Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Представления групп в пространствах решений инвариантных дифференциальных уравнений, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 3, 489–499

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:59:22

© 2005 г.

Р. С. Исмагилов*

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП В ПРОСТРАНСТВАХ РЕШЕНИЙ ИНВАРИАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приводятся разные варианты определения инвариантных дифференциальных уравнений. Вводится понятие спектра инвариантных дифференциальных уравнений. Приводятся примеры явного описания спектра. Указываются достаточные условия дискретности спектра; в качестве примера рассмотрены представления группы Гейзенберга в пространстве решений инвариантных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: инвариантные дифференциальные уравнения, спектр, группа Гейзенберга, пространство решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Первоначальной целью этой работы было выяснение условий, при которых представление группы в пространстве решений инвариантного дифференциального уравнения (ИДУ) имеет дискретный спектр, т.е. разлагается в прямую сумму неприводимых представлений с конечной кратностью (здесь речь идет об унитарных представлениях). Этому посвящены разделы 5 и 6. Затем, однако, автор счел целесообразным (с методической точки зрения) начать с изложения различных определений ИДУ, ввести затем понятие спектра ИДУ и привести простые иллюстрирующие примеры (более сложные откладываются на будущее); это сделано в разделах 2–4. Заметим, что число работ, в которых затрагивались ИДУ (в том или ином виде) необозримо велико. В разделе 2 мы назовем некоторые из них. Тем не менее приведенная в этом разделе общая постановка задач об ИДУ и его спектре, насколько известно автору (и к его удивлению), не была явно сформулирована в литературе, хотя она, по существу, лежит на поверхности. Рассмотрение более сложных (чем в данной работе) примеров может оказаться небезинтересным.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В дальнейшем, имея представления T_i в линейных топологических пространствах V_i , $i = 1, 2$, мы обозначаем через $\mathcal{L}(T_1, T_2)$ пространство сплетающих операторов $V_1 \rightarrow V_2$.

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
E-mail: ismagil@serv.bmstu.ru

Все упоминаемые ниже группы Ли и проч. предполагаются бесконечно дифференцируемыми.

Пусть группа Ли G действует транзитивно на связном многообразии X преобразованиями $x \mapsto xg$. Пусть дано конечномерное векторное расслоение $\{V_x\}$ над X (V_x – слой над точкой x), группа G действует на нем автоморфизмами $v \mapsto vg$, $v \in V_x$, $x \in X$, согласованными с указанным действием на X . Эта картина строится (стандартным способом) по точке $x_0 \in X$, ее стационарной подгруппе G_0 и линейному представлению π подгруппы G_0 в конечномерном линейном пространстве V ; пространства V_{x_0} и V естественным образом отождествляются. Пусть $\mathcal{F}(\pi)$ – пространство сечений расслоения. Естественное действие группы G в $\mathcal{F}(\pi)$ – индуцированное представление $\text{Ind}(\pi)$.

Перейдем к определению ИДУ. Для каждого целого $n > 0$ имеем векторное расслоение $\{J_n(\pi, x)\}$, слой которого над x – пространство n -струй сечений расслоения в точке x . Для сечения $f \in \mathcal{F}(\pi)$ обозначим через $j_n(f; \pi, x)$ его n -струю в точке x . В пространстве $J_n(\pi, x_0)$ имеем естественное представление группы G_0 ; обозначим его через π_n . Мы дадим три определения ИДУ; они окажутся, по существу, эквивалентными.

1. Возьмем любое G – инвариантное векторное подрасслоение $\{J_n^0(\pi, x) \subset J_n(\pi, x)\}$. Тогда ИДУ – ограничение вида $j_n(f; \pi, x) \in J_n^0(\pi, x)$, $x \in X$, налагаемое на сечения $f \in \mathcal{F}(\pi)$.

2. Возьмем сопряженное расслоение $\{J'_n(\pi, x)\}$ и G – инвариантное векторное подрасслоение $\{J_n^0(\pi, x) \subset \{J'_n(\pi, x)\}\}$. Тогда ИДУ задается равенствами $\langle F, j_n(f; \pi, x) \rangle = 0$ для любого $F \in J_n^0(\pi, x)$, $x \in X$.

3. Возьмем наряду с π еще одно конечномерное представление σ группы G_0 , соответствующее расслоение $\{W_x\}$ и пространство сечений $\mathcal{F}(\sigma)$. Пусть $L \in \mathcal{L}(\text{Ind}(\pi), \text{Ind}(\sigma))$ – линейный дифференциальный оператор. Тогда равенство

$$Lf = 0, \quad f \in \mathcal{F}(\pi), \quad (1)$$

есть ИДУ.

Во всех трех случаях *решение* ИДУ определяется очевидным образом.

От любого из этих определений легко перейти к другому (с тем же пространством решений). Разъясним лишь переход от первого определения к третьему. Для этого достаточно взять фактор-расслоение $\{W_x = J_n(\pi, x)/J_n^0(\pi, x)\}$ и соответствующее отображение расслоений $l = \{l_x\}$, $l(x): J_n(\pi, x) \rightarrow W_x$. Тогда возникает дифференциальный оператор $L: \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}(\sigma)$ по правилу $f \mapsto l(j_n(f; \pi, \cdot))$. Получили ИДУ (в смысле третьего определения) вида $Lf = 0$ (с тем же пространством решений).

В дальнейшем мы пользуемся третьим определением и записываем ИДУ в виде (1); степень оператора L назовем также степенью ИДУ $Lf = 0$. Обозначим пространство решений через $\mathcal{F}^0(\pi)$, а возникающее в нем представление группы через $\text{Ind}^0(\pi)$.

Мы приходим к следующим двум задачам.

А. Описать все ИДУ для данного представления π группы G_0 .

Б. Описать соответствующее представление $\text{Ind}^0(\pi)$ в пространстве решений ИДУ.

Подход к задаче А очевиден: любое ИДУ задается оператором, взятым из $\mathcal{L}(\pi_n, \sigma)$. Хотя этот общий принцип весьма прост, выведение из него явного вида всевозможных ИДУ может оказаться достаточно трудоемким занятием.

В качестве средства изучения задачи Б введем нижеследующее понятие.

Пусть задан некоторый набор топологически неразложимых представлений группы G . Для представления ρ этого набора обозначим через $V(\rho)$ пространство, в котором оно действует, и определим *число сплетения* представления ρ с $\text{Ind}^0(\pi)$ как размерность пространства $\mathcal{L}(\rho, \text{Ind}^0(\pi))$. *Спектром ИДУ* назовем множество тех представлений ρ этого набора, для которых число сплетения положительно. Таким образом, требуется описать спектр представления $\text{Ind}^0(\pi)$ (вместе с числами сплетения).

Предварительно отметим, что для упомянутого ρ определено естественное отображение

$$\mathcal{L}(\pi_n, \sigma) \times \mathcal{L}(\rho | G_0, \pi) \rightarrow \mathcal{L}(\rho | G_0, \sigma), \quad (2)$$

которое строится следующим образом. Возьмем элементы $L_0 \in \mathcal{L}(\pi_n, \sigma)$, $R_0 \in \mathcal{L}(\rho | G_0, \pi)$. Элементу R_0 соответствует (в силу двойственности Фробениуса) элемент $R \in \mathcal{L}(\rho, \text{Ind}(\pi))$. Тогда отображение, заданное по правилу $v \rightarrow L_0(j_n(Rv; \pi, x_0))$, $v \in V(\rho)$, принадлежит множеству $\mathcal{L}(\rho | G_0, \sigma)$. Этим определено требуемое отображение (2). Будем записывать его в виде $L_0 \cdot R_0$, $L_0 \in \mathcal{L}(\pi_n, \sigma)$, $R_0 \in \mathcal{L}(\rho | G_0, \pi)$.

Следующее утверждение вытекает из определений. Возьмем оператор $R_0 \in \mathcal{L}(\rho | G_0, \pi)$ и соответствующий ему (уже упомянутый) оператор $R \in \mathcal{L}(\rho, \text{Ind}(\pi))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Оператор R принадлежит пространству $\mathcal{L}(\rho, \text{Ind}^0(\pi))$ в том и только в том случае, когда*

$$L_0 \cdot R_0 = 0. \quad (3)$$

Таким образом, спектр задается “уравнением” (3); остается решить его.

Как уже отмечено, имеется много работ, в которых затрагивались ИДУ (в том или ином виде); упомянем лишь некоторые из них. В монографии Желобенко [1] (гл. 10) построены ИДУ, задающие пространство неприводимых представлений группы $GL(n, \mathbb{C})$. Квазиинвариантные дифференциальные операторы из статьи Костанта [2] также могут быть получены из ИДУ. В книге Фушича и Никитина [3] проведен подробный анализ квазиинвариантных операторов математической физики. В ряде работ (например, [4], [5]) изучены конформно-инвариантные операторы. В работах Молчанова [6], [7] ИДУ (как частные случаи интегральных операторов с обобщенными ядрами) использовались для выделения неприводимых подпредставлений.

Рассмотрим дальнейшие примеры.

3. ГРУППА $U(2, 2)$; УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ ОБОБЩЕННОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ СЕРИИ

Обозначим через M_2 множество комплексных матриц второго порядка. Группа $G = U(2, 2)$ определяется как

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in M_2, \quad g^* J g = J \right\}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Она действует на унитарной группе $U(2)$ по формуле

$$g(u) = (c + du)(a + bu)^{-1}, \quad u \in U(2).$$

Стационарная подгруппа G_0 единичной матрицы $e \in U(2)$ выделяется условием $a + b = c + d$. Имеем эпиморфизм $G_0 \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$, $g \mapsto a + b$.

Перейдем к представлениям группы G . Для целых чисел $m \geq 0$, $n \geq 0$ обозначим через P_{mn} пространство многочленов $p(z, \zeta)$ с комплексными коэффициентами, имеющих степень $\leq m$ по z и степень $\leq n$ по ζ . Возьмем числа m_1, n_1 такие, что $m_1 - n_1 \in \mathbb{Z}$, и зададим представление $h \mapsto \chi(h)$, $h \in GL(2, \mathbb{C})$, в пространстве P_{mn} формулой

$$\chi(h)p(z, \zeta) = (\det h)^{m_1} \overline{(\det h)}^{n_1} (bz + d)^m (\bar{b}\zeta + \bar{d})^n p(zh, \zeta\bar{h}), \quad h \in GL(2, \mathbb{C}).$$

Здесь $z \mapsto zh$ — обычное дробно-линейное преобразование; аналогично определяется $\zeta\bar{h}$. Соответствующее представление алгебры Ли обозначим через χ° . Используя упомянутое отображение $G_0 \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$, получаем отсюда представление $g \mapsto \pi(g)$, $g \in G_0$. Наконец, образуем индуцированное представление $T = \text{Ind}(\pi)$ группы G (в заголовке этого раздела оно названо представлением обобщенной вырожденной серии). Оно действует в пространстве вектор-функций $C^\infty(U(2), P_{mn})$ по формуле

$$(T(g^{-1})f)(u) = \chi((a + bu)^{-1})f(g(u)), \quad u \in U(2).$$

В случае необходимости будем писать $T_{mn}^{m_1 n_1}$ вместо T .

Мы ограничились индуцированием с представлений подгруппы G_0 , которые “пропускаются” через ее фактор-группу $GL(2, \mathbb{C})$. Более общий случай рассмотрен в работе [4], где описаны инвариантные подпространства и проч. Для группы $SU(n, n)$ случай одномерного индуцирующего представления разобран в работе [7]. В работе [8] рассмотрено представление в пространстве решений ИДУ второго порядка — волнового оператора. Более общие ИДУ (произвольного порядка) не рассматривались.

Наша первая цель — найти все уравнения первого порядка, связанные с указанным представлением. Любое такое уравнение задается целыми числами $r \geq 0$, $s \geq 0$, комплексными числами r_1, s_1 (число $r_1 - s_1$ — целое) и дифференциальным оператором

$$L: C^\infty(U(2), P_{mn}) \rightarrow C^\infty(U(2), P_{rs}) \quad (4)$$

первого порядка, сплетающим представления $T_{mn}^{m_1 n_1}, T_{rs}^{r_1 s_1}$. Чтобы описать единообразно такие операторы, введем некоторые обозначения.

Будем записывать элементы пространства P_{mn} в виде многочленов от z_0, ζ_0 , а элементы пространства P_{rs} — в виде многочленов от z_1, ζ_1 . Нам понадобится также линейное пространство $P_{mn} \otimes P_{rs} \otimes M_2$; его элементы записываем в виде многочленов от $z_0, z_1, \zeta_0, \zeta_1$ с коэффициентами из M_2 . Для любого целого N определим в пространстве многочленов P_N билинейную форму $\langle, \rangle$ равенствами $\langle z^i, z^k \rangle = (-1)^i i! k! \delta_{i+k-N}$. Отсюда получается также билинейная форма в $P_{mn} = P_m \otimes P_n$ (как тензорное произведение двух билинейных форм); сохраним для нее обозначение $\langle, \rangle$. Далее, в пространстве гладких функций на $U(2)$ действует представление $l \mapsto R(l)$ алгебры Ли косоэрмитовых матриц второго порядка инфинитезимальными правыми сдвигами. Это представление продолжается (посредством комплексификации) на алгебру Ли M_2 ; мы сохраним обозначение $l \mapsto R(l)$ для этого продолжения.

Любому элементу пространства $P_{mn} \otimes P_{rs} \otimes M_2$ поставим в соответствие дифференциальный оператор (4) по следующему правилу: элементу $\phi \otimes \psi \otimes l$ соответствует оператор

$$f \mapsto \left\langle \phi, R(l)f + \frac{1}{2}\chi^\circ(l)f \right\rangle \psi, \quad f \in C^\infty(U(2), P_{mn});$$

это соответствие продолжается на все пространство $P_{mn} \otimes P_{rs} \otimes M_2$ по линейности. Элемент $w \in P_{mn} \otimes P_{rs} \otimes M_2$ назовем *символом* соответствующего оператора. Чтобы описать символы сплетающих операторов, введем числа $\epsilon = (r - m + 1)/2$, $\eta = (s - n + 1)/2$. В следующем предложении через e_{ij} обозначены матричные единицы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Ненулевой сплетающий оператор (4) существует только при $|r - m| = 1$, $|s - n| = 1$, $m_1 + n_1 = 2 - \epsilon(m + 1) - \eta(n + 1)$, $r_1 = m_1 + 1 - \epsilon$, $s_1 = n_1 + 1 - \eta$. Его символ имеет вид*

$$w = (z_0 - z_1)^{m+\epsilon-1} (\zeta_0 - \zeta_1)^{n+\eta-1} (z_\epsilon \zeta_\eta e_{11} + z_\epsilon e_{21} + \zeta_\eta e_{12} + e_{22}).$$

Доказательство состоит в формальных вычислениях.

Мы изучим представление, действующее в пространстве решений ИДУ, только для случая $r = m + 1$, $s = n + 1$. Согласно предложению 2 выполняются равенства $m_1 + n_1 + m + n = 0$, $r_1 = m_1$, $s_1 = n_1$. Явный вид ИДУ таков (мы записываем элементы $C^\infty(U(2), P_{mn})$ в виде $f(u, z, \zeta)$):

$$(z\zeta R(e_{11}) + \zeta R(e_{12}) + zR(e_{21}) + R(e_{22}))f + \frac{1}{2}(1 + z\zeta)(m - n + m_1 - n_1)f = 0.$$

Для других r, s , удовлетворяющих условиям $|r - m| = |s - n| = 1$, ИДУ выглядит сложнее: оно содержит частные производные по z, ζ .

ТЕОРЕМА 1. *Представление $\text{Ind}^0(\pi)$ конечномерно и неприводимо. Если продолжить (посредством комплексификации) соответствующее представление алгебры Ли $su(2, 2)$ на $gl(4, \mathbb{C})$, то получится представление со старшим весом $(m_1, m_1 + m, -n_1 - n, -n_1)$.*

Наметим доказательство. Рассмотрим представление группы $U(2) \times U(2)$ в $C^\infty(U(2))$ (сдвигами слева и справа). Разложим пространство $C^\infty(U(2))$ в прямую (топологическую) сумму инвариантных подпространств $C^\infty(U(2), \kappa)$, где κ пробегает все неприводимые унитарные представления группы $U(2) \times U(2)$. Таким образом, пространство $C^\infty(U(2), P_{mn})$ естественно разлагается в прямую топологическую сумму подпространств $C^\infty(U(2), \kappa) \otimes P_{mn}$. Ограничение уравнения (1) на эти подпространства легко решается; выясняется, что ненулевое решение существует только при $\dim V(\kappa) \leq N$, где число N зависит только от m, n . Следовательно, пространство решений $\mathcal{F}^0(\pi)$ конечномерно. Действующее в нем представление алгебры Ли $su(2, 2)$ продолжается до комплексно-линейного представления алгебры Ли $gl(4, \mathbb{C})$. Несложное вычисление показывает, что для последнего представления весовой вектор (относительно верхнетреугольной подалгебры) определен с точностью до множителя и имеет вид $f(u, z, \zeta) = \beta(u^t)\zeta^n$, где u^t — транспонированная матрица, а β — представление группы $U(2)$, действующее по формуле $\beta(g)f(\zeta) = (\det g)^{n_1}(b\zeta + d)^n f(\zeta g)$, $f \in P_n$. Его весом служит вектор $(m_1, m_1 + m, -n_1 - n, -n_1)$, что доказывает теорему.

4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО. СПЕКТР УРАВНЕНИЯ

Напомним одну из моделей пространства Лобачевского. Возьмем трехмерный шар $X = \{\xi = (x, z), x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, |x|^2 + |z|^2 < 1\}$ и группу $G = SL(2, \mathbb{C})$. Точку ξ иногда будем отождествлять с матрицей $\begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & -x \end{pmatrix}$ и обозначать эту матрицу также через ξ . Положим $|\xi| = \sqrt{|x|^2 + |z|^2}$. Группа G действует на X по следующему правилу (через e обозначена единичная матрица второго порядка):

$$\xi g = \xi', \quad g^*(e + \xi)g = \lambda(e + \xi'), \quad \lambda > 0.$$

Стационарной подгруппой точки $\xi_0 = (0, 0)$ служит $G_0 = SU(2)$.

Пусть $Q(k)$ – пространство однородных многочленов степени k от двух переменных, $\pi(k)$ – обычное представление группы G_0 в $Q(k)$ (посредством линейного преобразования переменных) и $T_k = \text{Ind}(\pi(k))$ – индуцированное представление группы G . ИДУ задается дифференциальным оператором $L \in \mathcal{L}(T_k, T_l)$. Мы ограничимся случаем $k = 1, l = 3$. Заметим, что $\mathcal{F}(\pi(1))$ – пространство спинорных полей на X .

Пространство n -струй $J_n(\pi(1), \xi_0)$ можно отождествить с пространством многочленов $f(\xi, u)$ степени $\leq n$ по ξ и однородных степени 1 по $u = (u_1, u_2)$. Дифференциальный оператор $L \in \mathcal{L}(T_1, T_3)$ порядка $\leq n$ задается оператором $J_n(\pi(1), \xi_0) \rightarrow Q(3)$, перестановочным с действием группы G_0 . Последний можно записать в виде

$$f(\xi, u) \mapsto \int_{|\xi|=|u|=1} \Phi(\xi, \bar{u}, v) f(\xi, u) du d\xi,$$

где многочлен $\Phi(\xi, \bar{u}, v)$ имеет степень $\leq n$ по ξ , однороден степени 1 по $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, однороден степени 3 по $v = (v_1, v_2)$ и инвариантен относительно естественного действия группы G_0 . Легко проверить, что любая функция такого вида выражается формулой

$$(j\xi v, \bar{v})((v, u)A(|\xi|^2) + (\xi v, u)B(|\xi|^2)), \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $(,)$ – обычное (эрмитово) скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$, A, B – многочлены

$$A(t) = \sum_{i \leq (n-1)/2} a_i t^i, \quad B(t) = \sum_{i \leq (n-2)/2} b_i t^i. \quad (6)$$

Итак, любая функция вида (5) порождает ИДУ. Опишем его спектр.

Напомним, что представление основной серии (не обязательно унитарное) группы $SL(2, \mathbb{C})$ задается числами $n_1, n_2 \in \mathbb{C}$, $n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}$, по правилу

$$T^{n_1 n_2} f(z) = (bz + d)^{n_1 - 1} \overline{(bz + d)^{n_2 - 1}} f(zg), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

в пространстве C^∞ -функций с соответствующим асимптотическим поведением при $z \rightarrow \infty$ (см. [9], гл. 3). Оно приводимо только в случае целых n_1, n_2 одного знака (причем неразложимо в этих точках).

Таким образом, спектр ИДУ задается набором пар (n_1, n_2) ; для описания этого набора определим многочлены $w_k(h)$, $k = 0, 1, \dots$, из разложения

$$(1-r)^{(2h-1)/4}(1+r)^{(2h+1)/4} \int_{-1}^1 (1+rt)^{-h}(3t-1)(t+1) dt = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(h)r^k, \quad |r| < 1.$$

Записанный здесь интеграл легко вычисляется, но это приводит к громоздкому выражению.

ТЕОРЕМА 2. *Спектр уравнения, заданного функциями (5), (6), состоит из пар $(h-1, h-2)$, $(-h+1, -h+2)$, где h – корень уравнения*

$$\sum_i a_i w_{2i+1}(h) + \sum_i b_i w_{2i+2}(h) = 0.$$

Числа сплетения равны 1.

Доказательство следует из предложения 1 и сводится к вычислению левой части равенства (3).

5. ИДУ ДЛЯ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ; ПРИЗНАК ДИСКРЕТНОСТИ УНИТАРНОГО СПЕКТРА

Вернемся к картине, описанной в разделе 2, внося в нее небольшие изменения (в частности, в обозначениях). Предположим, во-первых, что представления π , σ унитарны (таким образом, V_x , W_x – конечномерные гильбертовы пространства). Пусть, далее, на X задана гладкая мера dx ; положим $a(g, x) = d(xg)/dx$.

Рассмотрим представление

$$(T(g)f)(x) = \sqrt{a(g, x)}f(xg)g^{-1}, \quad f \in \mathcal{F}(\pi)$$

(в обозначениях, введенных в разделе 2, T индуцировано представлением $g \rightarrow \sqrt{a(g, x_0)}\pi(g)$, $g \in G_0$). Аналогично строим второе представление группы G по представлению σ подгруппы G_0 . Взяв дифференциальный оператор L , сплетающий первое представление со вторым, получаем ИДУ вида (1).

Представление T продолжается на гильбертово пространство $\mathcal{H}(\pi)$ – пополнение пространства сечений с компактным носителем. Пусть $\mathcal{F}^0(\pi)$ – пространство решений уравнения $Lf = 0$, принадлежащих пространству $\mathcal{H}(\pi)$, $\mathcal{H}^0(\pi)$ – его замыкание, T^0 – подпредставление, возникающее в $\mathcal{H}^0(\pi)$. (Отметим вскользь, что можно было бы рассмотреть пространство квадратично-суммируемых слабых решений уравнения (1). Вообще говоря, это пространство шире, чем $\mathcal{F}^0(\pi)$; если оператор L гипоеллиптичен, то эти пространства совпадают.) Сейчас мы укажем условия, при которых T^0 разлагается в ортогональную сумму (возможно, пустую) неприводимых представлений с конечной кратностью; в этом случае мы скажем, что рассматриваемое уравнение имеет дискретный унитарный спектр. Предполагается, что многообразие X связно и некомпактно; левоинвариантная мера на G обозначается через dg .

Возьмем алгебру Лигруппы G и ее универсальную обертывающую алгебру U . Пусть $\tilde{T}$ – ее представление, порожденное представлением T . Понадобится также левое регулярное представление $\tilde{L}$ этой алгебры в пространстве $C^\infty(G)$. Возьмем конечномерное линейное подпространство $S \subset U$, содержащее единицу алгебры U , и введем в нем (произвольным образом) норму $||$. Определим функцию $x \mapsto \Psi(x)$, $x \in X$, следующим образом. Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и рассмотрим все пары (l, A) , где $l \in S$, A – линейный оператор из W_{x_0} в V_{x_0} . Обозначим через M_{x_0} множество пар (l, A) со следующим свойством:

$$f(x_0) - (\tilde{T}(l)f)(x_0) - A((Lf)(x_0)) = 0 \quad (7)$$

для любого сечения $f \in \mathcal{F}(\pi)$ (разумеется, здесь достаточно взять сечения, определенные в некоторой окрестности точки x_0). Положим

$$\Psi(x_0) = \inf |l|, \quad (l, A) \in M_{x_0}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Psi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда представление T^0 разлагается в ортогональную сумму (возможно, пустую) неприводимых представлений (имеющих конечную кратность).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем функцию $\alpha \in C_0^\infty(G)$ и введем в $\mathcal{H}(\pi)$ оператор

$$Q = \int_G \alpha(g)T(g) dg,$$

его ограничение на $\mathcal{H}^0(\pi)$ обозначим через Q^0 . Покажем, что Q^0 компактен; это докажет теорему. Достаточно доказать, что множество $E = \{h = Q^0 f, f \in \mathcal{F}^0(\pi), \|f\| \leq 1\}$ относительно компактно в $\mathcal{H}^0(\pi)$ (т.е. его замыкание компактно). Легко видеть, что для любого компакта $Y \subset X$ ограничения на Y сечений $h = Qf$, $f \in \mathcal{F}(\pi)$, $\|f\| \leq 1$, образуют относительно компактное множество. Остается доказать, что величины

$$\int_{X \setminus Y} |h(x)|^2 dx, \quad h \in E,$$

равномерно малы, если компакт Y достаточно велик. Для этого возьмем произвольное число $\epsilon > 0$ и такой компакт $Y \subset X$, что $\Psi(x) < \epsilon$ при $x \in X \setminus Y$. Зафиксируем точку $x \in X \setminus Y$ и такую пару $(l, A) \in M_x$, что $|l| < \epsilon$. Тогда из равенства $Lh = 0$ и из свойства (7) получаем

$$\begin{aligned} h(x) &= (\tilde{T}(l)h)(x) = \int_G (\alpha(g)\tilde{T}(l)T(g)f)(x) dg = \\ &= \int_G (\tilde{L}(l')\alpha)(g)(T(g)f)(x) dg; \end{aligned}$$

здесь использован антиавтоморфизм $l \rightarrow l'$ алгебры U , который действует на алгебре Ли как $l \rightarrow -l$.

В нижеследующих оценках числа a_i зависят только от α ; через Z обозначен носитель функции α , а через μ – его мера. Так как $|l| < \epsilon$, то

$$\max\{|\tilde{L}(l')\alpha(g)|, \quad g \in G\} \leq a_1\epsilon,$$

откуда

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq a_1 \epsilon \int_Z |(T(g)f)(x)| dg = a_1 \epsilon \int_Z a(g, x)^{1/2} |f(xg)| dg \leq \\ &\leq a_2 \epsilon \left(\int_Z a(g, x) |f(xg)|^2 dg \right)^{1/2}, \quad x \in X \setminus Y. \end{aligned}$$

Возведя в квадрат и интегрируя по $X \setminus Y$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{X \setminus Y} |h(x)|^2 dx &\leq a_2^2 \epsilon^2 \int_{Z \times (X \setminus Y)} a(g, x) |f(xg)|^2 dg dx \leq \\ &\leq a_2^2 \epsilon^2 \int_{Z \times X} a(g, x) |f(xg)|^2 dg dx = a_2^2 \epsilon^2 \mu \int_X |f(x)|^2 dx \leq a_3 \epsilon^2. \end{aligned}$$

Так как число ϵ можно взять сколь угодно малым, то этим все доказано.

6. ПРИМЕР: ГРУППА ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассмотрим группу Гейзенберга

$$H(n) = \{(a, b, t), \quad a, b \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}\},$$

$(a_1, b_1, t_1)(a_2, b_2, t_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, t_1 + t_2 + (a_1, b_2))$ (здесь использовано обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$). Ее неприводимые бесконечномерные представления задаются формулами

$$T_\lambda(a, b, t)f(x) = e^{i\lambda(t + (x, b))} f(x + a), \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad \lambda \neq 0.$$

Представление, индуцированное характером центра $(0, 0, t) \mapsto e^{i\lambda t}$, действует по формуле

$$T(a, b, t)f(x, y) = e^{i\lambda(t + (x, b))} f(x + a, y + b), \quad f \in L_2(\mathbb{R}^{2n});$$

любое подпредставление кратно представлению T_λ .

Любое ИДУ имеет вид

$$L(\lambda y - iD_x, iD_y)f(x, y) = 0, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad (8)$$

где $L(s, t) = \sum_{k,j} a_{kj} s^k t^j$ — многочлен. Здесь и далее мы полагаем

$$L(A, B) = \sum_{k,j} a_{kj} A^k B^j$$

для любых операторов A, B , действующих в некотором линейном пространстве. Пусть H^0 — замыкание в $L_2(\mathbb{R}^n)$ пространства квадратично-интегрируемых C^∞ -решений ИДУ (8); обозначим через T^0 ограничение представления T на H^0 . Мы хотим выяснить, при каких условиях T^0 кратно (кратность конечна!) неприводимому представлению T_λ . Ниже используются обозначения $|\alpha| = \sum_i |\alpha_i|$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и

$$D^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial s_n} \right)^{\alpha_n} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial t_n} \right)^{\beta_n}, \quad \alpha_k, \beta_k \in \{0, 1, \dots\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$\frac{D^{\alpha\beta}L}{L} \rightarrow 0 \quad (9)$$

при $|s|+|t| \rightarrow \infty$, $|\alpha|+|\beta| \neq 0$. Тогда T^0 есть конечная (возможно, пустая) сумма представлений, кратных представлению T_λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изучим функцию Ψ , описанную в разделе 5. В качестве $S \subset U$ возьмем подпространство элементов $l = K(\{\partial/\partial a_i\}, \{\partial/\partial b_i\})$, где $K(s, t)$ – многочлен степени $\leq \deg L$ и $\partial/\partial a_i, \partial/\partial b_i$ – элементы алгебры Ли, соответствующие параметрам в записи (a, b, t) элемента группы H^n . Норма в S порождает норму в пространстве многочленов $K(s, t)$. Зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Соотношение (7) сводится к тому, что для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ функция

$$f(x, y) - K(iD_y - \lambda x, iD_x)f(x, y) - rL(-iD_x + \lambda y, iD_y)f(x, y)$$

обращается в нуль в точке (x_0, y_0) . При этом $\Psi(x_0, y_0) = \inf\{|K|\}$, где нижняя грань берется по всем парам (K, r) с указанным свойством. Достаточно потребовать, чтобы указанное условие выполнялось для функций $e^{(a, x)+(b, y)}$ при всех $a, b \in \mathbb{R}^n$. Это приводит к уравнению

$$1 - K(ib - \lambda x_0, ia) + rL(-ia + \lambda y_0, ib) = 0,$$

которое заменой переменных сводится к уравнению

$$1 - K(s, t) - rL(\lambda y_0 - t, \lambda x_0 + s) = 0. \quad (10)$$

Оно удовлетворяется, если взять

$$r = (L(\lambda y_0, \lambda x_0))^{-1}, \quad K(s, t) = \frac{L(\lambda y_0, \lambda x_0) - L(\lambda y_0 - t, \lambda x_0 + s)}{L(\lambda y_0, \lambda x_0)}$$

(здесь $|\lambda x_0| + |\lambda y_0|$ столь велико, что $L(\lambda y_0, \lambda x_0) \neq 0$). Таким образом, коэффициенты многочлена $K(s, t)$ являются функциями от точки (x_0, y_0) . Напомним, что выше мы ввели норму для многочленов, участвующих в равенстве (10). Покажем, что $|K| \rightarrow 0$ при $|x_0| + |y_0| \rightarrow \infty$ (это докажет теорему, ибо $\Psi(x_0, y_0) \leq |K|$). Достаточно проверить, что коэффициенты многочлена $K(s, t)$ стремятся к нулю при $|x_0| + |y_0| \rightarrow \infty$. Но свободный член этого многочлена равен нулю, а остальные коэффициенты отличаются лишь постоянными (не зависящими от x_0, y_0) множителями от величин $D^{\alpha\beta}L(\lambda y_0, \lambda x_0)/L(\lambda y_0, \lambda x_0)$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Из условий теоремы следует, что $|K| \rightarrow 0$ при $|x_0| + |y_0| \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

В заключение опишем кратность, о которой говорится в теореме 4, ограничившись случаем гипоеллиптического уравнения (8); тонкие признаки гипоеллиптичности указаны в монографии [10]. При этом условии пространство H^0 (а также пространство слабых решений уравнения (8)) состоит из C^∞ -функций.

Оператор $F: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^{2n})$, сплетающий представления T_λ и T , задается функцией $M \in L_2(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$Ff(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} M(x - s)e^{-i\lambda(x-s, y)}f(s) ds.$$

Он сплетает T_λ с T^0 в том и только в том случае, если

$$L(D_x, -i\lambda x)M = 0. \quad (11)$$

Следовательно, $\dim \mathcal{L}(T_\lambda, T^0)$ совпадает с размерностью пространства решений уравнения (11), принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Вот простейший пример уравнения вида (8), для которого пространство H^0 нетривиально и представление T^0 неприводимо (для упрощения возьмем $\lambda = 1$):

$$\sum_{k=1}^n \left(\left(y_k - i \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)^2 \right) f + n f = 0.$$

Для этого примера уравнение (11) задает основное состояние гармонического осциллятора.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ, грант № 01-01-00490.

Список литературы

- [1] Д. П. Желобенко. Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
- [2] B. Kostant. Verma modules and the existence of quasi-invariant differential operators. In: Non-Commutative Harmonic Analysis. Actes du Colloque d'Analyse Harmonique Non Commutative, Marseille – Luminy, 1 au 4 Juillet 1974 (French). Lect. Notes Math. V. 466. Eds. J. Carmona, J. Dixmier, M. Vergne. Berlin: Springer, 1975. P. 101–128.
- [3] В. И. Фушчич, А. Г. Никитин. Симметрия уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1990.
- [4] B. Speh. J. Funct. Anal. 1979. V. 33. P. 95–118.
- [5] H. P. Yakobson. Publ. RIMS Kyoto Univ. 1986. V. 22. P. 345–364.
- [6] В. Ф. Молчанов. Матем. сб. 1970. Т. 81(123). № 3. С. 358–375.
- [7] V. F. Molchanov. Maximal degenerate series representations of the universal covering of the group $SU(n, n)$. In: Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalizations, and Applications. Eds. B. P. Komakov, I. S. Krasil'shik, G. L. Litvinov, A. B. Sossinsky. Math. Appl. Dordr. V. 433. Dordrecht: Kluwer, 1998. P. 313–336.
- [8] H. P. Yakobson, M. Vergne. J. Funct. Anal. 1977. V. 24. P. 52–106.
- [9] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1959.
- [10] Ю. В. Егоров. Микролокальный анализ. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 33. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–156.

Поступила в редакцию 24.11.2004 г.