Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Сергеев, Схема квантования для модулярных q -разностных уравнений,
ТМФ, 2005, том 142, номер 3, 500–509

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1794>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 03:26:23

© 2005 г.

С. М. Сергеев*

СХЕМА КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ МОДУЛЯРНЫХ q -РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются модулярные пары некоторых q -разностных уравнений второго порядка. Пример такой пары: t - Q уравнения Бакстера для квантовой релятивистской цепочки Тоды в режиме сильной связи. Другой квантовомеханический пример: q -деформация уравнения Шредингера с гиперболическим потенциалом. Показано, что требование аналитичности волновой функции или функции Бакстера приводит к определенному набору трансцендентных уравнений на коэффициенты потенциала или трансфер-матрицы, решением которых является их дискретный спектр.

Ключевые слова: уравнения Бакстера, модулярная дуализация, режим сильной связи.

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние несколько лет в теории квантовых вполне интегрируемых систем появилось несколько моделей, в которых алгеброй наблюдаемых является локальная алгебра Вейля со специальным значением вейлевского параметра q [1], [2]:

$$q = e^{2\pi i b^2}, \quad b = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Ключевое свойство этого режима для q , называемого “режимом сильной связи”, состоит в том, что комплексное сопряжение q эквивалентно модулярному преобразованию Якоби, $q^* = e^{-2\pi i b^{-2}}$ (в этой работе мы будем использовать звездочку как знак комплексного сопряжения).

Пусть операторы координаты $\mathbf{x}$ и импульса $\mathbf{p}$ алгебры Гейзенберга,

$$\mathbf{x}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{x} = \frac{i}{2\pi}, \quad (2)$$

использованы для построения пары Вейля $\mathbf{u}, \mathbf{v}$,

$$\mathbf{u} = e^{2\pi b\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v} = e^{2\pi b\mathbf{p}}, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = q\mathbf{v}\mathbf{u}, \quad (3)$$

*Department of Theoretical Physics, Research School of Physical Sciences and Engineering, Australian National University, Canberra, Australia. E-mail: sergey.sergeev@anu.edu.au

и модулярно дуальной (т.е. сопряженной) пары

$$\mathbf{u}^\dagger = e^{2\pi b^{-1}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}^\dagger = e^{2\pi b^{-1}\mathbf{p}}, \quad \mathbf{v}^\dagger \mathbf{u}^\dagger = q^* \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v}^\dagger. \quad (4)$$

Любой элемент первой пары, очевидно, коммутирует с любым элементом второй пары. Физическая интерпретация режима (1) состоит в том, что *любой полином* $\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ коммутирует с себе сопряженным,

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})^\dagger = \mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})^\dagger \mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (5)$$

т.е. можно говорить о коммутирующих эрмитовых операторах $\mathbf{J} + \mathbf{J}^\dagger$ и $i(\mathbf{J} - \mathbf{J}^\dagger)$, связанных с физическими гамильтонианами. Спектральной задачей является следующая пара уравнений на вектор $\langle \Psi |$:

$$\langle \Psi | \cdot \mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \Psi | \cdot \mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})^\dagger = 0. \quad (6)$$

Эти уравнения иногда называются уравнениями на квантовую кривую (поскольку в пределе $q \rightarrow 1$ уравнение $J(u, v) = 0$ определяет классическую алгебраическую кривую). Уравнения (6) являются также базис-инвариантной записью t - Q уравнений Бакстера, $\langle \Psi | \equiv \langle Q |$. В рамках квантовой механики полиномы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}^\dagger$ можно понимать как деформации оператора Шредингера $\mathbf{H} - E$.

Проблема разностных уравнений (6) состоит в том, что требование правильной асимптотики Ψ в, например, координатном представлении (аналог квантовомеханического условия $\Psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$), не фиксирует Ψ однозначно и не приводит к квантованию спектра.

В этой работе мы покажем, что если требование правильной асимптотики дополнить требованием аналитичности волновой функции в определенной полосе, то это приведет к однозначности волновой функции и к квантованию спектра. Уравнениями квантования спектра окажется система замысловатых уравнений в терминах трансцендентных, но хорошо определенных функций от коэффициентов полиномов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}^\dagger$. Благодаря трансцендентности, эта конечная система имеет бесконечное число решений.

Наше изложение мы начнем с квантовомеханического подхода, в рамках которого условие аналитичности является естественным, шаг за шагом построим волновую функцию и условия квантования спектра. Уравнение Бакстера для модулярной цепочки Тоды мы обсудим в заключение в предпоследнем разделе.

2. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА q -ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Мы будем рассматривать операторнозначный полином $\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ специального вида:

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{v}^{-1} + T(\mathbf{u}), \quad (7)$$

где “потенциал” (или, если угодно, трансфер-матрица) имеет вид

$$T(u) = \lambda u^{-L} \sum_{j=0}^{2L} t_j \cdot (-u)^j, \quad t_0 = t_{2L} = 1, \quad (8)$$

все t_j и λ — комплексные коэффициенты. Этот полином $\mathbf{J}$ может быть интерпретирован как q -деформация оператора Шредингера $\mathbf{j} = \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x}) - E$ с гиперболическим потенциалом. Заметим, что в пределе $q \rightarrow 1$ уравнение $J(u, v) = 0$ определяет гиперэллиптическую кривую рода $g = 2L - 1$ с g модулями t_j , и с точки зрения механики динамика u и v со скобкой $\{u, v\} = uv$ есть гиперэллиптический маятник.

Мы будем использовать координатное представление,

$$\langle \Psi | x \rangle = \Psi(x), \quad \langle \Psi | \mathbf{x} | x \rangle = x \Psi(x), \quad \langle \Psi | \mathbf{p} | x \rangle = \frac{i}{2\pi} \Psi'(x). \quad (9)$$

Из (3) и (4) следует

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \mathbf{u} | x \rangle &= e^{2\pi x b} \Psi(x), & \langle \Psi | \mathbf{u}^\dagger | x \rangle &= e^{2\pi x b^{-1}} \Psi(x), \\ \langle \Psi | \mathbf{v} | x \rangle &= \Psi(x + ib), & \langle \Psi | \mathbf{v}^\dagger | x \rangle &= \Psi(x + ib^{-1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Для краткости последующих формул для каждого $x \in \mathbb{C}$ положим

$$u \equiv e^{2\pi x b}, \quad \tilde{u} \equiv e^{2\pi x b^{-1}}. \quad (11)$$

Заметим, если x комплексно, то $\tilde{u} \neq u^*$.

Обратимся теперь к уравнениям (6) в координатном представлении. Для полинома (7) они приобретают вид

$$\begin{aligned} \Psi(x + ib) + \Psi(x - ib) + \Psi(x)T(u) &= 0, \\ \Psi(x + ib^{-1}) + \Psi(x - ib^{-1}) + \Psi(x)T^*(\tilde{u}) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где T^* означает комплексное сопряжение всех коэффициентов полинома Лорана T . Функция $\Psi(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ есть волновая функция, так что первое условие на Ψ очевидно: $\Psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Ясно, что сдвиг аргумента Ψ в комплексную область, появляющийся во второй строке представления (10), должен пониматься как аналитическое продолжение физической функции $\Psi(x)|_{x \in \mathbb{R}}$. В рамках квантовой механики реализация комплексных сдвигов — это разложение в ряд (напомним, $ib = i \cos \theta - \sin \theta$):

$$\Psi(x + ib) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^{(n)}(x - \sin \theta) \frac{(i \cos \theta)^n}{n!}, \quad (13)$$

которое хорошо определено тогда и только тогда, когда $\Psi(x)$ аналитична в полосе

$$-\cos \theta < \operatorname{Im} x < \cos \theta. \quad (14)$$

3. ГОЛОМОРФНЫЕ ЧАСТИ

Путем небольшой модификации каждое из уравнений (12) может быть приведено к уравнению, имеющему голоморфное по $u^{\pm 1}$ или по $\tilde{u}^{\pm 1}$ решение. Введем обозначения

$$t_+(u) = \frac{u^L}{\lambda} T(u) = \sum_{j=0}^{2L} t_j \cdot (-u)^j, \quad t_-(u) = \frac{1}{u^L \lambda} T(u) = \sum_{j=0}^{2L} t_{2L-j} \cdot (-u)^{-j} \quad (15)$$

и рассмотрим два уравнения

$$\chi_+(q^{-1}u) = t_+(u)\chi_+(u) - Gu^{2L}\chi_+(qu), \quad (16)$$

$$\chi_-(qu) = t_-(u)\chi_-(u) - Gu^{-2L}\chi_-(q^{-1}u), \quad (17)$$

где $G \equiv q^L \lambda^{-2}$.

Пусть $\chi_+(u)$ – голоморфное по u решение уравнения (16) такое, что $\chi_+(0) = 1$. Пусть $\chi_-(u)$ – голоморфное по u^{-1} решение уравнения (17) такое, что $\chi_-(\infty) = 1$. Обе эти функции определены однозначно и существуют для любых t_j и G . Подставим, например, разложение

$$\chi_+(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \cdot (-u)^n \quad (18)$$

в (16) и выделим в этом выражении коэффициент при u^k . Условие равенства нулю этого коэффициента эквивалентно следующему условию: $(q^{-k} - 1)\chi_k$ есть линейная комбинация величин χ_n при $0 \leq n < k$, коэффициентов t_+ и G . Это, очевидно, простая рекурсия, однозначно фиксируемая начальным значением $\chi_0 = 1$. Более того, можно получить оценку сверху $|\chi_n| < |q|^{n^2/4L} X^n$, где несущественная величина X определяется набором t_j и G .

Кроме того, есть способ представить χ_+ как полубесконечное *матричное* произведение. Пусть

$$L(u) = \begin{pmatrix} t_+(u) & -Gu^{2L} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

и

$$L_n(u) = L(u)L(qu)(q^2u) \dots L(q^{n-1}u). \quad (20)$$

При $|q| < 1$ матричное произведение $L_n(u)$ сходится абсолютно и

$$L_{\infty}(u) = \begin{pmatrix} \chi_+(q^{-1}u) & 0 \\ \chi_+(u) & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Это равенство следует из соотношения $L_{\infty}(u) = L(u)L_{\infty}(qu)$.

Аналогичные выражения могут быть написаны и для χ_- . Например, если $t_-(u) = t_+(u^{-1})$ (т.е. $T(u) = T(u^{-1})$), то $\chi_-(u) \equiv \chi_+(u^{-1})$.

Замечательны квазиклассические пределы $\chi_{\pm}(u)$. Функция $\psi(u) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n u)$ называется в некоторых приложениях “компактный квантовый дилогарифм”, поскольку в пределе $q = e^{-\epsilon} \rightarrow 1$ она имеет главную асимптотику

$$\psi(u) = \exp \left\{ \epsilon^{-1} \int_0^u \ln(1-x) d \ln x + O(1) \right\}.$$

В том же самом пределе голоморфное решение

$$\chi(q^{-1}u) = t(u)\chi(u) - p(u)\chi(qu), \quad (22)$$

где полиномы $t(u)$ и $p(u)$ таковы, что $t(0) = 1$ и $p(0) = 0$ (см. (16)), имеет асимптотику

$$\chi(u) = \exp \left\{ \epsilon^{-1} \int_0^u \ln y \, d \ln x + O(1) \right\}, \quad (23)$$

где (x, y) — точка на гиперэллиптической кривой $y + p(x)y^{-1} = t(x)$. Начальная точка в интеграле (23) есть $(x, y) = (0, 1)$, а интегрирование ведется в окрестности этой точки.

4. АНЗАЦ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

С учетом обозначений (11) функции

$$\psi_+(x) = \frac{\chi_+(u)}{n_+(u)}, \quad \psi_-(x) = \frac{\chi_-(u)}{n_-(u)} \quad (24)$$

являются решениями первого из уравнений (12), если

$$\frac{n_+(u)}{n_+(q^{-1}u)} = -\lambda u^{-L}, \quad \frac{n_-(u)}{n_-(qu)} = -\lambda u^L. \quad (25)$$

Решения второго из уравнений (12) суть

$$\psi_+^*(x) = \frac{\chi_+^*(\tilde{u})}{n_+^*(\tilde{u})}, \quad \psi_-^*(x) = \frac{\chi_-^*(\tilde{u})}{n_-^*(\tilde{u})}. \quad (26)$$

Уравнения (25) определяют класс функций n_+ и класс функций n_- (т.е. $n_{\pm}$ определены с точностью до двоякопериодических функций), эти классы пока не фиксированы. Общее решение уравнений (12) есть линейная комбинация четырех слагаемых:

$$\Psi(x) \sim \sum_{\varepsilon, \varepsilon' = \pm} \psi_{\varepsilon}(u) \psi_{\varepsilon'}^*(\tilde{u}). \quad (27)$$

Можно оценить среднюю асимптотику каждого слагаемого. Пусть $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ имеет асимптотические разностные свойства

$$\frac{f(x)}{f(x+ib)} \sim a e^{2\pi x b \varepsilon}, \quad \frac{f(x)}{f(x-ib^{-1})} \sim a' e^{2\pi x b^{-1} \varepsilon'}, \quad (28)$$

ε и ε' — целые. Сдвиги в разностных уравнениях могут быть объединены в вещественный сдвиг $x \mapsto x + i(b - b^{-1})$, а асимптотика $|f(x)|$ с вещественным $x \rightarrow \pm\infty$ может быть легко оценена как

$$|f(x)| \leq F(x) \exp \left(\frac{\pi}{2} (\varepsilon + \varepsilon') \operatorname{cth} \theta x^2 + \pi (\varepsilon + \varepsilon') \cos \theta x + \frac{\ln |aa'|}{2 \sin \theta} x \right), \quad (29)$$

где $F(x)$ – некоторая периодическая функция с периодом $i(b - b^{-1}) = -2 \sin \theta$. Усреднение асимптотики подразумевает замену $F(x) \mapsto \max F(x) = \text{const}$. Отсюда заключаем, что $\psi_{\pm}(u)\psi_{\pm}^*(\tilde{u})$ растут при $x \rightarrow \pm\infty$, в то время как

$$|\psi_{\pm}(u)\psi_{\mp}^*(\tilde{u})| \sim e^{-2\pi L \cos \theta |x|}, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (30)$$

Таким образом, мы приходим к следующему анзацу для $\Psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\Psi(x) = \frac{\chi_+(u)\chi_-^*(\tilde{u})}{D_1(x)} - \frac{\chi_-(u)\chi_+^*(\tilde{u})}{D_2(x)}, \quad (31)$$

где $D_1 \sim n_+ n_-^*$ и $D_2 \sim n_- n_+^*$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \frac{D_1(x)}{D_1(x - ib)} &= -\lambda u^{-L}, & \frac{D_1(x)}{D_1(x - ib^{-1})} &= -\lambda^* \tilde{u}^L, \\ \frac{D_2(x)}{D_2(x + ib)} &= -\lambda u^L, & \frac{D_2(x)}{D_2(x + ib^{-1})} &= -\lambda^* \tilde{u}^{-L}. \end{aligned} \quad (32)$$

Эти уравнения по-прежнему определяют классы функций. Предположим далее, что

$$-\lambda = e^{i\pi L b^2 - \pi\gamma b}, \quad G = e^{2\pi\gamma b}, \quad (33)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда D_1 и D_2 могут быть записаны в следующем виде:

$$D_1(x) = e^{-i\pi L x^2 + i\pi\gamma} u^{-L} W_1(u), \quad D_2(x) = e^{-i\pi L x^2 - i\pi\gamma} u^{-L} W_2(u), \quad (34)$$

где функции

$$W_{1,2}(u) = u^{2L} W_{1,2}(qu) \quad (35)$$

суть $(x \mapsto x - ib^{-1})$ -периодические составные части $D_{1,2}$. Функции W_1 и W_2 определяются этими уравнениями по-прежнему с точностью до произвольных двоякопериодических функций. Согласно теореме Лиувилля уравнения (35) подразумевают, что $W_{1,2}(u)$ как функции x имеют по крайней мере $2L$ нулей в параллелограмме периодов. Конечно же, нули могут быть выбраны комплексными, так что $\Psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и спектр t_j произволен. Для квантования следует обратиться к условию аналитичности $\Psi(x)$ в полосе (14). Эта полоса включает в себя весь параллелограмм периодов, так что существует только один способ обеспечить аналитичность $\Psi(x)$ в полосе. Этот способ подразумевает следующее:

1) следует выбрать функцию W_2 пропорциональной W_1 , при этом оба слагаемых в (31) имеют общий знаменатель и

$$\Psi(x) = e^{i\pi L x^2} \frac{e^{-i\pi\gamma x} \chi_+(u)\chi_-^*(\tilde{u}) - \xi e^{i\pi\gamma x} \chi_-(u)\chi_+^*(\tilde{u})}{u^{-L} W(u)}, \quad (36)$$

где ξ – некоторое комплексное число, $W_1 = W_2 = W$;

2) функция $W(u)$ должна быть выбрана с минимально возможным набором из $2L$ нулей:

$$W(u) = \prod_{j=1}^{2L} H(u/s_j), \quad (37)$$

где $H(u) = -uH(qu) - \text{тета-функция}$,

$$H(u) = (u; q)_\infty (qu^{-1}; q)_\infty (q; q)_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n-1)/2} (-u)^n, \quad (38)$$

так что уравнения (35) приводят к ограничению

$$\prod_{j=1}^{2L} s_j = 1; \quad (39)$$

3) необходимо обеспечить сокращение нулей знаменателя с нулями числителя в формуле (36) во всей полосе. Этот прием использовался Гутсвиллером [3].

Последнее условие порождает бесконечную систему уравнений для набора из $2L - 1$ независимых переменных s_j , $j = 1, \dots, 2L - 1$ и $2L - 1$ параметров t_j , $j = 1, \dots, 2L - 1$. К счастью, существует специальный выбор s_j , который позволяет свести бесконечную систему уравнений к конечной системе, и это будет сделано в следующем разделе.

5. УРАВНЕНИЯ КВАНТОВАНИЯ

Помимо обозначений (11) и (33) удобно ввести также величины

$$s_j = e^{2\pi\sigma_j b}, \quad \sum_{j=1}^{2L} \sigma_j = 0. \quad (40)$$

Нули знаменателя в равенстве (36) в полосе (14) суть точки $\sigma_j + inb - inb^{-1}$, $j = 1, \dots, 2L$, $n \in \mathbb{Z}$. Им соответствуют $u = q^n s_j$ и $\tilde{u} = q^{*n} \tilde{s}_j$. Условие равенства нулю числителя (36) в этих точках дает бесконечный набор уравнений

$$\xi = e^{-2\pi i \gamma \sigma_j} \frac{G^n \frac{\chi_+(q^n s_j)}{\chi_-(q^n s_j)}}{G^{*n} \frac{\chi_+^*(q^{*n} \tilde{s}_j)}{\chi_-^*(q^{*n} \tilde{s}_j)}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, 2L. \quad (41)$$

Числитель и знаменатель в каждом из этих уравнений сопряжены, и более тщательный анализ показывает, что все эти уравнения можно удовлетворить, если и числитель, и знаменатель не зависят от n , т.е.

$$G^n \frac{\chi_+(q^n s_j)}{\chi_-(q^n s_j)} = \frac{\chi_+(s_j)}{\chi_-(s_j)} \stackrel{\text{def}}{=} M(s_j). \quad (42)$$

Независимость от n может быть переписана следующим образом. Пусть

$$w(u) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_+(q^{-1}u)\chi_-(u) - G\chi_+(u)\chi_-(q^{-1}u). \quad (43)$$

Тогда условие (42) может быть переписано как $w(q^n s_j) = 0$ для любых n, j .

Функция w связана с q -вронскианом $\psi_+(q^{-1}u)\psi_-(u) - \psi_+(u)\psi_-(q^{-1}u)$ уравнения (24). Исключая отсюда $n_{\pm}$, можно получить равенство (43). Из уравнений (16), (17) для $\chi_{\pm}$ можно получить, что $w(u) = u^{2L}w(qu)$, и поскольку (43) по определению есть сходящийся ряд по u, u^{-1} , то существует единственный набор $s_j, j = 1, \dots, 2L$, такой, что

$$w(u) = C \prod_{j=1}^{2L} H(u/s_j), \quad \prod_{j=1}^{2L} s_j = 1. \quad (44)$$

Константа C , зависящая от G и набора t_j , несущественна, и $W(u) = w(u)/C$.

Следовательно, если s_j являются нулями вронскиана (43), то весь бесконечный набор уравнений (41) приводится к конечному набору из $2L - 1$ уравнений (поскольку число ξ само по себе должно определяться этими уравнениями)

$$\xi = e^{-2\pi i \gamma \sigma_j} \frac{M(s_j)}{M^*(\tilde{s}_j)}, \quad j = 1, \dots, 2L. \quad (45)$$

Это система уравнений на коэффициенты t_j “потенциала” (8), число уравнений в точности совпадает с числом неизвестных t_j и с числом независимых s_j . Из формул (43), (44) следует, что s_j есть однозначная функция от набора t_j . С другой стороны, можно показать, что t_j суть многозначные функции от s_j с бесконечным числом листов, что и обеспечивает бесконечное число решений уравнений (45).

Возвращаясь к концу предыдущего раздела, можно убедиться, что условие (37) выполняется автоматически, так что оно не является гипотезой, а следует из (41) и последующего анализа.

Численные исследования уравнений (45) позволяют предположить, что все их решения соответствуют вещественным σ_j , так что ξ – чистая фаза. При этом $\Psi(x)$ из (36) имеет постоянную фазу при $x \in \mathbb{R}$ (поскольку комплексное сопряжение эквивалентно модулярному преобразованию). Кроме того, если “потенциал” симметричен, $T(u) = T(u^{-1})$, то $\xi = \pm 1$ – просто четность.

Заметим в заключение, что благодаря определению (42), числитель в (36) равен нулю в точках $\sigma_j + inb - imb^{-1}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, так что $\Psi(x)$ аналитична во всей комплексной плоскости.

6. КВАНТОВАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЦЕПОЧКА ТОДЫ

Квантовая кривая для квантовой релятивистской цепочки Тоды длины N в одной из возможных нормировок [4] есть

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} + (-)^N G \mathbf{u}^N \mathbf{v}^{-1} - t(\mathbf{u}), \quad (46)$$

где

$$t(u) = \sum_{j=0}^N t_j (-u)^j, \quad t_0 = t_N = 1. \quad (47)$$

Уравнения Бакстера для $Q(x) = \langle Q|x \rangle$ суть $\langle Q|\mathbf{J} = \langle Q|\mathbf{J}^\dagger = 0$.

Условия для $Q(x)$ следующие [2], [5]:

- 1) $|Q(x)| \sim 1$ при $x \rightarrow -\infty$ и $|Q(x)| \sim e^{-2\pi N \cos \theta x}$ при $x \rightarrow +\infty$;
- 2) $Q(x)$ — целая функция.

Слегка модифицируя предыдущие рассуждения (они соответствуют случаю четных $N = 2L$), определим $\chi_\pm$ как голоморфные по $u^{\pm 1}$ решения:

$$\begin{aligned}\chi_+(q^{-1}u) &= t(u)\chi_+(u) - G(-u)^N \chi_+(qu), \\ \chi_-(qu) &= \frac{t(u)}{(-u)^N} \chi_-(u) - \frac{G}{(-u)^N} \chi_-(q^{-1}u).\end{aligned}\quad (48)$$

Их q -вронскиан определяется формулой (43), при этом имеют место разностное свойство $W(u) = (-u)^N W(qu)$ и разложение

$$W(u) = C \prod_{j=1}^N H(u/s_j), \quad \prod_{j=1}^N s_j = 1. \quad (49)$$

Пусть, как и в предыдущих разделах,

$$M(s_j) = \frac{\chi_+(s_j)}{\chi_-(s_j)}, \quad (50)$$

и условие квантования для вещественных σ_j , $s_j \equiv e^{2\pi\sigma_j b}$ есть

$$e^{-2\pi i \gamma \sigma_j} \frac{M(s_j)}{M(s_j)^*} = \xi, \quad j = 1, \dots, N. \quad (51)$$

Все обозначения здесь те же, что и использованные ранее.

Теперь функция $Q(x)$, удовлетворяющая всем условиям, задается формулой

$$Q(x) = \frac{e^{-2\pi i \gamma x} \chi_+(u) \chi_-^*(\tilde{u}) - \xi \chi_-(u) \chi_+^*(\tilde{u})}{W(u)}. \quad (52)$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы предлагаем сценарий квантования для некоторых уравнений типа уравнения Бакстера в режиме сильной связи. Первой важной деталью сценария является то, что определенные q -разностные уравнения второго порядка имеют голоморфные по u решения (функции χ) подобно тому, как компактный квантовый дилогарифм является голоморфным решением разностного уравнения первого порядка [6]. Эти функции однозначно определены и замечательно подходят для численного анализа, это отличает наш случай от случая $|q| = 1$ [5]. Другое важное наблюдение заключается в том, что q -определитель Вронского двух функций χ есть произведение тета-функций, и именно вронскиан должен быть использован для преобразования функций χ в решения исходных разностных уравнений. Использование нулей вронскиана сводит бесконечную систему уравнений на вычеты к конечной.

Условие квантования, т.е. условие аналитичности волновой функции или функции Бакстера Q в полосе (14), приводится к набору трансцендентных уравнений (45) в терминах функций χ . Число уравнений в (45) растет при росте размера системы. Мы до сих пор не нашли хорошего метода для исследования этих уравнений в термодинамическом пределе.

В этой работе мы рассматривали специфические квантовые кривые $\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ гиперэллиптического типа (7) и (46). В обоих примерах $\Psi(x)$ и $Q(x)$ оказались аналитическими функциями во всей комплексной плоскости, это особенность $\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ тодовского типа. В более сложных примерах это не обязательно так. Предложенная схема может быть обобщена на весь класс квантовых алгебраических кривых (не только гиперэллиптических), соответствующий классу интегрируемых моделей с локальной алгеброй Вейля как алгеброй наблюдаемых [7].

Благодарности. Эта работа поддержана Исследовательским Советом Австралии (ARC) и частично грантом CGP CRDF RM1-2334-MO-02. Я хотел бы поблагодарить В. Бажанова, Р. Кашаева, С. Пакуляка и М. Семенова-Тян-Шанского за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *L. D. Faddeev.* Lett. Math. Phys. 1995. V. 34. P. 249–254; *L. D. Faddeev.* Modular double of quantum group. In: Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformation and Symmetries. Dijon, France, September 5–8, 1999. V. 1. Math. Phys. Stud. V. 21. Eds. G. Dito, D. Sternheimer. Dordrecht: Kluwer, 2000. P. 149–156; *L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, A. Yu. Volkov.* Commun. Math. Phys. 2001. V. 219. P. 199–219; *L. D. Faddeev, R. M. Kashaev.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 4043–4048.
- [2] *S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky.* Commun. Math. Phys. 2002. V. 225. P. 573–609.
- [3] *M. Gutzwiller.* Ann. of Phys. 1981. V. 133. P. 304–331; *V. Pasquier, M. Gaudin.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 5243–5252; *S. Kharchev, D. Lebedev.* Lett. Math. Phys. 1999. V. 50. P. 53–77.
- [4] *V. Kuznetsov, A. Tsiganov.* Separation of variables for the quantum relativistic Toda lattices. hep-th/9402111; *G. Pronko, S. Sergeev.* J. Appl. Math. 2001. V. 1. P. 47–68.
- [5] *F. A. Smirnov.* Dual Baxter equations and quantization of Affine Jacobian. math-ph/0001032; Baxter equations and Deformation of Abelian Differentials. math-ph/0302014.
- [6] *L. D. Faddeev, R. M. Kashaev.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 427–434.
- [7] *S. M. Sergeev.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 5693–5714; *C. M. Sergeev.* ТМФ. 2000. Т. 124. № 3. С. 391–409.

Поступила в редакцию 28.VI.2004 г.