N^2)t_2t_6}{M^4} + \\ & + \frac{g^3(14N^7 + 182N^5 + 581N^3 + 178N)t_2t_8}{M^5} + \dots + \frac{g^2(45N^4 + 60N^2)t_3t_5}{M^4} + \\ & + \frac{g^3(168N^5 + 630N^3 + 147N)t_3t_7}{M^5} + \dots \\ & \dots + \frac{g^3(10N^7 + 169N^5 + 610N^3 + 156N)t_4t_6}{M^5} + \dots + \frac{(N^6 + 6N^4 + 8N^2)t_2^3}{6M^3} + \dots \\ & \dots + \frac{(N^3 + 2N)t_1^2t_2}{2gM^2} + \frac{(2N^4 + 13N^2)t_1^2t_4}{2M^3} + \frac{g(5N^5 + 70N^3 + 30N)t_1^2t_6}{2M^4} + \\ & + \frac{g^2(14N^6 + 350N^4 + 581N^2)t_1^2t_8}{2M^5} + \dots + \frac{g(2N^7 + 21N^5 + 58N^3 + 24N)t_2^2t_4}{2M^4} + \\ & + \frac{g^2(5N^8 + 80N^6 + 380N^4 + 480N^2)t_2^2t_6}{2M^5} + \dots \\ & \dots + \frac{g(12N^5 + 75N^3 + 18N)t_2t_3^2}{2M^4} + \frac{g^2(24N^6 + 450N^4 + 471N^2)t_3^2t_4}{2M^5} + \dots \\ & \dots + \frac{g^2(36N^6 + 360N^4 + 549N^2)t_2t_4^2}{2M^5} + \dots \\ & \dots + \frac{(3N^4 + 12N^2)t_1t_2t_3}{M^3} + \frac{g(10N^5 + 65N^3 + 30N)t_1t_2t_5}{M^4} + \\ & + \frac{g^2(35N^6 + 350N^4 + 560N^2)t_1t_2t_7}{M^5} + \dots \\ & \dots + \frac{g(6N^5 + 75N^3 + 24N)t_1t_3t_4}{M^4} + \frac{g^2(15N^6 + 390N^4 + 540N^2)t_1t_3t_6}{M^5} + \dots \\ & \dots + \frac{g^2(20N^6 + 380N^4 + 545N^2)t_1t_4t_5}{M^5} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \frac{g^2(45N^6 + 420N^4 + 480N^2)t_2t_3t_5}{M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{3N^2t_1^4}{24g^2M^2} + \frac{(N^8 + 12N^6 + 44N^4 + 48N^2)t_2^4}{24M^4} + \dots + \frac{(9N^3 + 6N)t_1^3t_3}{6gM^3} + \\
& + \frac{(30N^4 + 75N^2)t_1^3t_5}{6M^4} + \frac{g(105N^5 + 630N^3 + 210N)t_1^3t_7}{6M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g(2N^9 + 37N^7 + 226N^5 + 488N^3 + 192N)t_2^3t_4}{6M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(N^5 + 6N^3 + 8N)t_1^2t_2^2}{4gM^3} + \frac{(30N^4 + 75N^2)t_1^2t_3^2}{4M^4} + \\
& + \frac{g(4N^7 + 88N^5 + 661N^3 + 192N)t_1^2t_4^2}{4M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g(12N^7 + 171N^5 + 618N^3 + 144N)t_2^2t_3^2}{4M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(2N^6 + 25N^4 + 78N^2)t_1^2t_2t_4}{2M^4} + \frac{g(105N^5 + 630N^3 + 210N)t_1^2t_3t_5}{2M^5} + \\
& + \frac{g(5N^7 + 110N^5 + 590N^3 + 240N)t_1^2t_2t_6}{2M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(3N^6 + 30N^4 + 72N^2)t_1t_2^2t_3}{2M^4} + \\
& + \frac{g(10N^7 + 145N^5 + 550N^3 + 240N)t_1t_2^2t_5}{2M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{g(126N^5 + 627N^3 + 192N)t_1t_2t_3t_4}{M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(N^{10} + 20N^8 + 140N^6 + 400N^4 + 384N^2)t_2^5}{120M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(3N^4 + 12N^2)t_1^4t_2}{24gM^4} + \frac{(6N^5 + 75N^3 + 24N)t_1^4t_4}{24M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(9N^5 + 60N^3 + 36N)t_1^3t_2t_3}{6gM^4} + \frac{(30N^6 + 315N^4 + 600N^2)t_1^3t_2t_5}{6M^5} + \\
& + \frac{(18N^6 + 345N^4 + 582N^2)t_1^3t_3t_4}{6M^5} + \dots + \frac{(N^7 + 12N^5 + 44N^3 + 48N)t_1^2t_2^3}{12gM^4} + \dots \\
& \dots + \frac{(2N^8 + 41N^6 + 278N^4 + 624N^2)t_1^2t_2^2t_4}{4M^5} + \dots + \frac{15N^3t_1^6}{720g^3M^3} + \dots \\
& \dots + \frac{(45N^4 + 60N)t_1^5t_3}{120g^2M^4} + \frac{(150N^5 + 675N^3 + 120N)t_1^5t_5}{120gM^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(3N^6 + 30N^4 + 72N^2)t_1^4t_2^2}{48g^2M^4} + \frac{(144N^5 + 585N^3 + 216N)t_1^4t_3^2}{48gM^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(N^9 + 20N^7 + 140N^5 + 400N^3 + 384N)t_1^2t_2^4}{48gM^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(9N^7 + 132N^5 + 516N^3 + 288N)t_1^3t_2^2t_3}{16gM^5} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \frac{(15N^5 + 90N^3)t_1^6 t_2}{720g^3 M^4} + \frac{(30N^6 + 555N^4 + 360N^2)t_1^6 t_4}{720g^2 M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(45N^6 + 420N^4 + 480N^2)t_1^5 t_2 t_3}{60g^2 M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(3N^8 + 54N^6 + 312N^4 + 576N^2)t_1^4 t_2^3}{240g^2 M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{105N^4 t_1^8}{5760g^4 M^4} + \dots + \frac{(315N^5 + 630N^3)t_1^7 t_3}{720g^3 M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(15N^7 + 210N^5 + 720N^3)t_1^6 t_2^2}{180g^3 M^5} + \dots \\
& \dots + \frac{(105N^6 + 840N^4)t_1^8 t_2}{5760g^4 M^5} + \dots + \frac{945N^5 t_1^{10}}{10!g^5 M^5} + \dots .
\end{aligned}$$

Программа для MAPLE, генерирующая разложение интеграла

$$Z = \frac{\int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \phi^2 + \sum_{k=1} g^k t_k \text{Tr} \phi^k\right)}{\int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \phi^2\right)}$$

в ряд по g и t_k , написанная В. Пестуном, доступна по адресу <http://wwwth.itep.ru/progs/giv.mws> или [.../giv.tar](http://wwwth.itep.ru/progs/giv.tar). Она генерирует первые члены разложения функции Z в ряд и требует использования, по крайней мере, MAPLE 7.

2. НЕГАУССОВЫ СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ

Из условий Вирасоро в случае негауссова потенциала можно получить негауссовы плотности и полиплотности. Например, простейшая одноточечная плотность для рода нуль имеет вид

$$\rho_W^{(0|1)}(z) = \frac{W'(z) - y(z)}{2}, \quad (\text{III.2.1})$$

здесь

$$y_W^2(z) = W'(z)^2 - 4f_W^{(0|1)}(z). \quad (\text{III.2.2})$$

Из уравнения (I.3.40) следуют выражения для всех негауссовых (поли)плотностей, например

$$\rho_W^{(0|2)}(z, x) = \frac{1}{y(z)} \left(\partial_x \left(\frac{\rho_W^{(0|1)}(x) - \rho_W^{(0|1)}(z)}{x - z} \right) + f_W^{(0|2)}(z|x) \right) \quad (\text{III.2.3})$$

и

$$\rho_W^{(1|1)}(z) = \frac{1}{y(z)} (\rho_W^{(0|2)}(z|z) + f_W^{(1|1)}(z)). \quad (\text{III.2.4})$$

Можно показать явно, что функция $\rho_W^{(0|2)}(z, x)$ симметрична по z и x , если $f_W^{(0|2)}(z|x)$ определена формулой (I.3.39):

$$f_W^{(0|2)}(z|x) = \check{R}_W(z) \rho_W^{(0|1)}(x). \quad (\text{III.2.5})$$

Двухточечная функция может быть представлена в виде, явно симметричном по x и z , а именно:

$$\rho_W^{(0|2)}(z, x) = \frac{1}{2y(x)y(z)(x-z)^2} (W'(x)W'(z) - y(x)y(z) + (x-z)^2 \check{K}_W(x, z)F^{(0)} + \check{A}_W(x, z)F^{(0)}), \quad (\text{III.2.6})$$

где

$$\check{K}_W(x, z) = \sum_{n,m=0} nm T_n T_m \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} x^i z^j \frac{\partial}{\partial T_{n-i-2}} \frac{\partial}{\partial T_{m-j-2}} \quad (\text{III.2.7})$$

и

$$\check{A}_W(x, z) = 2 \sum n T_n \left(2 \frac{\partial}{\partial T_{n-2}} + \sum_{i=1}^{n-2} [(n-i)(x-z)(x^{i-1} - z^{i-1}) + (zx^{i-1} + xz^{i-1})] \frac{\partial}{\partial T_{n-i-2}} \right). \quad (\text{III.2.8})$$

Таким образом, двухточечная функция имеет гладкий предел при $x \rightarrow z$:

$$\begin{aligned} \rho_W^{(0|2)}(x, x) = & \frac{1}{2y(x)^2} \left(\frac{1}{8} (W^{(3)}W' - 2W''^2) - \right. \\ & - \frac{1}{4y(x)^2} \left(((W'')^2 + W'W^{(3)} - 2\check{R}_W''F^{(0)})(W'^2 - 4\check{R}_W'F^{(0)}) - \right. \\ & \left. \left. - 2(W'W'' - 2\check{R}_W'F^{(0)})^2 \right) + \check{K}_W(x, x)F^{(0)} + \check{B}(x)F^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (\text{III.2.9})$$

$$\check{B}(x) = \frac{1}{2} \sum n T_n \sum_{i=1}^{n-2} (4(n-i)(i-2) + (i-1)(i-4)) x^{i-2} \frac{\partial}{\partial T_{n-i-2}}, \quad (\text{III.2.10})$$

$$\langle\langle \text{tr } I \rangle\rangle_W^{(0)} = \sum_{i=1}^n \tilde{S}_i,$$

$$\langle\langle \text{tr } \phi^k \rangle\rangle_W^{(0)} = \sum_{i=1}^n \tilde{S}_i \alpha_i^k \quad \text{для } 0 \leq k \leq n, \quad (\text{III.2.11})$$

$$\langle\langle \text{tr } \phi^{n+1} \rangle\rangle_W^{(0)} = \sum_{i=1}^n \tilde{S}_i \alpha_i^{n+1} + \frac{1}{(n+1)T_{n+1}} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{S}_i \right)^2.$$

3. ПРЕПОТЕНЦИАЛ КИВ–ДВ: ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$\mathcal{F}_m^{\text{DV}}|_{t=0}$ ЧЕРЕЗ ГАУССОВЫ ПРЕПОТЕНЦИАЛЫ

Здесь мы из формулы (II.2.4) получим (обобщая результаты работы [23]) первые члены разложения препотенциала $\mathcal{F}_m^{\text{DV}}|_{t=0}$ по гауссовым препотенциалам. Наши результаты совпадают с результатами теории Зайберга–Виттена (см. [50], [51], [39]):

$$\mathcal{F}_1^{\text{DV}}|_{t=0} = - \sum_i S_i W(\alpha_i) + F_1|_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}}, \quad (\text{III.3.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^{\text{DV}}|_{t=0} = & -\frac{1}{2} \sum_{i < j} (S_i^2 - 4S_i S_j + S_j^2) \ln \alpha_{ij} - \frac{3}{4} \sum_i S_i^2 + \\ & + \left[F_2 - (S\partial)F_1 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{g^{2k-2}}{k!} (c\partial\partial)^k F_1^2 \right]_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3^{\text{DV}}|_{t=0} = & \left[F_3 - (S\partial)F_2 + \frac{1}{2} (S\partial)^2 F_1 + \right. \\ & + \sum_{k \geq 1} \frac{g^{2k-2}}{k!} (c\partial\partial)^k [F_1 F_2 - F_1 (S\partial)F_1] + \\ & \left. + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 2} \frac{g^{2k-4}}{k!} ((c\partial\partial)^k F_1^3 - 3F_1 (c\partial\partial)^k F_1^2) \right]_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4^{\text{DV}}|_{t=0} = & \left[F_4 - (S\partial)F_3 + \frac{1}{2} (S\partial)^2 F_2 - \frac{1}{6} (S\partial)^3 F_1 + \right. \\ & + \sum_{k \geq 1} \frac{g^{2k-2}}{k!} (c\partial\partial)^k \left[\frac{1}{2} F_2^2 + F_1 F_3 - F_2 (S\partial)F_1 - \right. \\ & - F_1 (S\partial)F_2 + \frac{1}{2} F_1 (S\partial)^2 F_1 + \frac{1}{2} [(S\partial)F_1]^2 \left. \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} \frac{g^{2k-4}}{k!} [(c\partial\partial)^k F_1^2 F_2 - 2F_1 (c\partial\partial)^k F_1 F_2 - F_2 (c\partial\partial)^k F_1^2] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} \frac{g^{2k-4}}{k!} [(c\partial\partial)^k F_1^2 (S\partial)F_1 - 2F_1 (c\partial\partial)^k F_1 (S\partial)F_1 - (S\partial)F_1 (c\partial\partial)^k F_1^2] + \\ & + \sum_{k \geq 3} \frac{1}{24} \frac{g^{2k-6}}{k!} [(c\partial\partial)^k F_1^4 + 12F_1^2 (c\partial\partial)^k F_1^2 - 4F_1 (c\partial\partial)^k F_1^3 - \\ & - 3((c\partial\partial) \otimes I + I \otimes (c\partial\partial))^k F_1^2 \otimes F_1^2] \left. \right]_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.4})$$

3.1. Явные формулы для $\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(p|m)}|_{t=0}$.

$m = 1$:

$$\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0|1)}|_{t=0} = - \sum_i S_i W(\alpha_i), \quad (\text{III.3.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(1|1)}|_{t=0} = & \sum_i \frac{S_i}{M_i} \left(-\frac{\langle\langle 4^1 \rangle\rangle^{(1)}}{4} \sigma_2^{(i)} + \frac{\langle\langle 3^2 \rangle\rangle^{(1)}}{2! \cdot 3^2} [\sigma_1^{(i)}]^2 \right) = \\ = & \sum_i \frac{S_i}{M_i} \left(-\frac{\sigma_2^{(i)}}{4} + \frac{3[\sigma_1^{(i)}]^2}{2! \cdot 3^2} \right) = \sum_i \frac{S_i}{12M_i} (2[\sigma_1^{(i)}]^2 - 3\sigma_2^{(i)}), \end{aligned} \quad (\text{III.3.6})$$

$$\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(2|1)}|_{t=0} = \sum_i \frac{S_i}{M_i^3} \left(-\frac{\langle\langle 8^1 \rangle\rangle^{(2)}}{8} \sigma_6^{(i)} + \frac{\langle\langle 3^1, 7^1 \rangle\rangle^{(2)}}{3 \cdot 7} \sigma_1^{(i)} \sigma_5^{(i)} + \frac{\langle\langle 4^1, 6^1 \rangle\rangle^{(2)}}{4 \cdot 6} \sigma_2^{(i)} \sigma_4^{(i)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\langle\langle 5^2 \rangle\rangle^{(2)}}{2! \cdot 5^2} [\sigma_3^{(i)}]^2 - \frac{\langle\langle 3^2, 6^1 \rangle\rangle^{(2)}}{2! \cdot 3^2 \cdot 6} [\sigma_1^{(i)}]^2 \sigma_4^{(i)} - \frac{\langle\langle 3^1, 4^1, 5^1 \rangle\rangle^{(2)}}{3 \cdot 4 \cdot 5} \sigma_1^{(i)} \sigma_2^{(i)} \sigma_3^{(i)} - \\
& - \frac{\langle\langle 4^3 \rangle\rangle^{(2)}}{3! \cdot 4^3} [\sigma_2^{(i)}]^3 + \frac{\langle\langle 3^2, 4^2 \rangle\rangle^{(2)}}{(2!)^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} [\sigma_1^{(i)}]^2 [\sigma_2^{(i)}]^2 - \\
& - \frac{\langle\langle 3^4, 4^1 \rangle\rangle^{(2)}}{4! \cdot 3^4 \cdot 4} [\sigma_1^{(i)}]^4 \sigma_2^{(i)} + \frac{\langle\langle 3^6 \rangle\rangle^{(2)}}{6! \cdot 3^6} [\sigma_1^{(i)}]^6 \Big). \tag{III.3.7}
\end{aligned}$$

$m = 2$:

$$\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0|2)}|_{t=0} = -\frac{1}{2} \sum_{i < j} (S_i^2 - 4S_i S_j + S_j^2) \ln \alpha_{ij} - \frac{3}{4} \sum_i S_i^2, \tag{III.3.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(1|2)}|_{t=0} = & \sum_i \frac{S_i^2}{M_i^2} \left(-\frac{\langle\langle 6^1 \rangle\rangle^{(1)}}{6} \sigma_4^{(i)} + \frac{\langle\langle 4^2 \rangle\rangle^{(1)}}{2! \cdot 4^2} [\sigma_2^{(i)}]^2 + \frac{\langle\langle 3, 5 \rangle\rangle^{(1)}}{3 \cdot 5} \sigma_1^{(i)} \sigma_3^{(i)} - \right. \\
& - \frac{\langle\langle 3^2, 4 \rangle\rangle^{(1)}}{2! \cdot 3^2 \cdot 4} [\sigma_1^{(i)}]^2 \sigma_2^{(i)} + \left. \frac{\langle\langle 3^4 \rangle\rangle^{(1)}}{4! \cdot 3^4} [\sigma_1^{(i)}]^4 \right) - \\
& - \sum_{i \neq j} \frac{S_i S_j}{M_i^2} \left(\frac{\langle\langle 4^1 \rangle\rangle^{(1)}}{2\alpha_{ij}^4} + \frac{2\langle\langle 3^2 \rangle\rangle^{(1)}}{9\alpha_{ij}^3} \sigma_1^{(i)} - \frac{\langle\langle 2, 4 \rangle\rangle^{(1)}}{4\alpha_{ij}^2} \sigma_2^{(i)} + \right. \\
& + \frac{\langle\langle 2^1, 3^2 \rangle\rangle^{(1)}}{2! \cdot 3^2 \alpha_{ij}^2} [\sigma_1^{(i)}]^2 + \frac{2\langle\langle 1, 5 \rangle\rangle^{(1)}}{5\alpha_{ij}} \sigma_3^{(i)} + \frac{2\langle\langle 1, 3, 4 \rangle\rangle^{(1)}}{3 \cdot 4\alpha_{ij}} \sigma_1^{(i)} \sigma_2^{(i)} + \\
& \left. + \frac{2\langle\langle 1, 3^3 \rangle\rangle^{(1)}}{3! \cdot 3^3 \alpha_{ij}} [\sigma_1^{(i)}]^3 \right) + \sum_{i \neq j} \frac{S_i S_j}{M_i M_j \alpha_{ij}^4} [\langle\langle 1^2 \rangle\rangle^{(0)}]^2. \tag{III.3.9}
\end{aligned}$$

$m = 3$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0|3)}|_{t=0} = & \left[F_3 - (S\partial)F_2 + \frac{1}{2}(S\partial)^2 F_1 + \sum_{k \geq 1} \frac{g^{2k-2}}{k!} (c\partial\partial)^k [F_1 F_2 - F_1 (S\partial)F_1] + \right. \\
& + \left. \frac{1}{6} \sum_{k \geq 2} \frac{g^{2k-4}}{k!} ((c\partial\partial)^k F_1^3 - 3F_1 (c\partial\partial)^k F_1^2) \right]_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}} = \\
= & \sum_{i=1}^n \left[S_i^3 \left(\frac{2t_4^{(i)}}{M_i^2} + \frac{6[t_3^{(i)}]^2}{M_i^3} \right) - (S\partial)S_i^2 \left(\frac{t_2^{(i)}}{M_i} + \frac{3t_1^{(i)}t_3^{(i)}}{M_i^2} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2}(S\partial)^2 S_i \frac{[t_1^{(i)}]^2}{2M_i} \right]_{t_k^{(i)} = -T_k^{(i)}} = \sum_i \left(\frac{S_i^3}{M_i} \left(-\frac{2\sigma_2^{(i)}}{4} + \frac{6[\sigma_1^{(i)}]^2}{3^2} \right) - \right. \\
& - \sum_{j \neq i} \frac{2S_i^2 S_j}{M_i} \left(\frac{1}{2\alpha_{ij}^2} + \frac{\sigma_1^{(i)}}{\alpha_{ij}} \right) + \sum_{j, k \neq i} \frac{2S_i S_j S_k}{M_i \alpha_{ij} \alpha_{ik}} \Big) = \\
= & \frac{2}{3} \sum_i \frac{S_i^3}{M_i} \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_{ij}^2} + \frac{5}{4} \sum_{\substack{j < k \\ j, k \neq i}} \frac{1}{\alpha_{ij} \alpha_{ik}} \right) + \\
& + \sum_{i \neq j} S_i^2 S_j \left(\frac{2}{M_j \alpha_{ij}^2} - \frac{3}{M_i \alpha_{ij}^2} - \frac{2}{\alpha_{ij}} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{\alpha_{ik}} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ 4 \sum_{i < j < k} S_i S_j S_k \left(\frac{1}{M_i \alpha_{ij} \alpha_{ik}} + \frac{1}{M_j \alpha_{ji} \alpha_{jk}} + \frac{1}{M_k \alpha_{ki} \alpha_{kj}} \right). \quad (\text{III.3.10})$$

Согласно предположению Р. Дийкграафа и К. Вафы [25] это выражение совпадает (после замены $S_{[51]} = 2S$, $\mathcal{F}_{[51]} = 2\mathcal{F}$) с результатами вычислений [51] в рамках теории Зайберга–Виттена [35]–[39]. Согласно [51]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0|3)}|_{t=0} &= \sum_i u_i S_i^3 + \sum_{i \neq j} u_{ij} S_i^2 S_j + \sum_{i < j < k} u_{ijk} S_i S_j S_k, \\ u_i &= \frac{1}{6} \left(- \sum_{j \neq i} \frac{1}{M_j \alpha_{ij}^2} + \frac{1}{4M_i} \sum_{j < k} \frac{1}{\alpha_{ij} \alpha_{ik}} \right) = \\ &= \frac{1}{6M_i} \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_{ij}^2} + \frac{5}{4} \sum_{\substack{j < k \\ j, k \neq i}} \frac{1}{\alpha_{ij} \alpha_{ik}} \right), \\ u_{ij} &= \frac{1}{4} \left(- \frac{3}{M_i \alpha_{ij}^2} + \frac{2}{M_j \alpha_{ij}^2} - \frac{2}{M_i \alpha_{ij}} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{\alpha_{ik}} \right), \\ u_{ijk} &= \frac{1}{M_i \alpha_{ij} \alpha_{ik}} + \frac{1}{M_j \alpha_{ji} \alpha_{jk}} + \frac{1}{M_k \alpha_{ki} \alpha_{kj}}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.11})$$

и два выражения¹³⁾ для u_i совпадают вследствие правила сумм [39]

$$\sum_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_{ij}^2 M_j} = - \frac{1}{M_i} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_{ij}^2} - \frac{1}{M_i} \sum_{\substack{j < k \\ j, k \neq i}} \frac{1}{\alpha_{ij} \alpha_{ik}} = 0,$$

полученного с помощью суммирования по всем вычетам α_i в интеграле

$$\oint_{\alpha_i} \frac{dx}{(x - \alpha_i)^2 P_n(x)} = \oint_0 \frac{dz}{z^3 \prod_{j \neq i} (\alpha_{ij} + z)} = \frac{1}{M_i} \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_{ij}^2} + \sum_{\substack{j < k \\ j, k \neq i}} \frac{1}{\alpha_{ij} \alpha_{ik}} \right).$$

3.2. Пример $n = 2$ (кубический препотенциал $W(z)$, $3T_3 = \kappa$, $M_1 = -M_2 = \kappa\alpha_{12}$). В случае $n = 2$ единственный нетривиальный параметр σ удовлетворяет соотношению $\sigma_1^{(1)} = -\sigma_1^{(2)} = 1/\alpha_{12}$, и, используя приведенные выше формулы, мы с легкостью восстанавливаем старый результат [23]:

$$\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0|1)}|_{t=0} = -S_1 W(\alpha_1) - S_2 W(\alpha_2), \quad (\text{III.3.12})$$

$$\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(1|1)}|_{t=0} = \frac{S_1 - S_2}{6\kappa\alpha_{12}^3}, \quad (\text{III.3.13})$$

$$\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(2|1)}|_{t=0} = \frac{(S_1 - S_2) \langle\langle 3^6 \rangle\rangle^{(2)}}{6! \cdot 3^6 \kappa^3 \alpha_{12}^9} = \frac{35(S_1 - S_2)}{6\kappa^3 \alpha_{12}^9}, \quad (\text{III.3.14})$$

¹³⁾ Тожественность (III.3.10) и (III.3.11) была впервые продемонстрирована В. Пестуном (январь 2003, неопубликовано).

$$\mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0|2)}|_{t=0} = -\frac{1}{2}(S_1^2 - 4S_1S_2 + S_2^2) \ln \alpha_{12}, \quad (\text{III.3.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(1|2)}|_{t=0} &= \frac{(S_1^2 + S_2^2) \langle\langle 3^4 \rangle\rangle^{(1)}}{4! \cdot 3^4 \kappa^2 \alpha_{12}^6} - \\ &\quad - \frac{2S_1S_2}{\kappa^2 \alpha_{12}^6} \left(\frac{\langle\langle 4^1 \rangle\rangle^{(1)}}{2} + \frac{2\langle\langle 3^2 \rangle\rangle^{(1)}}{9} + \frac{\langle\langle 2, 3^2 \rangle\rangle^{(1)}}{2! \cdot 3^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\langle\langle 1^1, 3^3 \rangle\rangle^{(1)}}{3! \cdot 3^3} + \left[\langle\langle 1^2 \rangle\rangle^{(0)} \right]^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\kappa^2 \alpha_{12}^6} \left(\frac{4536}{8 \cdot 3^5} (S_1^2 + S_2^2) - \left(1 + \frac{4 \cdot 3}{9} + \frac{2 \cdot 18}{18} + \frac{4 \cdot 162}{3^4} + 2 \right) S_1S_2 \right) = \\ &= \frac{1}{\kappa^2 \alpha_{12}^6} \left(\frac{7}{3} (S_1^2 + S_2^2) - \frac{31}{3} S_1S_2 \right), \end{aligned} \quad (\text{III.3.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{DV}}^{(0|3)}|_{t=0} &= \frac{6}{3^2} \frac{S_1^3 - S_2^3}{\kappa \alpha_{12}^3} - \frac{5S_1S_2(S_1 - S_2)}{\kappa \alpha_{12}^3} = \\ &= \frac{2}{3\kappa \alpha_{12}^3} \left(S_1^3 - S_2^3 - \frac{15}{2} S_1S_2(S_1 - S_2) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.3.17})$$

IV. КОММЕНТАРИИ

1. ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО СУММ

(II.1.25): ВЫВОД И ПРИМЕНЕНИЕ

Обобщенное правило сумм (II.1.25) может быть выведено многими различными способами (некоторые из которых можно найти, например, в работе [41]). Здесь мы представим еще один возможный вывод. Для простоты мы положим M равным 1. Зависимость от M можно легко восстановить.

Из первого уравнения иерархии цепочки Тоды можно получить рекуррентное соотношение для плотности

$$\rho_{N+1}(x) + \rho_{N-1}(x) - 2\rho_N(x) = \frac{\partial_x^2 \rho_N(x)}{N}. \quad (\text{IV.1.1})$$

Непосредственно из этого уравнения можно вычислить все плотности с $N > 1$, но мы воспользуемся другим подходом. А именно, мы введем производящую функцию для гауссовых плотностей

$$I_\lambda(x) = \sum_{N=1}^{\infty} \rho_N(x) \lambda^N. \quad (\text{IV.1.2})$$

Как легко видеть, из уравнения (IV.1.1) следует дифференциальное уравнение для этой производящей функции. Точнее говоря, мы имеем

$$2 \operatorname{sh}^2(\varphi) \partial_\varphi J_{e^{2\varphi}}(x) = \partial_x^2 J_{e^{2\varphi}}(x), \quad (\text{IV.1.3})$$

где

$$J_{e^{2\varphi}}(x) = \operatorname{sh}^2(\varphi) I_{e^{2\varphi}}(x). \quad (\text{IV.1.4})$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к функции J , получаем

$$2 \operatorname{sh}^2(\varphi) \partial_\varphi \hat{J}(p) = p^2 \hat{J}(p), \quad (\text{IV.1.5})$$

где $\hat{J}(p)$ – образ обратного преобразования Лапласа

$$\hat{J}(x) = \int_0^\infty e^{-xp} \hat{J}(p) dp. \quad (\text{IV.1.6})$$

Это дифференциальное уравнение можно решить, получив общее решение вида

$$\hat{I}_{e^{2\varphi}}(p) = \frac{\exp\left(-\frac{p^2 \operatorname{cth}(\varphi)}{2}\right)}{\operatorname{sh}^2(\varphi)} f(p). \quad (\text{IV.1.7})$$

Для того чтобы найти постоянную интегрирования $f(p)$, можно определить производящую функцию для $N = 1$ и сравнить ее с явно вычисленной. Таким образом получим $f(p) = 1/4$. Чтобы получить обобщенное правило сумм (II.1.25), необходимо рассмотреть образ при преобразовании Лапласа функции I_λ ,

$$I_\lambda(p) = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \exp\left(\frac{p^2}{2} \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right), \quad (\text{IV.1.8})$$

т.е. интеграл

$$\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \int_0^\infty e^{-px} \exp\left(\frac{p^2}{2} \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right), \quad (\text{IV.1.9})$$

который расходится. Для того чтобы иметь возможность работать с этим интегралом, необходимо рассматривать его как формальный ряд по $1/x$. Тогда после простого вычисления получаем

$$\begin{aligned} I_\lambda(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x\lambda}{(1-\lambda)^2} \int \frac{1}{x^2 - t^2 \frac{1+\lambda}{1-\lambda}} e^{-t^2/2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{N=1}^\infty x \int \left(\left[\frac{x^2 + t^2}{x^2 - t^2} \right]^N - 1 \right) e^{-t^2/2} \frac{dt}{2t^2} \lambda^N, \end{aligned} \quad (\text{IV.1.10})$$

и коэффициенты разложения в ряд по λ дают требуемое правило сумм. К сожалению, мы не знаем обобщения этого или какого-либо другого вывода на случай гауссовых полиплотностей, равно как и на случай негауссовых (поли)плотностей.

Используя правило сумм, легко можно восстановить разложение по родам. Вводя переменную $\tilde{x}$ такую, что $\tilde{x}^2 = x^2/N$, получаем разложение по родам в виде разложения

по $1/N^2$:

$$\begin{aligned}
 \rho_N(x) &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\left[\frac{x^2 + t^2}{x^2 - t^2} \right]^N - 1 \right) e^{-t^2/2} \frac{dt}{2t^2} = \\
 &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int \left(e^{2Nt^2/x^2} \exp \left(N \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{t^2}{x^2} \right)^{2k+1} \frac{2}{(2k+1)} \right) - 1 \right) e^{-t^2/2} \frac{dt}{2t^2} = \\
 &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int \left(e^{2t^2/\tilde{x}^2} \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{t^2}{\tilde{x}^2} - 1 \right)^{2k+1} \frac{2}{(2k+1)N^{2k}} \right) \right) e^{-t^2/2} \frac{dt}{2t^2} = \\
 &= \frac{x\sqrt{\tilde{x}^2 - 4}}{2\tilde{x}\sqrt{2\pi}} \int \left(\exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{t^2}{\tilde{x}^2 - 4} \right)^{2k+1} \frac{2}{(2k+1)N^{2k}} \right) - e^{-2t^2/(\tilde{x}^2 - 4)} \right) e^{-t^2/2} \frac{dt}{t^2}.
 \end{aligned} \tag{IV.1.11}$$

Разложение этой формулы в ряд по $1/N^2$ задает разложение по родам, и, таким образом, можно получить все выражения из п. III.1.2.

Используя правило сумм, можно получить выражение для коэффициента при старших степенях полинома Q в формуле (III.1.1). Для рода k имеем

$$\begin{aligned}
 \rho^{(1|k)} &= \frac{N\tilde{x}\sqrt{\tilde{x}^2 - 4}}{\tilde{x}} \left(\frac{(4k-1)!!}{(2k+1)(\tilde{x}^2 - 4)^{2k+1}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(4k+1)!!}{(\tilde{x}^2 - 4)^{2k+2}} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i+1)(2k-2i+1)} + \dots \right) = \\
 &= \frac{N\tilde{x}}{\tilde{x}y^{6k-1}} \left(\frac{(4k-1)!!y^{2k-2}}{(2k+1)} + y^{2k-4}(4k+1)!! \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i+1)(2k-2i+1)} + \dots \right) = \\
 &= \frac{N\tilde{x}}{\tilde{x}y^{6k-1}} \left(\frac{(4k-1)!!\tilde{x}^{2k-2}}{(2k+1)} + \tilde{x}^{2k-4} \left[-\frac{4(k-1)(4k-1)!!}{(2k+1)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (4k+1)!! \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i+1)(2k-2i+1)} \right] + O(\tilde{x}^{2k-6}) \right),
 \end{aligned} \tag{IV.1.12}$$

где $y^2 = \tilde{x}^2 - 4$.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛИПЛОТНОСТЕЙ В ГАУССОВОЙ МОДЕЛИ

В принципе все полиплотности в гауссовой модели можно вывести шаг за шагом из условий Вирасоро, как это сделано для нескольких первых условий в п. III.1.4. Но хотелось бы получить выражения типа (II.1.25), которые объединяют все рода. Здесь мы рассмотрим только двухточечную функцию.

Для двухточечной функции существует правило сумм при $N = 1$:

$$\oint \oint \rho^{(2)}(z_1, z_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2} dz_1 dz_2 = \begin{cases} (2k_1 + 2k_2 - 1)!! & \text{при } k_1, k_2 \text{ нечетных,} \\ (2k_1 + 2k_2 - 1)!! - (2k_1 - 1)!! - (2k_2 - 1)!! & \text{при } k_1, k_2 \text{ четных,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{IV.2.1}$$

Условия Вирасоро для гауссова потенциала можно объединить следующим образом:

$$(x\widehat{\nabla}_x - \partial_0)Z_N = \widehat{\nabla}_x^2 Z_N. \quad (\text{IV.2.2})$$

Тогда для несвязной двухточечной резольвенты получаем

$$\rho^{(2)}(x, x) + \rho^{(1)}(x)^2 = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\left[\frac{x^2 + t^2}{x^2 - t^2} \right]^N - 1 - 2N \frac{t^2}{x^2} \right) e^{-t^2/2} \frac{dt}{2t^2}. \quad (\text{IV.2.3})$$

Из первого уравнения иерархии цепочки Тоды (I.2.13) легко вывести следующее уравнение, которому должна удовлетворять двухточечная резольвента:

$$\rho_{N+1}^{(2)}(x, y) + \rho_{N-1}^{(2)}(x, y) - 2\rho_N^{(2)}(x, y) = \frac{(\partial_x + \partial_y)^2 \rho_N^{(2)}(x, y)}{N} - \frac{\partial_x^2 \rho_N^{(1)}(x) \partial_y^2 \rho_N^{(1)}(y)}{N^2}. \quad (\text{IV.2.4})$$

Это уравнение совместно с известными значениями младших плотностей, т.е. они удовлетворяют этому уравнению в лидирующем порядке по $1/N$.

Используя вычисления с гармоническим осциллятором из работы [41], находим

$$\eta_N^{(2)}(y, z) = \eta_N^{(1)}(y + z) - G_N(y, z), \quad (\text{IV.2.5})$$

где

$$G_N(y, z) = \exp\left(\frac{z^2 + y^2}{2}\right) \left[\sum_{n=0}^{N-1} B(n, n; y) B(n, n; z) + 2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{s=n+1}^{N-1} B(n, s; y) B(n, s; z) \right]. \quad (\text{IV.2.6})$$

Здесь $B(n, s; x)$ — это некоторая (гипергеометрическая) функция, задающая подходящий матричный элемент для гармонического осциллятора:

$$B(n, s; x) = \sqrt{n!s!} \sum_{i=0}^n \frac{x^{n+s-2i}}{i!(n-i)!(s-i)!}. \quad (\text{IV.2.7})$$

Используя преобразование Лапласа, можно получить двухточечную резольвенту

$$\rho^{(2)}(s, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(ys+zt)} \eta^{(2)}(y, z) dy dz. \quad (\text{IV.2.8})$$

Используя интегральное представление полиномов Эрмита H_n ,

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} e^{-z^2/2 - zx}, \quad (\text{IV.2.9})$$

можно представить функции $G_N(y, z)$ в виде четырехкратных контурных интегралов:

$$G_N(y, z) = \exp\left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right) \times \\ \times \left(\oint dz \right)^4 \sum_{s, n=0}^{N-1} \frac{s!n!}{(z_1 z_3)^{n+1} (z_2 z_4)^{s+1}} e^{z_1 z_2 + z_3 z_4 - (z_1 + z_2)y - (z_3 + z_4)z}. \quad (\text{IV.2.10})$$

Для производящей функции имеем

$$\begin{aligned}
 K(\lambda) &= \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{2}\right) \sum_{N=1}^{\infty} G_N \lambda^N = \\
 &= \left(\oint dz\right)^4 \int_0^\infty \int_0^\infty dp_1 dp_2 e^{-p_1 - p_2} \frac{1}{p_1 - z_1 z_3} \frac{1}{p_2 - z_2 z_4} \times \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{1 - \frac{\lambda p_1 p_2}{z_1 z_2 z_3 z_4}} - \frac{1}{1 - \frac{\lambda p_2}{z_2 z_4}} - \frac{1}{1 - \frac{\lambda p_1}{z_1 z_3}} + \frac{1}{1 - \lambda} \right] e^{z_1 z_2 + z_3 z_4 - (z_1 + z_2)y - (z_3 + z_4)z}.
 \end{aligned} \tag{IV.2.11}$$

Полная производящая функция двухточечных корреляционных функций имеет вид

$$\begin{aligned}
 \sum_{N=1}^{\infty} \eta_N^{(2)} \lambda^N &= \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2} \exp\left(\frac{(y + z)^2}{2} \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}\right) - \exp\left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right) K(\lambda) = \\
 &= \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2} \exp\left((y^2 + z^2) \frac{1 + \lambda}{2(1 - \lambda)}\right) \times \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{zy}{1 - \lambda}\right)^k \sum_{m=0}^k \left(\frac{\lambda y z}{1 - \lambda}\right)^m \frac{1}{m!} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda z y}{1 - \lambda}\right)^k \sum_{m=0}^k \left(\frac{y z}{1 - \lambda}\right)^m \frac{1}{m!} \right).
 \end{aligned} \tag{IV.2.12}$$

Легко проверить, что эта формула дает ответ, согласованный с формулой (IV.2.6) для N от 1 до 3. Эта формула гораздо сложнее, чем соответствующее выражение (IV.1.8) для одноточечной плотности, и получение из нее разложения по родам для двухточечной функции нетривиально.

3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Существует бесконечное множество непрерывных пределов, и только очень небольшое их количество было до сих пор хотя бы частично исследовано. Среди них:

наивный предел больших N (планарный, или 'т хоофовский) [54], [55],

двойной скейлинговый предел [56], [37], [38],

предел Беренштейна–Малдасены–Настазе [57],

предел Дийкграафа–Вафы [25], [49], [47].

В каждом из этих пределов ЭММКР переходит в некоторую другую матричную модель. Поэтому естественно сначала исследовать сами эти матричные модели и лишь потом проводить детальный и обоснованный анализ множества непрерывных пределов. Это послужит темой отдельной публикации.

К тому же отдельные представители этих других семейств матричных моделей тождественно эквивалентны ЭММКР, что позволяет проводить анализ пределов в рамках этих семейств: различные непрерывные пределы связаны с различными обобщениями ЭММКР. Одним из примеров является семейство обобщенных моделей Концевича [14], [6], в котором *гауссова модель Концевича* совпадает с ЭММКР.

Благодарности. Мы хотим поблагодарить Василия Пестуна за сотрудничество на начальной стадии этого проекта, Юрия Макеенко за важные комментарии о статусе задачи и Наталью Амбург, Леонида Чехова и Антона Хорошкина за полезные обсуждения.

Наша работа была частично поддержана Федеральной программой министерства России по промышленности, науке и технологиям (грант № 40.052.1.1.1112), а также грантами INTAS № 00-334 (А.С.А), РФФИ № 03-02-17373 (А.С.А), грантом РФФИ для поддержки молодых ученых (А.С.А), грантом фонда “Династия” и МЦФФМ (А.С.А.), грантом Volkswagen Stiftung (А.Д.М. и А.Ю.М.), грантом INTAS № 00-561 (А.Д.М. и А.Ю.М.), грантом РФФИ № 04-02-16538 (А.Д.М.), грантом поддержки ведущих научных школ № 96-15-96798 (А.Д.М.), грантом РФФИ № 04-02-16880 (А.Ю.М.).

Список литературы

- [1] *А. М. Поляков.* Калибровочные поля и струны. Черногловка: ИТФ им. Л. Д. Ландау, 1995; *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990; *А. Ю. Морозов.* УФН. 1992. Т. 162. С. 83; *J. Polchinski.* String Theory. V. 1, 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998; *А. В. Маршakov.* УФН. 2002. Т. 172. С. 977; hep-th/0212114.
- [2] *A. Gerasimov, S. Khoroshkin, D. Lebedev, A. Mironov, A. Morozov.* Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 2589; hep-th/9405011; *А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, Л. Винэ.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 1. С. 119; *С. М. Харчев, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов.* ТМФ. 1995. Т. 104. № 1. С. 129; *А. Д. Миронов.* ТМФ. 1998. Т. 114. № 2. С. 163; *A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 2002. V. 524. P. 217.
- [3] *M. L. Mehta.* Random matrices. N. Y.: Academic Press, 1991; *E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J.-B. Zuber.* Commun. Math. Phys. 1978. V. 59. P. 35; *D. Bessis.* Commun. Math. Phys. 1979. V. 69. P. 147; *D. Bessis, C. Itzykson, J.-B. Zuber.* Adv. Appl. Math. 1980. V. 1. P. 109; *C. Itzykson, J.-B. Zuber.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 411.
- [4] *A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 357. P. 565.
- [5] *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Orlov, A. Zabrodin.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 366. P. 569.
- [6] *А. Ю. Морозов.* УФН. 1994. Т. 167. С. 3; hep-th/9303139; Matrix Models as Integrable Systems. hep-th/9502091.
- [7] *A. Mironov.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 4355; *А. Д. Миронов.* ЭЧАЯ. 2002. Т. 33. С. 1051; *I. K. Kostov.* Conformal field theory techniques in random matrix models. hep-th/9907060.
- [8] *A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1991. V. 265. P. 99; *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, S. Pakuliak.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 404. P. 717; *А. Д. Миронов, С. З. Пакуляк.* ТМФ. 1993. Т. 95. № 2. С. 317.
- [9] *I. Kostov.* Phys. Lett. B. 1992. V. 297. P. 74.
- [10] *J. Alfaro, I. K. Kostov.* Generalized Hirota Equations in Models of 2D Quantum Gravity. hep-th/9604011.
- [11] *M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5106; *I. K. Kostov, I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin.* τ -function for analytic curves. In: Random Matrices and Their Applications. MSRI Pubs. V. 40. Eds. P. M. Bleher, A. R. Its. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. P. 285; hep-th/0005259; *A. Boyarsky, A. Marshakov, O. Ruchayskiy, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Phys. Lett. B. 2001. V. 515. P. 483; *I. Krichever, A. Marshakov, A. Zabrodin.* Integrable structure of the Dirichlet boundary problem in multiply-connected domains. hep-th/0309010.
- [12] *М. Л. Концевич.* Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 50.

- [13] *E. Witten*. On the Kontsevich model and other models of two-dimensional gravity. In: Proc. of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics (New York, 1991). Eds. S. Catto, A. Rocha. River Edge: World Sci. Publishing, 1992. V. 1, 2. P. 176; *A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov*. Phys. Lett. B. 1992. V. 274. P. 280.
- [14] *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin*. Nucl. Phys. B. 1992. V. 380. P. 181; Phys. Lett. B. 1992. V. 275. P. 311.
- [15] *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov*. Nucl. Phys. B. 1993. V. 397. P. 339.
- [16] *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov*. Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 1047.
- [17] *L. Chekhov, Yu. Makeenko*. Phys. Lett. B. 1992. V. 278. P. 271; *L. Chekhov*. Matrix Models and Geometry of Moduli Spaces. hep-th/9509001; *S. Kharchev*. Kadomtsev-Petviashvili hierarchy and generalized Kontsevich model. hep-th/9810091.
- [18] *E. P. Wigner*. Ann. Math. 1951. V. 53. P. 36.
- [19] *F. J. Dyson*. J. Math. Phys. 1962. V. 3. P. 140; *D. Gross, E. Witten*. Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 446; *T. Eguchi, H. Kawai*. Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1063; *D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, A. Nica*. Free Random Variables. CRM Monograph Series. V. 70. Providence, RI: AMS, 1992; *P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin*. Phys. Rep. 1995. V. 254. P. 1.
- [20] *F. David*. Nucl. Phys. B. 1985. V. 257. P. 45; *V. A. Kazakov, I. K. Kostov, A. A. Migdal*. Phys. Lett. B. 1985. V. 157. P. 295.
- [21] *A. Givental*. Semisimple Frobenius structures at higher genus. math.AG/0008067.
- [22] *J. S. Song, Y. S. Song*. J. Math. Phys. 2004. V. 45. P. 4539; hep-th/0103254; *A. Alexandrov*. J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 5268.
- [23] *F. David*. Phys. Lett. B. 1993. V. 302. P. 403; hep-th/9212106; *G. Bonnet, F. David, B. Eynard*. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 6739; cond-mat/0003324; *A. Klemm, M. Mariño, S. Theisen*. JHEP. 2003. V. 0303. P. 051.
- [24] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
- [25] *R. Dijkgraaf, C. Vafa*. Nucl. Phys. B. 2002. V. 644. P. 3; P. 21; hep-th/0208048.
- [26] *A. A. Migdal*. Phys. Rep. 1983. V. 102. P. 199; *J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, Yu. Makeenko*. Phys. Lett. B. 1990. V. 251. P. 517.
- [27] *E. Witten*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 460. P. 335.
- [28] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky*. Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27; 1983. V. 120. P. 166; Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2567; Nucl. Phys. B. 1984. V. 234. P. 106; J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 172.
- [29] *M. Henneaux, C. Teitelboim*. Quantization of Gauge Systems. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992; *J. Gomis, J. Paris, S. Samuel*. Phys. Rep. 1995. V. 259. P. 1.
- [30] *E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky*. Phys. Lett. B. 1975. V. 55. P. 224; *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky*. Phys. Lett. B. 1977. V. 69. P. 309.
- [31] *M. Henneaux*. Phys. Rep. 1985. V. 126. P. 1.
- [32] *E. Witten*. Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 5. P. 487.
- [33] *A. S. Schwarz*. Commun. Math. Phys. 1993. V. 155. P. 249.
- [34] *J. Polchinski*. Nucl. Phys. B. 1984. V. 231. P. 269; *A. Mironov, A. Morozov*. Phys. Lett. B. 2000. V. 490. P. 173.
- [35] *N. Seiberg, E. Witten*. Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19.
- [36] *F. David*. Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 5. P. 1019; *A. Mironov, A. Morozov*. Phys. Lett. B. 1990. V. 252. P. 47; *J. Ambjørn, Yu. Makeenko*. Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 5. P. 1753; *H. Itoyama, Y. Matsuo*. Phys. Lett. B. 1991. V. 255. P. 202.
- [37] *M. Fukuma, H. Kawai, R. Nakayama*. Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 1385; *R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 348. P. 435.
- [38] *Yu. Makeenko, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 356. P. 574.
- [39] *H. Itoyama, A. Morozov*. Int. J. Mod. Phys. A. 2003. V. 18. P. 5889.

- [40] *J. Harer, D. Zagier.* Invent. Math. 1986. V. 85. P. 457; *S. K. Lando, A. K. Zvonkin.* Embedded graphs. Preprint № 63. Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 2001.
- [41] *C. Itzykson, J.-B. Zuber.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 134. P. 197.
- [42] *E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 281; *R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59; *B. Dubrovin.* Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups. Lecture Notes in Math. V. 1620. Eds. M. Francaviglia, S. Greco. Berlin: Springer, 1996. P. 120.
- [43] *A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1996. V. 389. P. 43; Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 773; Int. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 1157.
- [44] *A. C. Лосев.* Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. С. 374; *K. Ito, S.-K. Yang.* Phys. Lett. B. 1998. V. 433. P. 56; *G. Bertoldi, M. Matone.* Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 6483; *A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1998. V. 427. P. 93; *A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1998. V. 424. P. 48; *H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1999. V. 448. P. 195; *A. Veselov.* Phys. Lett. A. 1999. V. 261. P. 297; *J. M. Isidro.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 539. P. 379; *A. Mironov.* WDVV equations and Seiberg–Witten theory. hep-th/9903088; *A. B. Маршаков.* ТМФ. 2002. Т. 132. С. 3.
- [45] *F. Cachazo, K. Intriligator, C. Vafa.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 603. P. 3; *F. Cachazo, C. Vafa.* $N = 1$ and $N = 2$ geometry from fluxes. hep-th/0206017.
- [46] *N. Dorey, T. J. Hollowood, S. Prem Kumar, A. Sinkovics.* JHEP. 2002. V. 0211. P. 039; P. 040; V. 0212. P. 003; *F. Ferrara.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 648. P. 161; Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 085013; *D. Berenstein.* Phys. Lett. B. 2003. V. 552. P. 255; *R. Dijkgraaf, S. Gukov, V. Kazakov, C. Vafa.* Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 045007; *A. Gorsky.* Phys. Lett. B. 2003. V. 554. P. 185; *R. Dijkgraaf, M. T. Grisaru, C. S. Lam, C. Vafa, D. Zanon.* Phys. Lett. B. 2003. V. 573. P. 138; *B. Feng.* Seiberg duality in matrix model. hep-th/0211202; *B. Feng.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 661. P. 113; *F. Cachazo, M. R. Douglas, N. Seiberg, E. Witten.* JHEP. 2002. V. 0212. P. 071; *F. Cachazo, N. Seiberg, E. Witten.* JHEP. 2003. V. 0302. P. 042; V. 0304. P. 018; *A. Dymarsky, V. Pestun.* Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 125001; *R. Boels, J. de Boer, R. Duivenvoorden, J. Wijnhout.* JHEP. 2004. V. 0403. P. 010; hep-th/0305189.
- [47] *G. Bonelli.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 649. P. 130; hep-th/0209225; *H. Fuji, Y. Ookouchi.* JHEP. 2002. V. 0212. P. 067; hep-th/0210148; *R. Argurio, V. L. Campos, G. Ferretti, R. Heise.* Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 065005; hep-th/0210291; Phys. Lett. B. 2003. V. 553. P. 332; hep-th/0211249; *J. McGreevy.* JHEP. 2003. V. 0301. P. 047; hep-th/0211009; *H. Suzuki.* JHEP. 2003. V. 0303. P. 005; hep-th/0211052; P. 036; hep-th/0212121; *I. Bena, R. Roiban.* Phys. Lett. B. 2003. V. 555. P. 117; hep-th/0211075; *Y. Demasure, R. A. Janik.* Phys. Lett. B. 2003. V. 553. P. 105; hep-th/0211082; *R. Gopakumar.* JHEP. 2003. V. 0305. P. 033; hep-th/0211100; *I. Bena, R. Roiban, R. Tatar.* Nucl. Phys. B. 2004. V. 679. P. 168; hep-th/0211271; *Y. Tachikawa.* Phys. Lett. B. 2003. V. 573. P. 235; hep-th/0211189; Progr. Theor. Phys. 2003. V. 110. P. 841; hep-th/0211274; *Y. Ookouchi.* JHEP. 2004. V. 0401. P. 014; hep-th/0211287; *S. K. Ashok, R. Corrado, N. Halmagyi, K. D. Kennaway, C. Romelsberger.* Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 086004; hep-th/0211291; *K. Ohta.* JHEP. 2003. V. 0302. P. 057; hep-th/0212025; *R. A. Janik, N. A. Obers.* Phys. Lett. B. 2003. V. 553. P. 309; hep-th/0212069; *S. Seki.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 661. P. 257; hep-th/0212079; *C. Hofman.* JHEP. 2003. V. 0310. P. 022; hep-th/0212095; *C. H. Ahn, S. Nam.* Phys. Lett. B. 2003. V. 562. P. 141; hep-th/0212231; *C. H. Ahn.* Phys. Lett. B. 2003. V. 560. P. 116; hep-th/0301011; *S. Aoyama, T. Masuda.* JHEP. 2004. V. 0403. P. 072; hep-th/0309232.
- [48] *A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1995. V. 355. P. 466; *E. Martinec, N. Warner.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 459. P. 97; *R. Donagi, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 460. P. 299; *A. Gorsky, A. Mironov, A. Marshakov, A. Morozov.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 527. P. 690; *H. Itoyama, A. Morozov.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 477. P. 855; 1997. V. 491. P. 529; Integrability and Seiberg–Witten theory. hep-th/9601168; *E. D'Hoker, D. H. Phong.* Lectures on supersymmetric Yang–Mills

- theory and integrable systems. hep-th/9912271; *A. Marshakov*. Seiberg–Witten Theory and Integrable Systems. Singapore: World Scientific, 1999; *H. W. Braden, I. M. Krichever* (eds.). Integrability: The Seiberg–Witten and Whitham Equations. Amsterdam: Gordon and Breach, 2000; *A. Gorsky, A. Mironov*. Integrable many-body systems and gauge theories. hep-th/0011197.
- [49] *L. Chekhov, A. Mironov*. Phys. Lett. B. 2003. V. 552. P. 293; *V. Kazakov, A. Marshakov*. J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 3107.
 - [50] *H. Itoyama, A. Morozov*. Nucl. Phys. B. 2003. V. 657. P. 53; Phys. Lett. B. 2003. V. 555. P. 287.
 - [51] *H. Itoyama, A. Morozov*. Progr. Theor. Phys. 2003. V. 109. P. 433.
 - [52] *L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev*. Phys. Lett. B. 2003. V. 562. P. 323; *A. Mironov*. Fortsch. Phys. 2003. V. 51. P. 781.
 - [53] *J. Ambjørn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen, Yu. Makeenko*. Nucl. Phys. B. 1993. V. 404. P. 127; *J. Ambjørn, L. Chekhov, Yu. Makeenko*. Phys. Lett. B. 1992. V. 282. P. 341; *G. Akemann*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 482. P. 403.
 - [54] *G. 't Hooft*. Nucl. Phys. B. 1974. V. 72. P. 461.
 - [55] *G. Veneziano*. Nucl. Phys. B. 1976. V. 117. P. 519; *D. De Wit, G. 't Hooft*. Phys. Lett. 1977. V. 69. P. 61; *E. Witten*. The $1/N$ expansion in atomic and particle physics. In: Recent Developments in Gauge Theories. Proc. of ASI (Cargese/Corsica, France, Aug. 26 – Sept. 7, 1979). NATO ASI Ser., Ser. B, Physics, V. 59. Eds. G. 't Hooft et al. N. Y.: Plenum, 1980. P. 403; *S. R. Wadia*. Phys. Rev. D. 1981. V. 24. P. 970; *A. Mironov, A. Morozov, G. Semenoff*. Int. J. Mod. Phys. A. 1996. V. 11. P. 5031; *B. Eynard*. JHEP. 2003. V. 0311. P. 018; hep-th/0309036.
 - [56] *E. Brézin, V. A. Kazakov*. Phys. Lett. B. 1990. V. 236. P. 144; *D. Gross, A. A. Migdal*. Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 127; Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 333; *M. Douglas, S. Shenker*. Nucl. Phys. B. 1990. V. 335. P. 635.
 - [57] *D. Berenstein, J. Maldacena, H. Nastase*. JHEP. 2002. V. 0204. P. 013; *N. R. Constable, D. Z. Freedman, M. Headrick, S. Minwalla*. JHEP. 2002. V. 0210. P. 068; *D. J. Gross, A. Mikhailov, R. Roiban*. Ann. Phys. 2002. V. 301. P. 31; hep-th/0205066; JHEP. 2003. V. 0305. P. 025; *N. Beisert, C. Kristjansen, J. Plefka, G. W. Semenoff, M. Staudacher*. Nucl. Phys. B. 2002. V. 643. P. 3; 2003. V. 650. P. 125.

Поступила в редакцию 16.IV.2004 г.