Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Карасев, Е. М. Новикова, Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода, *ТМФ*, 2005, том 142, номер 3, 530–555

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 04:18:44

АЛГЕБРА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОММУТАЦИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ ДЛЯ ЭФФЕКТА ЗЕЕМАН–ШТАРКА В АТОМЕ ВОДОРОДА

Рассматривается эффект Зеемана–Штарка для атома водорода в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях. Дополнительно может присутствовать неоднородный возмущающий потенциал. Если скрещенные поля удовлетворяют некоторому резонансному соотношению, то в резонансном спектральном кластере снятие вырождения происходит только во втором порядке теории возмущений. В этом кластере усредненный гамильтониан выражается через образующие некоторой динамической алгебры с полиномиальными коммутационными соотношениями; структура соотношений определяется парой взаимно простых целых чисел из резонансной пропорции. Построены неприводимые гипергеометрические представления этой алгебры. В неприводимом представлении усредненная спектральная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго или третьего порядка, решения которого – модельные полиномы. Асимптотика решения исходной задачи об эффекте Зеемана–Штарка в резонансном кластере строится с помощью когерентных состояний динамической алгебры. Выписана также асимптотика спектра в нерезонансных кластерах, где вырождение снимается уже в первом порядке теории возмущений.

Ключевые слова: интегрируемые системы, нелинейные коммутационные соотношения, когерентные состояния, резонансные спектральные асимптотики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья завершает цикл работ, посвященных 30-летию выхода в свет книги В. П. Маслова “Операторные методы” [1], послужившей отправной точкой многих современных исследований в области некоммутативного анализа и квантовой геометрии.

Продолжая тему статей [2], [3], мы изучаем конфигурации электрического и магнитного полей, в которых движение квантовой частицы управляется динамическими алгебрами с нелинейными коммутационными соотношениями, выходящими за рамки теории алгебр Ли. В данной работе рассматривается движение частицы в кулоновском поле

*Московский государственный институт электроники и математики, Москва, Россия. E-mail: karasev@miem.edu.ru; elena_novikova@miem.edu.ru

(например, движение электрона в поле ядра атома водорода), которое возмущено однородными электрическим и магнитным полями. Предполагается, что напряженности E и H этих полей являются величинами одного порядка малости: $|E| \sim \varepsilon$, $|H| \sim \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$. Кроме того, допускается наличие дополнительного неоднородного потенциала, величина которого имеет порядок ε^2 . Для наглядности рассматривается конкретный пример, когда этот дополнительный потенциал – кубический, хотя метод применим к произвольному возмущающему потенциалу.

Для исследования системы привлекаются метод квантового усреднения и теория когерентных состояний для алгебр с нелинейными коммутационными соотношениями, как это было объяснено во введении к статье [2]. Мы показываем, что при условии резонанса между полями E и H в данной модели возникает алгебра с полиномиальными соотношениями, структура которых та же, что и в статье [3], но используемые неприводимые представления совершенно иные (не эквивалентные).

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 гамильтониан системы приводится к сумме оператора “действие” S_0 (собственные числа которого имеют вид $\hbar n$, где $n \in \mathbb{N}$) и возмущающего оператора. Квантовые интегралы движения оператора S_0 образуют алгебру $so(4)$. Для этой алгебры построена структура “рождение–уничтожение” с двумя вещественными параметрами, значения которых ниже (в п. 3.3) выбираются согласованно с возмущающими полями E и H .

В разделе 3 применяется метод квантового усреднения: в п. 3.2 вычисляется унитарное преобразование, приводящее возмущенный гамильтониан к сумме оператора “действие” и усредненного возмущения, коммутирующего с “действием”. В п. 3.3 получено выражение усредненного возмущения в первых двух порядках по ε в виде полинома от генераторов алгебры квантовых интегралов движения оператора S_0 . Коэффициенты этого полинома выражаются через параметры внешнего электромагнитного поля; таблица коэффициентов приведена в приложении А.

Далее решается спектральная задача для усредненного возмущения на подпространстве, где S_0 принимает значение $\hbar n$. При этом в зависимости от величин и направлений электрического и магнитного полей E и H возникают два принципиально различных случая в зависимости от того, соизмеримы или нет длины векторов $H - 3nE$ и $H + 3nE$. Если эти длины несоизмеримы, то усредненный гамильтониан уже в первом порядке по ε имеет простой спектр. Этот случай мы не рассматриваем в силу его тривиальности.

Если длины векторов $H - 3nE$ и $H + 3nE$ соизмеримы, то здесь опять возможно несколько вариантов. Первый вариант: один из векторов $H - 3nE$ или $H + 3nE$ – нулевой. Это *вырожденный* случай, где не возникает новых динамических алгебр, отличных от $su(2)$; мы его подробно не рассматриваем. Второй вариант: поля E и H ортогональны. Это простейший резонансный случай, в котором длины векторов $H - 3nE$ и $H + 3nE$ совпадают. И, наконец, в общем резонансном случае мы имеем

$$\frac{|H - 3nE|}{|H + 3nE|} = \frac{l}{r}, \quad (1.1)$$

где l, r – взаимно простые натуральные числа.

При резонансе усредненное возмущение представляет собой сумму некоторого нового оператора $\mathbf{G}_0$ типа “действие” (с кратным спектром) и нового возмущающего оператора $\mathbf{G}_1$. Поэтому к нему можно еще раз применить квантовое усреднение. В результате в разделе 4 исходная спектральная задача сводится к спектральной задаче для трех коммутирующих операторов: $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{G}_0$ и дважды усредненного возмущения $\overline{\mathbf{G}_1}$.

Основная часть раздела 4 посвящена исследованию дважды усредненного гамильтониана $\overline{\mathbf{G}_1}$. Очевидно, $\overline{\mathbf{G}_1}$ является элементом динамической алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ совместных квантовых интегралов движения двух коммутирующих операторов: $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$. В работе выписаны генераторы этой алгебры и перестановочные соотношения, которым они подчинены. Это универсальные полиномиальные соотношения, структура которых определяется только числами l и r . Получено выражение усредненного гамильтониана $\overline{\mathbf{G}_1}$ в виде полинома от генераторов алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$.

Выделенная динамическая алгебра с полиномиальными соотношениями детально исследуется в разделе 5. По своей структуре она совпадает с алгеброй из статьи [3]. Однако в данной работе приходится изучать иные неприводимые представления этой алгебры (соответствующие иным симплектическим листам пуассоновой алгебры). Мы строим неприводимые представления алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ обыкновенными дифференциальными операторами порядка $l + r$ в пространстве полиномов; выписываем соответствующие гипергеометрические когерентные состояния и определяем когерентное преобразование, сплетающее абстрактное представление данной алгебры с неприводимыми представлениями.

В разделе 6 вычисляются собственные значения и собственные функции дважды усредненного гамильтониана при наличии резонанса. С помощью когерентного преобразования этот гамильтониан сводится к обыкновенному дифференциальному оператору третьего порядка в гильбертовом пространстве полиномов. Для исходной спектральной задачи собственные числа выражаются через собственные числа этого дифференциального оператора, а для собственных функций получается представление через гипергеометрические когерентные состояния. В частности, в случае $l + r > 3$ для всех этих решений предъявлены элементарные формулы.

Еще раз подчеркнем, что динамическая алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$, введенная в данной работе, совпадает с алгеброй, выделенной в статье [3] при изучении гамильтониана частицы в поле Кулона–Дирака с магнитным зарядом $\hbar k/2$. При этом структурные константы l и r алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ в данной модели управляются резонансом (1.1) между внешними полями E и H , а в модели из работы [3] константы l и r определяются соотношением между главным квантовым числом n и квантовым числом k магнитного заряда: $(n + |k|/2 + k/2)/(n + |k|/2 - k/2) = l/r$. Это весьма интересная параллель между двумя физически разными моделями.

Отметим также, что рассматриваемое в данной работе общее явление резонанса между скрещенными электрическим и магнитным полями в эффекте Зеемана–Штарка, по-видимому, ранее не было исследовано (см. обсуждения и ссылки на литературу, например, в работах [4]–[6]).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К ВИДУ “ДЕЙСТВИЕ” + ВОЗМУЩЕНИЕ

2.1. Гамильтониан системы. Нерелятивистский гамильтониан электрона в атоме водорода, который помещен в однородное электромагнитное поле порядка ε , может быть представлен в виде

$$-\Delta_x - \frac{1}{|x|} - i\varepsilon \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \varepsilon(e_1 x_1 + e_3 x_3) + \frac{\varepsilon^2}{4}(x_1^2 + x_2^2). \quad (2.1)$$

Здесь e_1, e_3 – некоторые константы, причем можно считать, что $e_1 \geq 0$. Магнитное поле предполагается направленным вдоль третьей оси, а электрическое поле имеет компоненты вдоль первой и третьей осей.

Мы предполагаем, что $\varepsilon \ll 1$ и что дополнительно может присутствовать неоднородное электрическое поле, величина которого имеет порядок малости выше ε , например, ε^2 . Для наглядности рассматривается случай, когда дополнительный потенциал пропорционален $x_1 x_2^2$. Тогда полный гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} -\Delta_x - \frac{1}{|x|} - i\varepsilon \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \varepsilon(e_1 x_1 + e_3 x_3) + \frac{\varepsilon^2}{4}(x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon^2 \gamma x_1 x_2^2. \quad (2.2)$$

2.2. Перенормировка спектральной задачи. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{H}\Psi(x) = \mathcal{E}\Psi(x) \quad (2.3)$$

на интервале энергий $\mathcal{E} < 0$. Для каждого целого $n \geq 1$ введем параметры μ и ν , а также новую переменную $q \in \mathbb{R}^3$ и новую волновую функцию $\tilde{\Psi}$:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4n^2\nu^2}, \quad \mu = \varepsilon n^4 \nu^2, \quad q = \frac{x}{n^2 \nu}, \quad \Psi(x) = \frac{\tilde{\Psi}(q, \mu)}{n^2}. \quad (2.4)$$

Положим $\hbar = 1/n$ и рассмотрим следующие $\hbar$ -дифференциальные операторы по переменной q :

$$\mathbf{S}_0 = |\mathbf{q}| \left(\frac{1}{4} + |\mathbf{p}|^2 \right), \quad \mathbf{S}_1 = \nu \mathbf{Z}_1 + \hbar \mathbf{X}_1 + \mu(\nu \mathbf{Q}_1 + \hbar^2 \mathbf{Y}_1), \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= q, \quad \mathbf{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \quad \mathbf{X}_1 = |\mathbf{q}|(\mathbf{q}_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2 \mathbf{p}_1), \quad \mathbf{Y}_1 = \frac{1}{4} |\mathbf{q}|(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2), \\ \mathbf{Z}_1 &= |\mathbf{q}|(e_1 \mathbf{q}_1 + e_3 \mathbf{q}_3), \quad \mathbf{Q}_1 = \gamma |\mathbf{q}| \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2^2. \end{aligned}$$

Отметим, что эти операторы эрмитовы в гильбертовом пространстве $L_-^2(\mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi_1(q) \overline{\psi_2(q)}}{|q|} dq.$$

Замена (2.4) приводит к следующей спектральной задаче в пространстве $L_-^2(\mathbb{R}^3)$:

$$(\mathbf{S}_0 + \mu \mathbf{S}_1) \tilde{\Psi} = \nu \tilde{\Psi}. \quad (2.6)$$

Число ν – искомое собственное значение, а μ – параметр (связанный с напряженностью внешнего поля). Известно [2], что спектр оператора $\mathbf{S}_0$ имеет вид $\{\hbar N | N = 1, 2, 3, \dots\}$. В частности, $\mathbf{S}_0$ имеет собственное значение $\hbar n = 1$. При $\mu > 0$ будем рассматривать ветви собственных значений оператора $\mathbf{S}_0 + \mu \mathbf{S}_1$, “выходящие” из этого единичного собственного значения, т.е. имеющие вид $\nu = 1 + \mu \lambda(\mu)$, где $\lambda(\mu)$ – некоторые гладкие функции в окрестности точки $\mu = 0$. Соответствующие собственные функции задачи (2.6) обозначим через $\tilde{\Psi}(q, \mu)$. Определив из (2.6) функции $\lambda(\mu)$, мы сможем записать систему уравнений

$$1 + \mu \lambda(\mu) = \nu, \quad \mu = \varepsilon n^4 \nu^2 \quad (2.7)$$

относительно ν и μ . Ее решение обозначим через $\nu = \nu(\varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Задача (2.3) на подпространстве в $L_-^2(\mathbb{R}^3)$, отвечающем отрицательному спектру $\mathcal{E} < 0$, эквивалентна спектральной задаче (2.6) в $L_-^2(\mathbb{R}^3)$. Собственные числа и собственные функции этих задач связаны между собой следующими формулами:*

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4n^2\nu(\varepsilon)^2}, \quad \Psi(x) = \frac{1}{n^2} \tilde{\Psi}\left(\frac{x}{n^2\nu(\varepsilon)}, \mu(\varepsilon)\right). \quad (2.8)$$

2.3. Оператор “действие”. В гильбертовом пространстве $L_-^2(\mathbb{R}^3)$ рассмотрим эрмитов оператор $\mathbf{S}_0$ (2.5). Алгебра операторов, коммутирующих с $\mathbf{S}_0$, порождается образующими $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3)$ и $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3)$, которые определены формулами

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{R}), \quad \mathbf{K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{M} - \mathbf{R}), \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{q} \left(\frac{1}{4} - |\mathbf{p}|^2 \right) + 2(\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{p} - 2i\hbar\mathbf{p}.$$

Вектор $\mathbf{M}$ – момент количества движения, а $\mathbf{R}$ – модифицированный вектор Лапласа–Рунге–Ленца¹⁾. Отметим, что операторы $\mathbf{J}_j$, $\mathbf{K}_j$, $\mathbf{M}_j$ и $\mathbf{R}_j$ эрмитовы в пространстве $L_-^2(\mathbb{R}^3)$ (см. [7]). Генераторы $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ порождают алгебру Ли $so(4)$.

Наличие не коммутирующих между собой интегралов движения приводит к вырождению спектра гамильтониана $\mathbf{S}_0$. Размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению $\hbar N$, равна N^2 . Базис собственных функций внутри

¹⁾Мы следуем терминологии, предложенной в работе [7]; обычно здесь используется термин “вектор Рунге–Ленца”. Фактически интеграл движения вида $\mathbf{R}$ в задаче Кеплера был введен Лапласом [8].

этого подпространства можно выбирать различными способами. Мы введем базис, параметризованный двумя вспомогательными вещественными параметрами θ_1, θ_2 , значения которых выберем позже.

Следуя работе [9], определим операторы $\mathbf{V}^* = (\mathbf{V}_1^*, \mathbf{V}_2^*, \mathbf{V}_3^*)$, $\mathbf{v}^*$:

$$\mathbf{V}^* = \frac{1}{4}\mathbf{q} - 2(\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{p} + \mathbf{q}|\mathbf{p}|^2 - i|\mathbf{q}|\mathbf{p} + 2i\hbar\mathbf{p}, \quad \mathbf{v}^* = \frac{1}{4}|\mathbf{q}| - |\mathbf{q}||\mathbf{p}|^2 - i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \hbar.$$

Введем также их линейную комбинацию

$$\mathbf{V}_\theta^* \stackrel{\text{def}}{=} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \mathbf{V}_1^* + i \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \mathbf{V}_2^* + \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \mathbf{V}_3^* + \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \mathbf{v}^*.$$

Помимо этого, определим следующие линейные комбинации образующих $\mathbf{J}, \mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \cos \theta_1 \cdot \mathbf{J}_1 + \sin \theta_1 \cdot \mathbf{J}_3, & \mathbf{A}_2 &= \cos \theta_2 \cdot \mathbf{K}_1 + \sin \theta_2 \cdot \mathbf{K}_3, \\ \mathbf{B}_1 &= -\sin \theta_1 \cdot \mathbf{J}_1 + \cos \theta_1 \cdot \mathbf{J}_3 + i\mathbf{J}_2, & \mathbf{B}_2 &= -\sin \theta_2 \cdot \mathbf{K}_1 + \cos \theta_2 \cdot \mathbf{K}_3 - i\mathbf{K}_2, \\ \mathbf{C}_1 &= -\sin \theta_1 \cdot \mathbf{J}_1 + \cos \theta_1 \cdot \mathbf{J}_3 - i\mathbf{J}_2, & \mathbf{C}_2 &= -\sin \theta_2 \cdot \mathbf{K}_1 + \cos \theta_2 \cdot \mathbf{K}_3 + i\mathbf{K}_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

ТЕОРЕМА 2.1. В собственном подпространстве оператора $\mathbf{S}_0$

$$\mathcal{L}[N] \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \in L_-^2(\mathbb{R}^3) \mid \mathbf{S}_0\psi = \hbar N\psi\} \quad (2.11)$$

следующие функции образуют ортонормированный базис:

$$\psi_{j_1, j_2}^N = c_{j_1, j_2}^N (-\mathbf{B}_1)^{j_1} \mathbf{B}_2^{j_2} (\mathbf{V}_\theta^*)^{N-1} \psi_{0,0}^1, \quad 0 \leq j_1, j_2 \leq N-1. \quad (2.12)$$

Здесь $\psi_{0,0}^1$ – нижняя собственная функция оператора $\mathbf{S}_0$ (т.е. $\mathbf{S}_0\psi_{0,0}^1 = \hbar\psi_{0,0}^1$), а c_{j_1, j_2}^N – нормировочная константа:

$$c_{j_1, j_2}^N = \frac{1}{((N-1)!)^2 2^{N-1} \hbar^{n-1+j_1+j_2}} \sqrt{\frac{(N-1-j_1)!(N-1-j_2)!}{j_1! j_2!}}.$$

Явный вид формулы для функций (2.12) приведен в приложении Б. По отношению к генераторам (2.10) собственные функции ψ_{j_1, j_2}^N “действия” обладают следующими свойствами. Они образуют собственный базис для генераторов $\mathbf{A}_j$:

$$\mathbf{A}_1 \psi_{j_1, j_2}^N = \frac{\hbar}{2}(N-1-2j_1)\psi_{j_1, j_2}^N, \quad \mathbf{A}_2 \psi_{j_1, j_2}^N = -\frac{\hbar}{2}(N-1-2j_2)\psi_{j_1, j_2}^N, \quad (2.13)$$

а операторы $\mathbf{B}_j$ и $\mathbf{C}_j$ являются для них повышающими и понижающими.

3. КВАНТОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ И ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА

3.1. Метод квантового усреднения. Схема квантового усреднения содержится в работах [2], [7]; там же даны ссылки на литературу. Мы приведем только необходимые технические формулы. Для каждого оператора $\mathbf{F}$ определим

$$\underline{\mathbf{F}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\tau \mathbf{S}_0/\hbar} \mathbf{F} e^{i\tau \mathbf{S}_0/\hbar} d\tau, \quad \mathbf{F}^\# = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - \tau) e^{-i\tau \mathbf{S}_0/\hbar} \mathbf{F} e^{i\tau \mathbf{S}_0/\hbar} d\tau.$$

По заданному оператору $\mathbf{S}_1$ (2.5) построим операторы

$$\mathbf{S}_2 = \frac{i}{2\hbar} [\mathbf{S}_1^\#, \mathbf{S}_1 + \underline{\mathbf{S}}_1], \quad \mathbf{U} = \exp \left\{ -\frac{i\mu}{\hbar} (\mathbf{S}_1^\# + \mu \mathbf{S}_2^\# + O(\mu^2)) \right\}. \quad (3.1)$$

Тогда имеют место тождества

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{S}_0 + \mu \mathbf{S}_1) \mathbf{U} = \mathbf{S}_0 + \mu \underline{\mathbf{S}}_1 + \mu^2 \underline{\mathbf{S}}_2 + O(\mu^3), \quad [\underline{\mathbf{S}}_1, \mathbf{S}_0] = [\underline{\mathbf{S}}_2, \mathbf{S}_0] = 0.$$

Поскольку операторы $\underline{\mathbf{S}}_1, \underline{\mathbf{S}}_2$ коммутируют со старшей частью $\mathbf{S}_0$, то спектральная задача для $\mathbf{S}_0 + \mu \mathbf{S}_1$ сводится (с точностью $O(\mu^3)$) к спектральной задаче для $\underline{\mathbf{S}}_1 + \mu \underline{\mathbf{S}}_2$ на собственных подпространствах оператора $\mathbf{S}_0$.

3.2. Применение квантового усреднения к спектральной задаче. Мы предполагаем, что $\mu \ll 1$ или, что то же самое, $\varepsilon n^4 \ll 1$, $\nu \sim 1$. Тогда после применения к задаче (2.6) метода квантового усреднения для собственных значений ν и собственных функций $\tilde{\Psi}$ оператора $\mathbf{S}_0 + \mu \mathbf{S}_1$ получим следующие формулы:

$$\nu = 1 + \mu \underline{\lambda}(\mu) + O(\mu^3), \quad \tilde{\Psi}(q, \mu) = \mathbf{U} \psi(q, \mu) + O(\mu^2). \quad (3.2)$$

Здесь числа $\underline{\lambda}(\mu)$ – собственные значения усредненного гамильтониана $\underline{\mathbf{S}}_1 + \mu \underline{\mathbf{S}}_2 + O(\mu^2)$, а $\psi(q, \mu)$ – его собственные функции, одновременно являющиеся собственными функциями оператора $\mathbf{S}_0$, т.е. $\mathbf{S}_0 \psi = \psi$, $(\underline{\mathbf{S}}_1 + \mu \underline{\mathbf{S}}_2) \psi = \underline{\lambda}(\mu) \psi$.

Оператор $\mathbf{S}_1$ (2.5) с учетом формулы $\nu = 1 + \mu \underline{\lambda}(0) + O(\mu^2)$ имеет вид $\mathbf{S}_1 = \mathbf{Z}_1 + \hbar \mathbf{X}_1 + \mu(\mathbf{Q}_1 + \hbar^2 \mathbf{Y}_1 + \underline{\lambda}(0) \mathbf{Z}_1) + O(\mu^2)$. Поэтому после усреднения задача (2.6) сводится к следующей:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0 \psi = \psi, \\ (\mathbf{P}_1 + \mu(\mathbf{P}_2 + \mathbf{Q}_1 + \hbar^2 \mathbf{Y}_1 + \underline{\lambda}(0) \mathbf{Z}_1) + O(\mu^2)) \psi = \underline{\lambda}(\mu) \psi, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\mathbf{P}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Z}_1 + \hbar \mathbf{X}_1$, а оператор $\mathbf{P}_2$ строится по $\mathbf{P}_1$ по той же формуле (3.1), по которой $\mathbf{S}_2$ строится по $\mathbf{S}_1$. Прежде чем решать задачу (3.3), необходимо определить значения $\underline{\lambda}(0)$, от которых зависит оператор из левой части второго из уравнений (3.3). Для этого достаточно решить задачу (3.3) при $\mu = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0 \psi = \psi, \\ \mathbf{P}_1 \psi = \underline{\lambda}(0) \psi. \end{cases} \quad (3.4)$$

В силу формул (3.1), (3.2) переход от собственных функций задачи (3.4) к собственным функциям задачи (2.6) производится с помощью оператора

$$\mathbf{U} = \exp \left\{ -\frac{i\mu}{\hbar} \left(\mathbf{P}_1^\# + \mu(\mathbf{P}_2^\# + \mathbf{Q}_1^\# + \hbar^2 \mathbf{Y}_1^\# + \lambda(0) \mathbf{Z}_1^\#) + O(\mu^2) \right) \right\}.$$

При дополнительном предположении $\mu/\hbar \ll 1$ или, что то же самое, $\varepsilon n^5 \ll 1$, мы имеем гораздо более простую формулу:

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + O(\varepsilon n^5). \quad (3.5)$$

Ниже мы ограничимся этим приближением для $\mathbf{U}$ и для собственных функций.

3.3. Усредненный гамильтониан. Поскольку усредненный гамильтониан коммутирует с $\mathbf{S}_0$, то он представим в виде функции от генераторов $\mathbf{J}, \mathbf{K}$ (2.9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Слагаемые в усредненном гамильтониане задачи (3.3) задаются следующими формулами:*

$$\underline{\mathbf{P}}_1 = 2\mathbf{S}_0(3e_1\mathbf{J}_1 + (\hbar + 3e_3)\mathbf{J}_3 - 3e_1\mathbf{K}_1 + (\hbar - 3e_3)\mathbf{K}_3), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_2 = & \mathbf{S}_0(-17(e_1^2 + e_3^2)\mathbf{S}_0^2 - 42e_1^2\mathbf{J}_1^2 - 12e_1(2\hbar + 7e_3)\mathbf{J}_1\mathbf{J}_3 - 2(\hbar^2 + 12\hbar e_3 + 21e_3^2)\mathbf{J}_3^2 + \\ & + 120e_1^2\mathbf{J}_1\mathbf{K}_1 + 8e_1(4\hbar + 15e_3)\mathbf{J}_3\mathbf{K}_1 - 8e_1(4\hbar - 15e_3)\mathbf{J}_1\mathbf{K}_3 - \\ & - 4(\hbar^2 - 30e_3^2)\mathbf{J}_3\mathbf{K}_3 - 42e_1^2\mathbf{K}_1^2 + 12e_1(2\hbar - 7e_3)\mathbf{K}_1\mathbf{K}_3 - \\ & - 2(\hbar^2 - 12\hbar e_3 + 21e_3^2)\mathbf{K}_3^2 - 19(e_1^2 + e_3^2)\hbar^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}}_1 = & 20\gamma\mathbf{S}_0 \left(2\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2^2 - 2\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2^2 - 7\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{K}_2 + 7\mathbf{J}_2\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 - 5\mathbf{J}_2^2\mathbf{K}_1 + 5\mathbf{J}_1\mathbf{K}_2^2 - \right. \\ & \left. - \mathbf{J}_3^2\mathbf{K}_1 + \mathbf{J}_1\mathbf{K}_3^2 + \mathbf{J}_3\mathbf{J}_1\mathbf{K}_3 - \mathbf{J}_3\mathbf{K}_3\mathbf{K}_1 + \frac{4}{3}\hbar^2(\mathbf{J}_1 - \mathbf{K}_1) \right), \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{S}_0(3\mathbf{S}_0^2 + 4(\mathbf{J}_3\mathbf{K}_3 - \mathbf{J}_3^2 - \mathbf{K}_3^2) - 8(\mathbf{J}_1\mathbf{K}_1 + \mathbf{J}_2\mathbf{K}_2) + \hbar^2),$$

$$\underline{\mathbf{Z}}_1 = 6\mathbf{S}_0(e_1(\mathbf{J}_1 - \mathbf{K}_1) + e_3(\mathbf{J}_3 - \mathbf{K}_3)).$$

Здесь все операторы $\mathbf{J}_j, \mathbf{K}_l$ симметризуются по Вейлю.

Прежде всего необходимо проанализировать оператор $\underline{\mathbf{P}}_1$ в задаче (3.4). В силу (3.6) он записывается через сумму двух коммутирующих операторов $3e_1\mathbf{J}_1 + (\hbar + 3e_3)\mathbf{J}_3$ и $-3e_1\mathbf{K}_1 + (\hbar - 3e_3)\mathbf{K}_3$. Этим элементам алгебры Ли $so(4) = su(2) \times su(2)$ соответствуют два вектора из $su(2)$:

$$\begin{pmatrix} 3e_1 \\ 0 \\ \hbar + 3e_3 \end{pmatrix} = \frac{H - 3nE}{\varepsilon n}, \quad \begin{pmatrix} -3e_1 \\ 0 \\ \hbar - 3e_3 \end{pmatrix} = \frac{H + 3nE}{\varepsilon n}. \quad (3.7)$$

Здесь E и H — исходные напряженности электрического и магнитного полей.

Пусть оба вектора $H - 3nE$ и $H + 3nE$ ненулевые. Тогда введем углы θ_1 между лучом (Ox_1) и вектором $H - 3nE$ и θ_2 между лучом (Ox_2) и вектором $H + 3nE$.

Оператор $\underline{\mathbf{P}}_1$ (3.6) может быть представлен через линейную комбинацию коммутирующих операторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ (2.10):

$$\underline{\mathbf{P}}_1 = 2\mathbf{S}_0(\mathcal{L}\mathbf{A}_1 + \mathcal{R}\mathbf{A}_2), \quad (3.8)$$

где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ – нормированные длины указанных выше векторов:

$$\mathcal{L} = \sqrt{9e_1^2 + (\hbar + 3e_3)^2}, \quad \mathcal{R} = \sqrt{9e_1^2 + (\hbar - 3e_3)^2}. \quad (3.9)$$

Если же один из векторов $H \mp 3nE$ нулевой, то соответствующее число $\mathcal{L}$ или $\mathcal{R}$ в (3.8) равно нулю, а операторы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ должны в этом случае соответствовать значению $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, т.е. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{J}_3, \mathbf{A}_2 = \mathbf{K}_3$.

Другие слагаемые в гамильтониане задачи (3.3) также легко выражаются через обрязающие $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ (2.10).

3.4. Резонанс между электрическим и магнитным полями. На собственном подпространстве $\mathcal{L}[n]$ (2.11), которое отвечает собственному значению $\hbar n = 1$ оператора $\mathbf{S}_0$, спектральная задача (3.4) имеет вид

$$2(\mathcal{L}\mathbf{A}_1 + \mathcal{R}\mathbf{A}_2)\psi = \lambda(0)\psi, \quad \psi \in \mathcal{L}[n], \quad (3.10)$$

где $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ – генераторы (2.10). Поскольку нам известен собственный базис генераторов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ (см. теорему 2.1 и формулы (2.13)), то можно выписать решение задачи (3.10). В частности, из формул (2.13) видно, что спектр задачи (3.10) состоит из чисел $(\mathcal{L}(n-1-2j_1) - \mathcal{R}(n-1-2j_2))/n$, где $1 \leq j_1, j_2 \leq n-1$. Если константы $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ несоизмеримы, то все эти числа различны (спектр простой). В этом случае вырождение спектра оператора $\mathbf{S}_0$ в исходной задаче (2.6) (или в задаче (2.3)) снимается уже в первом члене теории возмущений по внешнему полю, т.е. по ε . Нас, однако, будет интересовать случай соизмеримых $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$. В этом случае возникает нетривиальная динамическая алгебра, контролирующая снятие вырождения спектра в следующем приближении по ε . Ниже мы предьявим и исследуем эту алгебру.

В силу формул (3.7), (3.9) соизмеримость $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ означает соизмеримость длин векторов $H - 3nE$ и $H + 3nE$. Мы будем говорить, что поля E и H *находятся в резонансе*, если выполнено одно из следующих **условий резонанса**:

а) либо

$$\frac{|H - 3nE|}{|H + 3nE|} = \frac{l}{r},$$

l, r – взаимно простые натуральные числа;

б) либо E ортогонально H (и тогда выбираем $l = r = 1$);

в) либо E параллельно H , причем $H = \pm 3nE$ (тогда выбираем l или r равным нулю).

Случаи “а” и “б” назовем *невыврожденными*, а случаи “в” – *вырожденными*.

В вырожденных случаях мы приведем ниже итоговый результат, но опустим все подробности, поскольку эти случаи дают тривиальную динамическую алгебру $su(2)$ (см. также [5]).

3.5. Невырожденные случаи резонанса. В невырожденных случаях существует положительное число d такое, что

$$\mathcal{L} = ld, \quad \mathcal{R} = rd. \quad (3.11)$$

Собственные значения оператора $2(\mathcal{L}\mathbf{A}_1 + \mathcal{R}\mathbf{A}_2)$ имеют вид

$$\lambda(0) = \frac{d}{n}((l-r)(n-1) + 2m), \quad \text{где } m = m(j_1, j_2) = rj_2 - lj_1, \quad j_1, j_2 \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Очевидно, разным парам чисел j_1, j_2 может соответствовать одно и то же значение m . Поэтому, прежде всего, введем обозначения для однозначной записи чисел m .

ЛЕММА 3.1. Пусть l, r – взаимно простые натуральные числа,

$$m = rj_2 - lj_1, \quad j_1, j_2 \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (3.12)$$

Тогда существует единственная тройка целых чисел $(m_1^0, m_2^0, \Delta m)$ такая, что

$$\begin{aligned} m &= rm_2^0 - lm_1^0 + l\Delta m, \\ \begin{cases} 0 \leq m_1^0 \leq \min\{n-1, r-1\}, \\ 0 \leq m_2^0 \leq \min\{n-1, l-1\}, \end{cases} & - \left\lfloor \frac{n-1-m_1^0}{r} \right\rfloor \leq \Delta m \leq \left\lfloor \frac{n-1-m_2^0}{l} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Верно и обратное: если некоторая тройка целых чисел $(m_1^0, m_2^0, \Delta m)$ удовлетворяет условиям (3.13), то найдутся числа j_1 и j_2 такие, что выполнены условия (3.12). А именно, общее решение уравнения (3.12) имеет вид $j_1 = m_1 + rj$, $j_2 = m_2 + lj$, $j = 0, 1, \dots, D$, где

$$\begin{aligned} m_1 &\stackrel{\text{def}}{=} m_1^0 + r \left(\frac{|\Delta m|}{2} - \frac{\Delta m}{2} \right), & m_2 &\stackrel{\text{def}}{=} m_2^0 + l \left(\frac{|\Delta m|}{2} + \frac{\Delta m}{2} \right), \\ D &\stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \left\lfloor \frac{n-1-m_1}{r} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n-1-m_2}{l} \right\rfloor \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для каждой пары взаимно простых натуральных чисел l и r , а также для пары $(l, r) = (1, 1)$ обозначим через $\mathcal{M}_{l,r}$ множество целых чисел m , для которых задача (3.12) имеет хотя бы одно решение (j_1, j_2) . Согласно лемме 3.1,

$$\mathcal{M}_{l,r} = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists(m_1^0, m_2^0, \Delta m) \in \mathbb{Z}^3 : \text{выполнены условия (3.13)}\}. \quad (3.15)$$

Отметим, что числам m_1, m_2, D (3.14) можно дать эквивалентное определение: для любого $m \in \mathcal{M}_{l,r}$ числа m_1, m_2 (3.14) – наименьшие значения (соответственно) переменных j_1, j_2 , подчиненных условиям (3.12), а число $D + 1$ – количество пар (j_1, j_2) , удовлетворяющих условиям (3.12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Предположим, что поля E и H удовлетворяют условиям резонанса “а” или “б” и соотношениям (3.11). Тогда собственные значения задачи (3.4) задаются формулой

$$\lambda(0) = \underline{\lambda}_m^n(0) = \frac{d}{n}((l-r)(n-1) + 2m), \quad (3.16)$$

где $m \in \mathcal{M}_{l,r}$. Соответствующими ортонормированными собственными функциями служат $\psi = \psi_{m_1+rj, m_2+lj}^n$ (2.12), (Б.1), где $j = 0, 1, \dots, D$; числа m_1, m_2 и D определены формулами (3.14).

4. ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Рассмотрим теперь усредненную задачу (3.3) в случае, когда поля E и H находятся в резонансе. Усредненный оператор $\mathbf{P}_1$ можно рассматривать как новый оператор “действие”: его спектр с точностью до мультипликативной константы состоит из целых чисел. Поэтому к гамильтониану задачи (3.3) можно еще раз применить квантовое усреднение.

4.1. Перенормировка усредненной задачи. Пусть числа l, r, d определяются условиями резонанса и соотношениями (3.11). Напоминаем, что мы рассматриваем только невырожденный случай.

Умножим второе из уравнений (3.3) на $1/(2d)$ и введем обозначения

$$\mathbf{G}_0 \stackrel{\text{def}}{=} l\mathbf{A}_1 + r\mathbf{A}_2, \quad \mathbf{G}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_2 + \mathbf{Q}_1 + \hbar^2 \mathbf{Y}_1 + \underline{\lambda}(0)\mathbf{Z}_1, \quad \zeta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{\lambda}(\mu) - \underline{\lambda}(0)}{\mu}. \quad (4.1)$$

Здесь $\underline{\lambda}(\mu)$ – искомые собственные значения усредненной задачи (3.3), а $\underline{\lambda}(0)$ определены в предложении 3.2.

Тогда вместо (3.3) получим эквивалентную ей задачу

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0 \psi = \psi, \\ (\mathbf{G}_0 + \frac{\mu}{2d} \mathbf{G}_1) \psi = \frac{\underline{\lambda}(0) + \mu \zeta}{2d} \psi. \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2. Дважды усредненная спектральная задача. Введем операторы

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\tau \mathbf{G}_0/\hbar} \mathbf{G}_1 e^{i\tau \mathbf{G}_0/\hbar} d\tau, \\ {}^\# \mathbf{G}_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - \tau) e^{-i\tau \mathbf{G}_0/\hbar} \mathbf{G}_1 e^{i\tau \mathbf{G}_0/\hbar} d\tau, \end{aligned} \quad (4.3)$$

обеспечивающие выполнение тождеств

$$e^{i\mu {}^\# \mathbf{G}_1/(2\hbar d)} \left(\mathbf{G}_0 + \frac{\mu}{2d} \mathbf{G}_1 \right) e^{-i\mu {}^\# \mathbf{G}_1/(2\hbar d)} = \mathbf{G}_0 + \frac{\mu}{2d} \overline{\mathbf{G}}_1 + O(\mu^2), \quad [\overline{\mathbf{G}}_1, \mathbf{G}_0] = 0.$$

С помощью этих тождеств спектральная задача (4.2) сводится к спектральной задаче для дважды усредненного гамильтониана $\overline{\mathbf{G}}_1$:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0 \varphi = \varphi, \\ \mathbf{G}_0 \varphi = \frac{(l-r)(n-1)+2m}{2n} \varphi, \\ \overline{\mathbf{G}}_1 \varphi = \zeta \varphi, \end{cases} \quad (4.4)$$

где m пробегает множество $\mathcal{M}_{l,r}$ (3.15).

Собственные функции ψ и φ задач (3.3) и (4.4) связаны: $\psi = e^{-i\varepsilon n^5 {}^\# \mathbf{G}_1/(2d)} \varphi + O(\varepsilon n^4)$. При дополнительном предположении $\varepsilon n^5 \ll 1$ получаем $\psi = \varphi + O(\varepsilon n^5)$.

4.3. Алгебра совместных интегралов движения операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$. В результате двукратного усреднения исходная система (2.6) сводится к квантовой интегрируемой системе с гамильтонианом $\overline{\mathbf{G}_1}$. Этот гамильтониан обладает двумя независимыми коммутирующими между собой квантовыми интегралами движения $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ алгебру всех операторов, коммутирующих с $\mathbf{S}_0$ и с $\mathbf{G}_0$.

ТЕОРЕМА 4.1. 1. Пусть l и r – взаимно простые натуральные числа или $l = r = 1$. Тогда алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ операторов, коммутирующих с $\mathbf{S}_0$ и с $\mathbf{G}_0 = l\mathbf{A}_1 + r\mathbf{A}_2$, порождается образующими

$$\mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \hbar\mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_4 = \mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 - \hbar\mathbf{A}_2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1^r\mathbf{B}_2^l, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_1^r\mathbf{C}_2^l; \quad (4.5)$$

здесь $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ – операторы (2.10). В гильбертовом пространстве $L_-^2(\mathbb{R}^3)$ операторы $\mathbf{A}_j$ эрмитовы: $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j^*$, а $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ взаимно сопряжены: $\mathbf{B} = \mathbf{C}^*$.

2. Образующие $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ подчинены следующим полиномиальным перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j] &= 0, & [\mathbf{C}, \mathbf{B}] &= \hbar f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4), \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_1 - r\hbar), & \mathbf{C}\mathbf{A}_1 &= (\mathbf{A}_1 - r\hbar)\mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_2 + l\hbar), & \mathbf{C}\mathbf{A}_2 &= (\mathbf{A}_2 + l\hbar)\mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_3\mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_3 + 2r\hbar\mathbf{A}_1 - r^2\hbar^2), & \mathbf{C}\mathbf{A}_3 &= (\mathbf{A}_3 + 2r\hbar\mathbf{A}_1 - r^2\hbar^2)\mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_4\mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_4 - 2l\hbar\mathbf{A}_2 - l^2\hbar^2), & \mathbf{C}\mathbf{A}_4 &= (\mathbf{A}_4 - 2l\hbar\mathbf{A}_2 - l^2\hbar^2)\mathbf{C}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь полином f от четырех переменных задан как²⁾

$$\begin{aligned} f(A_1, A_2, A_3, A_4) &\stackrel{\text{def}}{=} r \prod_{q=0}^{l-1} (A_4 + (2q+1)\hbar A_2 - q(q+1)\hbar^2) \times \\ &\times \sum_{j=0}^{r-1} (2A_1 + (r-1-2j)\hbar) \prod_{p=j+1-r}^{j-1} (A_3 + (2p+1)\hbar A_1 - p(p+1)\hbar^2) - \\ &- l \prod_{p=0}^{r-1} (A_3 + (2p+1)\hbar A_1 - p(p+1)\hbar^2) \times \\ &\times \sum_{j=0}^{l-1} (2A_2 + (l-1-2j)\hbar) \prod_{q=j+1-l}^{j-1} (A_4 + (2q+1)\hbar A_2 - q(q+1)\hbar^2). \end{aligned}$$

Алгебра с соотношениями (4.6) имеет четыре элемента Казимира:

$$\mathbf{B}\mathbf{C} - \rho(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4), \quad l\mathbf{A}_1 + r\mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_3, \quad \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_4,$$

²⁾ Произведение $\prod$ с пустым множеством сомножителей принимается равным 1.

где

$$\rho(A_1, A_2, A_3, A_4) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p=0}^{r-1} (A_3 - (2p+1)\hbar A_1 - p(p+1)\hbar^2) \times \\ \times \prod_{q=0}^{l-1} (A_4 + (2q+1)\hbar A_2 - q(q+1)\hbar^2).$$

3. В представлении (4.5) элементы Казимира выражаются через $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{G}_0$ с помощью формул

$$\mathbf{B}\mathbf{C} - \rho(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4) = 0, \quad l\mathbf{A}_1 + r\mathbf{A}_2 = \mathbf{G}_0, \\ \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_3 = \frac{1}{4}(\mathbf{S}_0^2 - \hbar^2), \quad \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_4 = \frac{1}{4}(\mathbf{S}_0^2 - \hbar^2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Перестановочные соотношения (4.6), конечно, можно переписать как коммутационные соотношения между эрмитовыми образующими $\mathbf{A}_j$, $(\mathbf{B} + \mathbf{C})/2$, $(\mathbf{B} - \mathbf{C})/(2i)$. Мы выбрали в (4.5), (4.6) неэрмитовы образующие типа рождение–уничтожение $\mathbf{A}_j$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ с целью дальнейшего их использования в конструкции когерентных состояний, следуя приложению Б из работы [2] (или общей схеме из работы [9]). Алгебра (4.6) попадает в класс алгебр, исследованный в работе [9].

Отметим, что в простейшем случае $l = r = 1$ (когда поля E и H ортогональны) резонансные соотношения (4.6) квадратичны. Если в этом случае ввести эрмитовы образующие

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{N}_1 = \frac{1}{2i}(\mathbf{B} - \mathbf{C}), \quad \mathbf{N}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}), \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_1^2 + \hbar\mathbf{A}_1,$$

то для них соотношения (4.6) примут вид соотношений (4.9) из работы [7] (см. также формулы (1.2) в статье [2]).

4.4. Усредненный гамильтониан как элемент алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$. Теперь мы приведем выражение для дважды усредненного гамильтониана через образующие (4.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Предположим, что поля E и H находятся в резонансе. Пусть углы θ_1 , θ_2 и длины $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ определены как в п. 3.3, так что $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ (3.9) удовлетворяют условиям резонанса “а”, “б”, (3.11).*

Усредненный гамильтониан $\overline{\mathbf{G}}_1$ (4.1), (4.3) является элементом алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$. Он задается через образующие (4.5) формулой

$$\overline{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{S}_0 T(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{S}_0, \lambda(0)) + \\ + \begin{cases} \mathbf{S}_0 (5\gamma(\mathcal{Q}_{11}\mathbf{A}_1 + \mathcal{Q}_{12}\mathbf{A}_2) + \mathcal{P}_6 + \hbar^2\mathcal{Y}_6)(\mathbf{B} + \mathbf{C}), & \text{если } l = r = 1; \\ 5\gamma\mathcal{Q}_{10}\mathbf{S}_0(\mathbf{B} + \mathbf{C}), & \text{если } l = 2, \quad r = 1; \\ 5\gamma\mathcal{Q}_9\mathbf{S}_0(\mathbf{B} + \mathbf{C}), & \text{если } l = 1, \quad r = 2; \\ 0, & \text{если } l + r > 3. \end{cases} \quad (4.7)$$

Здесь все операторы симметризованы по Вейлю, а полином T определен как

$$\begin{aligned} T(a_1, a_2, s, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} & 5\gamma(\mathcal{Q}_1 a_1^3 + \mathcal{Q}_2 a_1^2 a_2 + \mathcal{Q}_3 a_1 a_2^2 + \mathcal{Q}_4 a_2^3) + (\mathcal{P}_3 + \hbar^2 \mathcal{Y}_3) a_1^2 + \\ & + (\mathcal{P}_4 + \hbar^2 \mathcal{Y}_4) a_1 a_2 + (\mathcal{P}_5 + \hbar^2 \mathcal{Y}_5) a_2^2 + (5\gamma(\mathcal{Q}_5 s^2 + \hbar^2 \mathcal{Q}_6) + \lambda \mathcal{Z}_1) a_1 + \\ & + (5\gamma(\mathcal{Q}_7 s^2 + \hbar^2 \mathcal{Q}_8) + \lambda \mathcal{Z}_2) a_2 + (\mathcal{P}_1 + \hbar^2 \mathcal{Y}_1) s^2 + (\mathcal{P}_2 + \hbar^2 \mathcal{Y}_2) \hbar^2; \end{aligned} \quad (4.8)$$

числа $\mathcal{P}_j, \mathcal{Q}_j, \mathcal{Y}_j, \mathcal{Z}_j$ выписаны в приложении А.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В случае $l + r > 3$ оператор $\overline{\mathbf{G}}_1$ не зависит от образующих $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ (4.6). В этом случае зависимость от $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ появляется лишь в следующих порядках теории возмущений.

5. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathcal{F}_{\text{quant}}$

5.1. Алгебра $\mathcal{F}$ (классическая версия). Символ оператора $\mathbf{S}_0$ – функция $S_0 = |q|(1/4 + |p|^2)$ на $\mathbb{R}^6$. Она находится в инволюции с вектор-функциями

$$J = \frac{1}{2}(M + R), \quad K = \frac{1}{2}(M - R), \quad M = q \times p, \quad R = q \left(\frac{1}{4} - |p|^2 \right) + 2(q, p)p.$$

Компоненты J и K порождают алгебру Ли $so(4)$ относительно скобки Пуассона:

$$\{J_j, J_k\} = -\varepsilon_{jkl} J_l, \quad \{J_j, K_k\} = 0, \quad \{K_j, K_k\} = -\varepsilon_{jkl} K_l.$$

Вместо J_j и K_k введем новые образующие

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos \theta_1 \cdot J_1 + \sin \theta_1 \cdot J_3, & A_2 &= \cos \theta_2 \cdot K_1 + \sin \theta_2 \cdot K_3, \\ B_1 &= -\sin \theta_1 \cdot J_1 + \cos \theta_1 \cdot J_3 + iJ_2, & B_2 &= -\sin \theta_2 \cdot K_1 + \cos \theta_2 \cdot K_3 - iK_2, \\ C_1 &= -\sin \theta_1 \cdot J_1 + \cos \theta_1 \cdot J_3 - iJ_2, & C_2 &= -\sin \theta_2 \cdot K_1 + \cos \theta_2 \cdot K_3 + iK_2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5.1. 1. Пусть l и r – взаимно простые натуральные числа или $l = r = 1$. Алгебра $\mathcal{F}$ функций на $T^*\mathbb{R}^3$, находящаяся в инволюции с S_0 и $G_0 = lA_1 + rA_2$, порождается следующими образующими:

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3 = B_1 C_1, \quad A_4 = B_2 C_2, \quad B = B_1^r B_2^l, \quad C = C_1^r C_2^l. \quad (5.1)$$

2. Образующие пуассоновой алгебры $\mathcal{F}$ подчинены полиномиальным соотношениям со структурными константами l и r :

$$\begin{aligned} \{A_j, A_k\} &= 0, & \{C, B\} &= 2i(r^2 A_1 A_3^{r-1} A_4^l - l^2 A_2 A_3^r A_4^{l-1}), \\ \{A_1, B\} &= -irB, & \{A_1, C\} &= irC, \\ \{A_2, B\} &= ilB, & \{A_2, C\} &= -ilC, \\ \{A_3, B\} &= 2irA_1 B, & \{A_3, C\} &= -2irA_1 C, \\ \{A_4, B\} &= -2ilA_2 B, & \{A_4, C\} &= 2ilA_2 C. \end{aligned} \quad (5.2)$$

3. Соотношения (5.2) при любых (не обязательно целочисленных) значениях $l \geq 1$, $r \geq 1$ задают пуассонову алгебру функций на $\mathbb{R}^6$. Ее симплектические листья $\Omega \subset \mathbb{R}^6$ задаются четырьмя функциями Казимира:

$$\varkappa_1 = bc - a_3^r a_4^l, \quad \varkappa_2 = la_1 + ra_2, \quad \varkappa_3 = a_1^2 + a_3, \quad \varkappa_4 = a_2^2 + a_4$$

(здесь $a_1, a_2, a_3, a_4, (b+c)/2, (b-c)/(2i)$ – декартовы координаты на $\mathbb{R}^6$). Реализации $a_j = A_j$, $b = B$, $c = C$ (5.1) соответствует область, где

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_3 = \varkappa_4, \quad a_3 \geq 0, \quad a_4 \geq 0. \quad (5.3)$$

В этой области симплектические листья параметризуются двумя константами s и t , причем $|t| \leq 2 \min\{l, r\}s$; замыкание листа задается уравнениями

$$\overline{\Omega} = \{bc - a_3^r a_4^l = 0, \quad la_1 + ra_2 = t, \quad a_1^2 + a_3 = s^2, \quad a_2^2 + a_4 = s^2\}. \quad (5.4)$$

В реализации (5.1)

$$\sqrt{B_1 C_1 + A_1^2} \Big|_{\Omega} = \sqrt{B_2 C_2 + A_2^2} \Big|_{\Omega} = \frac{S_0}{2} \Big|_{\Omega} = s, \quad (lA_1 + rA_2) \Big|_{\Omega} = t.$$

Если $|t| = 2 \min\{l, r\}s$, то листья Ω нульмерны и состоят из одной точки

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, b, c) = \left(\frac{t}{2l}, \frac{t}{2r}, s^2 - \frac{t^2}{4l^2}, s^2 - \frac{t^2}{4r^2}, 0, 0 \right).$$

Если $0 < |t| < 2 \min\{l, r\}s$, то при $l = r = 1$ листья Ω диффеоморфны сфере; при $l = r > 1$ листья диффеоморфны цилиндру и получаются из замыкания (5.4) выкидыванием двух точек:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_2, a_3, a_4, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\operatorname{sgn}(t)s, \frac{\operatorname{sgn}(t)(|t| - ls)}{r}, 0, \frac{(rs)^2 - (|t| - ls)^2}{r^2}, 0, 0 \right),$$

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_2, a_3, a_4, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\operatorname{sgn}(t)(|t| - rs)}{l}, \operatorname{sgn}(t)s, \frac{(ls)^2 - (|t| - rs)^2}{l^2}, 0, 0, 0 \right);$$

при $l \neq r$ листья диффеоморфны плоскости: в случае $l < r$ листья получаются из замыкания $\overline{\Omega}$ выкидыванием точки P , а в случае $l > r$ листья получаются из $\overline{\Omega}$ выкидыванием точки Q .

Если $t = 0$, то листья Ω диффеоморфны цилиндру и получаются из замыкания (5.4) выкидыванием двух точек: в случае $l \leq r$ выкидываются точки

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, b, c) = \left(\pm s, \mp \frac{ls}{r}, 0, \frac{(r^2 - l^2)s^2}{r^2}, 0, 0 \right),$$

a в случае $l \geq r$ — точки

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, b, c) = \left(\pm \frac{rs}{l}, \mp s, \frac{(l^2 - r^2)s^2}{l^2}, 0, 0, 0 \right).$$

Во всех случаях выброшенные точки сами являются нульмерными симплектическими листами.

4. Кэлерова структура на листах Ω вводится с помощью комплексной координаты

$$z = \frac{c}{(s + a_1)^r (r - a_2)^l}.$$

Образующие $a_j|_\Omega$, $b|_\Omega$, $c|_\Omega$ выражаются через z следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{t - |t| + 2 \min\{l, r\}s}{2l} - ra(|z|^2), \\ a_2 &= \frac{t + |t| - 2 \min\{l, r\}s}{2r} + la(|z|^2), \\ a_3 &= \left(s - \frac{t - |t| + 2 \min\{l, r\}s}{2l} + ra(|z|^2) \right) \left(s + \frac{t - |t| + 2 \min\{l, r\}s}{2l} - ra(|z|^2) \right), \\ a_4 &= \left(s + \frac{t + |t| - 2 \min\{l, r\}s}{2r} + la(|z|^2) \right) \left(s - \frac{t + |t| - 2 \min\{l, r\}s}{2r} - la(|z|^2) \right), \\ b &= \left(s + \frac{t - |t| + 2 \min\{l, r\}s}{2l} - ra(|z|^2) \right)^r \left(s - \frac{t + |t| - 2 \min\{l, r\}s}{2r} - la(|z|^2) \right)^l \bar{z}, \\ c &= \left(s + \frac{t - |t| + 2 \min\{l, r\}s}{2l} - ra(|z|^2) \right)^r \left(s - \frac{t + |t| - 2 \min\{l, r\}s}{2r} - la(|z|^2) \right)^l z. \end{aligned}$$

Здесь $a = a(x)$ — функция, обратная к функции

$$x = x(a) = \frac{\left(\frac{s}{r} - \frac{s}{\max\{l, r\}} - \frac{t - |t|}{2lr} + a \right)^r \left(\frac{s}{l} - \frac{s}{\max\{l, r\}} + \frac{t + |t|}{2lr} + a \right)^l}{\left(\frac{s}{r} + \frac{s}{\max\{l, r\}} + \frac{t - |t|}{2lr} - a \right)^r \left(\frac{s}{l} + \frac{s}{\max\{l, r\}} - \frac{t + |t|}{2lr} - a \right)^l}$$

на промежутке $0 \leq a \leq (2s \min\{l, r\} - |t|)/(lr)$. Симплектическая структура на листах Ω , соответствующая скобкам (5.2), имеет вид $\omega = ia'(|z|^2) d\bar{z} \wedge dz$. Симплектическая площадь листа равна

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \omega = \frac{2s \min\{l, r\} - |t|}{lr}.$$

5.2. Гипергеометрическое представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$. Определим положительные числа

$$\kappa_0 = 1, \quad \kappa_j = (-1)^{(l+r)j} \frac{(1+m_1-n)_{rj}(1+m_2-n)_{lj}}{(1+m_1)_{rj}(1+m_2)_{lj}}$$

при $1 \leq j \leq D$. Здесь операция $(x)_j$, как обычно, определяется формулой

$$(x)_j \equiv x(x+1) \dots (x+j-1), \quad (x)_0 \equiv 1. \quad (5.5)$$

Введем гильбертово пространство $\mathcal{P}[n, m]$ полиномов степени не выше D . Для полиномов вида $f(\bar{z}) = \sum_{j=0}^D f_j \bar{z}^j$ скалярное произведение определим формулой

$$\langle f, f' \rangle_{\mathcal{P}[n, m]} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^D \frac{1}{\kappa_j} f_j \bar{f}'_j. \quad (5.6)$$

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $l, r, n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathcal{M}_{l, r}$ (3.15), а числа m_1, m_2, D заданы формулами (3.14). Тогда для любого $\hbar > 0$ дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \mathring{A}_1 &= \hbar \left(\frac{n-1}{2} - m_1 - r\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), & \mathring{A}_2 &= -\hbar \left(\frac{n-1}{2} - m_2 - l\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \\ \mathring{A}_3 &= \frac{\hbar^2(n^2-1)}{4} - \mathring{A}_1^2, & \mathring{A}_4 &= \frac{\hbar^2(n^2-1)}{4} - \mathring{A}_2^2, \\ \mathring{B} &= \hbar^{l+r} \prod_{p=0}^{r-1} \left(n - m_1 + p - r\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \prod_{q=0}^{l-1} \left(n - m_2 + q - l\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \bar{z}, \\ \mathring{C} &= \frac{\hbar^{l+r}}{\bar{z}} \prod_{p=0}^{r-1} \left(m_1 - p + r\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \prod_{q=0}^{l-1} \left(m_2 - q + l\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

задают неприводимое представление алгебры (4.6) в пространстве $\mathcal{P}[n, m]$, соответствующее симплектическому листу Ω (5.3) с параметрами $s = \hbar n$, $t = \hbar((l-r)(n-1) + 2m)/2$. В этом представлении операторы $\mathring{A}_j$ эрмитовы: $\mathring{A}_j = \mathring{A}_j^*$, а $\mathring{B}$ и $\mathring{C}$ взаимно сопряжены: $\mathring{B} = \mathring{C}^*$.

Это представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ мы назовем *гипергеометрическим*.

Общий алгоритм построения неприводимых представлений алгебр типа (4.6) (в том числе и представления (5.7)) описан в работах [9], [10]; см. также приложение Б к работе [2].

5.3. Когерентное преобразование и гипергеометрические когерентные состояния. Предположим, что выполнены условия теоремы 5.2. Пусть задано произвольное представление соотношений (4.6) со структурными константами l и r в некотором гильбертовом пространстве $\mathbb{L}$. Генераторы этого представления обозначим через $\mathbb{A}_j, \mathbb{B}, \mathbb{C}$. Предположим, что в этом представлении операторы $\mathbb{A}_j$ эрмитовы, а операторы $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ взаимно сопряжены.

Пусть $\chi_0 \in \mathbb{L}$ – нормированный “вакуумный” вектор, подчиненный уравнениям

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\chi_0 &= 0, \\ \mathbb{A}_1\chi_0 &= \hbar\left(\frac{n-1}{2} - m_1\right)\chi_0, \quad \mathbb{A}_3\chi_0 = \hbar^2\left(\frac{n^2-1}{4} - \left(\frac{n-1}{2} - m_1\right)^2\right)\chi_0, \\ \mathbb{A}_2\chi_0 &= -\hbar\left(\frac{n-1}{2} - m_2\right)\chi_0, \quad \mathbb{A}_4\chi_0 = \hbar^2\left(\frac{n^2-1}{4} - \left(\frac{n-1}{2} - m_2\right)^2\right)\chi_0.\end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_z &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^D \frac{1}{(1+m_1)_{rj}(1+m_2)_{lj}} \left(\frac{z\mathbb{B}}{\hbar^{l+r}}\right)^j \chi_0 = \\ &= {}_0F_{l+r-1}\left(\left(\frac{1+m_1}{r}, \dots, \frac{r+m_1}{r}, \frac{1+m_2}{l}, \dots, \frac{l+m_2}{l}\right)'; \frac{z\mathbb{B}}{l^l r^r \hbar^{l+r}}\right) \chi_0.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Здесь ${}_sF_t(\alpha_1, \dots, \alpha_s; \beta_1, \dots, \beta_t; y)$ – гипергеометрический ряд [11]:

$${}_sF_t(\alpha_1, \dots, \alpha_s; \beta_1, \dots, \beta_t; y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \geq 0} \frac{(\alpha_1)_j \dots (\alpha_s)_j}{j! (\beta_1)_j \dots (\beta_t)_j} y^j, \quad (5.9)$$

штрих в выражении ${}_sF_{t-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_s; (\beta_1, \dots, \beta_t)'; y)$ означает, что по меньшей мере один из параметров $\beta_1, \dots, \beta_t$ гипергеометрического ряда равен единице и один из таких единичных параметров опускается; операция $(x)_j$ определена формулой (5.5).

Введем ортонормированные векторы

$$\chi_j = \frac{(-1)^{lj} \mathbb{B}^j \chi_0}{\|\mathbb{B}^j \chi_0\|_{\mathbb{L}}}, \quad 0 \leq j \leq D. \quad (5.10)$$

Их линейная оболочка $\mathbb{L}[n, m]$ образует подпространство в $\mathbb{L}$, на котором реализуется неприводимое представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$. Гипергеометрические когерентные состояния $\mathfrak{H}_z$ (5.8) могут быть разложены по базису (5.10): $\mathfrak{H}_z = \sum_{j=0}^D g_j(z) \chi_j$. Здесь $\{g_j\}$, $0 \leq j \leq D$, – ортонормированный базис в $\mathcal{P}[n, m]$, состоящий из мономов

$$g_j(\bar{z}) = (-1)^{lj} \sqrt{\kappa_j} \bar{z}^j. \quad (5.11)$$

В частности, если представление $\mathbb{A}_j = \mathbf{A}_j$, $\mathbb{B} = \mathbf{B}$, $\mathbb{C} = \mathbf{C}$ (4.6) реализовано в гильбертовом пространстве $L_-^2(\mathbb{R}^3)$, то векторы χ_j (5.10) имеют вид

$$\chi_j \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{m_1+rj, m_2+lj}^n(q), \quad 0 \leq j \leq D \quad (5.12)$$

(функции ψ_{j_1, j_2}^n заданы в (2.12), (Б.1)) и образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathcal{L}[n, m] \in L_-^2(\mathbb{R}^3)$, где реализуется неприводимая компонента представления (4.5). Это совместное собственное подпространство операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$:

$$\mathcal{L}[n, m] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \chi \in L_-^2(\mathbb{R}^3) \mid \mathbf{S}_0 \chi = \hbar n \chi, \quad \mathbf{G}_0 \chi = \frac{\hbar}{2}((l-r)(n-1) + 2m) \chi \right\}. \quad (5.13)$$

Скалярное произведение когерентных состояний (5.8) задается формулой

$$\langle \mathfrak{H}_{z'}, \mathfrak{H}_{z''} \rangle_{\mathbb{L}} = \mathfrak{K}(z' \overline{z''}), \quad \mathfrak{K}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^D \kappa_j x^j.$$

Полином $\mathfrak{K}(x)$ является единственным решением следующей краевой задачи для *гипергеометрического уравнения*:

$$\begin{cases} x \prod_{p=0}^{r-1} \left(n - r - m_1 + p + rx \frac{d}{dx} \right) \prod_{q=0}^{l-1} \left(n - l - m_2 + q + lx \frac{d}{dx} \right) \mathfrak{K} - \\ - \prod_{p=0}^{r-1} \left(m_1 - p + rx \frac{d}{dx} \right) \prod_{q=0}^{l-1} \left(m_2 - q + lx \frac{d}{dx} \right) \mathfrak{K} = 0, \\ \mathfrak{K}(0) = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{K}(x) = {}_{l+r}F_{l+r-1} \left(\frac{1+m_1-n}{r}, \dots, \frac{r+m_1-n}{r}, \frac{1+m_2-n}{l}, \dots, \frac{l+m_2-n}{l}; \right. \\ \left. \left(\frac{1+m_1}{r}, \dots, \frac{r+m_1}{r}, \frac{1+m_2}{l}, \dots, \frac{l+m_2}{l} \right)'; (-1)^{l+r} x \right),$$

где ${}_sF_t$ — гипергеометрический ряд (5.9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Полиномы $\mathfrak{K}(x)$ обладают воспроизводящим свойством:*

$$\langle \mathfrak{K}(z' \bar{z}), \mathfrak{K}(z'' \bar{z}) \rangle_{\mathcal{P}[n, m]} = \mathfrak{K}(z' \overline{z''}).$$

Здесь $\mathfrak{K}(z' \bar{z})$ и $\mathfrak{K}(z'' \bar{z})$ рассматриваются как элементы гильбертова пространства $\mathcal{P}[n, m]$ полиномов от $\bar{z}$ со скалярным произведением (5.6).

Теперь мы укажем явный вид преобразования, сплетающего представления алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ с неприводимыми представлениями. Эта конструкция основана на следующем свойстве когерентных состояний $\mathfrak{H}_z$:

$$\mathbb{A}_j \mathfrak{H}_z = \overline{\mathbb{A}_j} \mathfrak{H}_z, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \mathbb{B} \mathfrak{H}_z = \overline{\mathbb{B}} \mathfrak{H}_z; \quad \mathbb{C} \mathfrak{H}_z = \overline{\mathbb{C}} \mathfrak{H}_z.$$

В этих формулах операторы $\overline{\mathbb{A}_j}$, $\overline{\mathbb{B}}$, $\overline{\mathbb{C}}$ действуют по переменной z и получаются комплексным сопряжением из операторов $\mathring{\mathbb{A}_j}$, $\mathring{\mathbb{B}}$, $\mathring{\mathbb{C}}$, заданных формулами (5.7).

Обозначим через $\mathfrak{h}$ мономорфизм $\mathfrak{h}: \mathcal{P}[n, m] \rightarrow \mathbb{L}$

$$\mathfrak{h}: \quad f(\bar{z}) = \sum_{j=0}^D f^j g_j(\bar{z}) \quad \mapsto \quad \chi = \sum_{j=0}^D f^j \chi_j. \quad (5.14)$$

Здесь g_j — базис мономов (5.11) в $\mathcal{P}[n, m]$, а χ_j — базис (5.10) в $\mathbb{L}$.

ТЕОРЕМА 5.3. 1. Когерентное преобразование $\mathfrak{h}: \mathcal{P}[n, m] \rightarrow \mathbb{L}[n, m]$, заданное формулой (5.14), унитарно. Обратное преобразование задается формулой

$$(\mathfrak{h}^{-1}\chi)(\bar{z}) = \langle \chi, \mathfrak{H}_z \rangle_{\mathbb{L}}$$

для всех $\chi \in \mathbb{L}[n, m]$.

Для любого фиксированного $w \in \mathbb{C}$ преобразование $\mathfrak{h}$ переводит гипергеометрический полином $\mathfrak{K}(w\bar{z})$ в гипергеометрическое когерентное состояние $\mathfrak{H}_w$.

Кроме того, выполнены формулы коммутации

$$\mathbb{A}_j \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \overset{\circ}{A}_j, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \mathbb{B} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \overset{\circ}{B}; \quad \mathbb{C} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \overset{\circ}{C},$$

т.е. $\mathfrak{h}$ сплетает абстрактное представление $\mathbb{A}_j, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ алгебры (4.6) в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}$ с гипергеометрическим (неприводимым) представлением $\overset{\circ}{A}_j, \overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{C}$ этой алгебры в гильбертовом пространстве $\mathcal{P}[n, m]$.

2. Семейство векторов $\{\mathfrak{H}_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ (5.8) является семейством когерентных состояний в $\mathbb{L}[n, m]$, т.е. $\mathfrak{H}_z$ является “ядром” когерентного преобразования $\mathfrak{h}$ (5.14):

$$\langle \chi, \mathfrak{h}(f(\bar{z})) \rangle_{\mathbb{L}} = \langle \langle \chi, \mathfrak{H}_z \rangle_{\mathbb{L}}, f(\bar{z}) \rangle_{\mathcal{P}[n, m]}$$

для всех $f \in \mathcal{P}[n, m]$, $\chi \in \mathbb{L}$.

Алгоритм построения когерентных состояний (5.8) приведен в работе [9] (см. также приложение Б к работе [2]).

6. РЕЗОНАНСНЫЙ СПЕКТР И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ЭФФЕКТЕ ЗЕЕМАН-ШТАРКА

6.1. Когерентное преобразование усредненной спектральной задачи.

Рассмотрим усредненную спектральную задачу (4.4) в пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$. В силу теоремы 5.3 (1) с помощью когерентного преобразования (5.14) $\mathfrak{h}: \mathcal{P}[n, m] \rightarrow \mathcal{L}[n, m]$ (5.13) она может быть переформулирована в терминах дифференциального уравнения в пространстве полиномов $\mathcal{P}[n, m]$. Действительно, представления вида $\varphi = \mathfrak{h}(\Phi)$ автоматически дают точные решения первых двух уравнений (4.4) при любых амплитудах Φ .

Далее, третье из уравнений (4.4) в силу формулы (4.7) и теоремы 5.3 (1) записывается в следующем виде:

в случае $l = r = 1 -$

$$\left[T\left(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, 1, \lambda_{\underline{m}}^n(0)\right) + \left(5\gamma(\mathcal{Q}_{11}\overset{\circ}{A}_1 + \mathcal{Q}_{12}\overset{\circ}{A}_2) + \mathcal{P}_6 + \frac{\mathcal{Y}_6}{n^2}\right)(\overset{\circ}{B} + \overset{\circ}{C}) \right] \Phi = \zeta \Phi; \quad (6.1)$$

в случае $l = 2, r = 1 -$

$$\left[T\left(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, 1, \lambda_{\underline{m}}^n(0)\right) + 5\gamma\mathcal{Q}_{10}(\overset{\circ}{B} + \overset{\circ}{C}) \right] \Phi = \zeta \Phi; \quad (6.2)$$

в случае $l = 1, r = 2 -$

$$\left[T\left(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, 1, \lambda_{\underline{m}}^n(0)\right) + 5\gamma \mathcal{Q}_9(\overset{\circ}{B} + \overset{\circ}{C}) \right] \Phi = \zeta \Phi; \quad (6.3)$$

в случае $l + r > 3 -$

$$T\left(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, 1, \lambda_{\underline{m}}^n(0)\right) \Phi = \zeta \Phi. \quad (6.4)$$

Здесь полином T задается формулой (4.8), в которой $s = 1$ и $\lambda = \lambda_{\underline{m}}^n(0)$ – числа (3.16), а операторы $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{C}$ заданы формулой (5.7), в которой $\hbar = 1/n$.

Самый простой в этом списке случай $l + r > 3$. В этом случае решения уравнения (6.4), очевидно, суть мономы $\Phi = g_j$ (5.11), а их когерентное преобразование дает собственные векторы $\varphi = \mathfrak{h}(g_j) = \chi_j$. Соответствующие собственные значения $\zeta = \zeta_j$ задаются явно формулой

$$\begin{aligned} \zeta_j = & T\left(\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2} - m_1 - rj\right), -\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2} - m_2 - lj\right), 1, \lambda_{\underline{m}}^n(0)\right) = \\ = & \frac{1}{8n^4} \left[5\gamma n(\mathcal{Q}_1 J_1^3 - \mathcal{Q}_2 J_1^2 J_2 + \mathcal{Q}_3 J_1 J_2^2 - \mathcal{Q}_4 J_2^3) + 2(n^2 \mathcal{P}_3 + \mathcal{Y}_3) J_1^2 - \right. \\ & - 2(n^2 \mathcal{P}_4 + \mathcal{Y}_4) J_1 J_2 + 2(n^2 \mathcal{P}_5 + \mathcal{Y}_5) J_2^2 + \\ & + 4n(5\gamma(n^2 \mathcal{Q}_5 + \mathcal{Q}_6) + dn((l-r)(n-1) + 2m) \mathcal{Z}_1) J_1 - \\ & - 4n(5\gamma(n^2 \mathcal{Q}_7 + \mathcal{Q}_8) + dn((l-r)(n-1) + 2m) \mathcal{Z}_2) J_2 + \\ & \left. + 8n^2(n^2 \mathcal{P}_1 + \mathcal{Y}_1) + 8(n^2 \mathcal{P}_2 + \mathcal{Y}_2) \right] \Bigg|_{\substack{J_1 = n-1-2m_1-2rj \\ J_2 = n-1-2m_2-2lj}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В случае $l + r \leq 3$ уравнения (6.1)–(6.3) – дифференциальные уравнения 3-го порядка. Априори известно, что они имеют $D + 1$ независимых решений (полиномов степени не выше D). Обозначим эти полиномы через Φ_j , $j = 0, 1, \dots, D$, и разложим их по базису (5.11):

$$\Phi_j(\bar{z}) = \sum_{i=0}^D \Phi_j^i g_i(\bar{z}). \quad (6.6)$$

Тогда собственные функции $\varphi = \varphi_j$ задачи (4.4) можно представить в виде линейной комбинации $\varphi_j = \sum_{i=0}^D \Phi_j^i \chi_i$ функций (5.12).

В частности, интересно рассмотреть ситуацию “чистого” эффекта Зеемана–Штарка, когда дополнительный кубический потенциал в (2.2) отсутствует ($\gamma = 0$). В этой специальной ситуации при $l + r \geq 3$ собственные функции задачи (4.4) имеют вид $\varphi_j = \chi_j$, а собственные числа ζ_j задаются формулой (6.5), где нужно положить $\gamma = 0$.

Далее, для “чистого” эффекта Зеемана–Штарка в случае простейшего резонанса $l = r = 1$ (т.е. в случае ортогональных³⁾ полей E и H) уравнение (6.1) сводится к следую-

³⁾ Напомним (см. замечание 4.1), что случай ортогональных полей обслуживается алгеброй из работы [7].

шему:

$$\begin{aligned} \bar{z} \left[\bar{z}^2 + \frac{3(1 - 27n^4 e_1^4)}{1 + 9n^2 e_1^2} \bar{z} + 1 \right] \frac{d^2 \Phi}{d\bar{z}^2} + \\ + \left[(3 + |m| - 2n) \bar{z}^2 + \frac{3(1 - 27n^4 e_1^4)(2 + |m| - n)}{1 + 9n^2 e_1^2} \bar{z} + 1 + |m| \right] \frac{d\Phi}{d\bar{z}} + \\ + \left[(n - 1)(n - |m| - 1) \bar{z} + \frac{1 + 3|m| + 3m^2 - 3n - 3|m|n}{2(1 + 9n^2 e_1^2)} + \frac{n^2 e_1^2 (1 + 15m^2 - n^2)}{1 + 9n^2 e_1^2} - \right. \\ \left. - \frac{9n^2 e_1^2 m^2}{\sqrt{1 + 9n^2 e_1^2}} + \frac{9n^4 e_1^4 (5 - 9|m| + 21m^2 + 9n + 9|m|n + 4n^2)}{2(1 + 9n^2 e_1^2)} + \frac{\zeta n^4}{4} \right] \Phi = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Это семейство уравнений типа Хейна⁴⁾, параметризованное величиной e_1 . Каждое уравнение этого семейства имеет $D + 1$ полиномиальных решений Φ_j , $0 \leq j \leq D$.

6.2. Асимптотика решения исходной спектральной задачи для эффекта Зеемана–Штарка. В силу (2.7), (4.1) при условии $\varepsilon n^4 \ll 1$ получаем для параметра ν асимптотику

$$\nu_{m,j}^n(\varepsilon) = 1 + \varepsilon n^4 \underline{\lambda}_m^n(0) + \varepsilon^2 n^8 (\zeta_j + 2\underline{\lambda}_m^n(0)^2) + O(\varepsilon^3 n^{12}), \quad (6.8)$$

где $\underline{\lambda}_m(0)$ — числа (3.16).

Подставляя эти выражения в формулы (2.8), (3.2), (3.5), получаем асимптотику решения исходной задачи (2.3).

ТЕОРЕМА 6.1. 1. *Предположим, что электрическое и магнитное поля удовлетворяют условию невырожденного резонанса с некоторым $n \in \mathbb{N}$. Тогда асимптотика по величине поля ε собственных значений гамильтониана (2.2) в n -м кластере задается формулой*

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = -\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2}\varepsilon nd((l - r)(n - 1) + 2m) + \\ + \frac{1}{4}\varepsilon^2 n^4 (2n^2 \zeta_j + d^2((l - r)(n - 1) + 2m)^2) + O(\varepsilon^3 n^{10}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Здесь m пробегает множество $\mathcal{M}_{l,r}$ (3.15), $0 \leq j \leq D$, где D определено в (3.14). В случае $l + r \leq 3$ числа ζ_j — собственные значения одной из спектральных задач (6.1)–(6.3) (в зависимости от значений параметров резонанса l, r), а в случае $l + r > 3$ числа ζ_j задаются формулой (6.5).

⁴⁾ Точнее, при дополнительном условии $9(1 - 27n^4 e_1^4)^2 - 4(1 + 9n^2 e_1^2)^2 > 0$ оригинальное уравнение Хейна [12] получается из (6.7) путем замены

$$\bar{z} \rightarrow -\frac{3(1 - 27n^4 e_1^4) + \sqrt{9(1 - 27n^4 e_1^4)^2 - 4(1 + 9n^2 e_1^2)^2}}{2(1 + 9n^2 e_1^2)} \bar{z}.$$

При дополнительном условии $\varepsilon n^5 \ll 1$ асимптотика собственных функций задачи (2.3) задается формулой

$$\Psi(x) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=0}^D \Phi_j^i \psi_{m_1+ri, m_2+li}^n(q) \right) \Big|_{q=x/(n^2 \nu_{m,j}^n(\varepsilon))} + O(\varepsilon n^5).$$

Здесь ψ_{j_1, j_2}^n — функции (Б.1), в которых θ_1 и θ_2 определены в п. 3.3; в случае $l+r \leq 3$ числа Φ_j^i — коэффициенты разложения (6.6) полиномиальных решений Φ_j одного из уравнений (6.1)–(6.3) (в зависимости от значений параметров l, r), а в случае $l+r > 3$ эти числа имеют вид $\Phi_j^i = \delta_j^i$; асимптотика для $\nu_{m,j}^n(\varepsilon)$ приведена в (6.8).

2. В кластере, номер n которого не удовлетворяет условиям резонанса, асимптотика собственных значений гамильтониана (2.2) задается формулой

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2}\varepsilon n(\mathcal{L}(n-1-2j_1) - \mathcal{R}(n-1-2j_2)) + O(\varepsilon^2 n^6).$$

Здесь $0 \leq j_1, j_2 \leq n-1$, а числа $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ определены в (3.9), где $\hbar = 1/n$.

В частности, результат этой теоремы применим и к “чистому” гамильтониану Зеемана–Штарка (2.1), когда возмущающий кубический потенциал отсутствует. Здесь, если электрическое и магнитное поля ортогональны ($e_3 = 0$), то числа ζ_j — собственные значения уравнения типа Хейна (6.7) и Φ_j — соответствующие полиномы Хейна, а для общего резонанса (условие “а”), когда $l+r \geq 3$, числа ζ_j задаются формулой (6.5) и $\Phi_j^i = \delta_j^i$.

Для полноты можно указать также асимптотику резонансных собственных значений “чистого” гамильтониана Зеемана–Штарка (2.1) в случае, когда электрическое и магнитное поля удовлетворяют вырожденным условиям резонанса (условие “б”), например, в случае [5] $e_1 = 0, e_3 = 1/(3N)$. Тогда собственные значения в N -м кластере имеют асимптотику

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4N^2} + \varepsilon(N-1+2m) + \frac{1}{9}\varepsilon^2 N^2(5N^2 - 5 - 12(N-1+m-j)^2) + O(\varepsilon^3 N^{10}),$$

где $1-N \leq m \leq 0, 0 \leq j \leq N-1$. В остальных кластерах с номерами $n \neq N$ асимптотика собственных значений задается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & -\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2}\varepsilon nd((l-r)(n-1)+2m) + \frac{1}{4}\varepsilon^2 n^4 \left[d^2((l-r)(n-1)+2m)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{9n^2 N^2}(18N^2 + 54n^2 N^2 - 34n^4 - 38n^2 - 3(7n^2 + 12nN + 9N^2)J_1^2 + \\ & + 60 \operatorname{sgn}(n-N)n^2 J_1 J_2 - 3(7n^2 - 12nN + 9N^2)J_2^2 + \\ & \left. + 18n^2 Nd((l-r)(n-1)+2m)(J_1 - \operatorname{sgn}(n-N)J_2)) \right] \Big|_{\substack{J_1=n-1-2m_1-2rj \\ J_2=n-1-2m_2-2lj}} + O(\varepsilon^3 n^{10}). \end{aligned}$$

Здесь l и r – взаимно простые натуральные числа такие, что $(n + N)/|n - N| = l/r$; $d = (n + N)/(lnN)$; m пробегает множество $\mathcal{M}_{l,r}$ (3.15).

Таким образом, в спектре атома водорода, помещенного в скрещенные электрическое и магнитное поля (величины ε), возможно появление резонансных кластеров, в которых собственные значения расположены друг от друга на расстоянии $O(\varepsilon^2)$. В остальных (нерезонансных) кластерах точки спектра отстоят друг от друга на расстояние $O(\varepsilon)$. Главные члены асимптотики собственных значений и собственных функций как в резонансных, так и в нерезонансных кластерах приведены в данной работе. Резонансные кластеры контролируются алгебрами с полиномиальными перестановочными соотношениями (4.6).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица коэффициентов усредненного гамильтониана

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= -\frac{\hbar^2}{144 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} (396 + 269 \cos(2\theta_1) + 3 \cos(2\theta_1 - 4\theta_2) + 3 \cos(4\theta_1 - 2\theta_2) + \\ &\quad + 148 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + 269 \cos(2\theta_2)), \\ \mathcal{P}_2 &= -\frac{\hbar^2}{144 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} (468 + 307 \cos(2\theta_1) - 3 \cos(2\theta_1 - 4\theta_2) - 3 \cos(4\theta_1 - 2\theta_2) + \\ &\quad + 140 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + 307 \cos(2\theta_2)), \\ \mathcal{P}_3 &= -\frac{\hbar^2}{12 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} (102 + 14 \cos(2\theta_1) - 3 \cos(4\theta_1 - 2\theta_2) + \\ &\quad + 10 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + 101 \cos(2\theta_2)), \\ \mathcal{P}_4 &= \frac{\hbar^2}{6 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} (11 \cos(\theta_1 - 3\theta_2) + 163 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos(3\theta_1 - 3\theta_2) + \\ &\quad + 11 \cos(3\theta_1 - \theta_2) + 138 \cos(\theta_1 + \theta_2)), \\ \mathcal{P}_5 &= -\frac{\hbar^2}{12 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} (101 + 101 \cos(2\theta_1) - 3 \cos(2\theta_1 - 4\theta_2) + \\ &\quad + 10 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + 14 \cos(2\theta_2)), \\ \mathcal{P}_6 &= \frac{\hbar^2}{2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_1 &= -4 \cos \theta_1, & \mathcal{Q}_7 &= -\frac{1}{4} (\cos(2\theta_1 - \theta_2) + 15 \cos \theta_2), \\ \mathcal{Q}_2 &= 3 (\cos(2\theta_1 - \theta_2) + 3 \cos \theta_2), & \mathcal{Q}_8 &= \frac{1}{4} (\cos(2\theta_1 - \theta_2) - \cos \theta_2), \\ \mathcal{Q}_3 &= -3 (3 \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 - 2\theta_2)), & \mathcal{Q}_9 &= \frac{1}{4} (14 \sin \theta_1 - \sin(2\theta_1 - \theta_2) - 9 \sin \theta_2), \\ \mathcal{Q}_4 &= 4 \cos \theta_2, & \mathcal{Q}_{10} &= \frac{1}{4} (9 \sin \theta_1 - \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 14 \sin \theta_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_5 &= \frac{1}{4}(15 \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 - 2\theta_2)), & \mathcal{Q}_{11} &= -7 \cos \theta_1 + \cos(2\theta_1 - \theta_2), \\
\mathcal{Q}_6 &= \frac{1}{4}(\cos \theta_1 - \cos(\theta_1 - 2\theta_2)), & \mathcal{Q}_{12} &= -\cos(\theta_1 - 2\theta_2) + 7 \cos \theta_2, \\
\mathcal{Y}_1 &= \frac{1}{4}(10 - \cos(2\theta_1) - \cos(2\theta_2)), & \mathcal{Y}_4 &= -2(\cos(\theta_1 - \theta_2) + 3 \cos(\theta_1 + \theta_2)), \\
\mathcal{Y}_2 &= \frac{1}{4}(6 + \cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2)), & \mathcal{Y}_5 &= -1 + 3 \cos(2\theta_2), \\
\mathcal{Y}_3 &= -1 + 3 \cos(2\theta_1), & \mathcal{Y}_6 &= -\frac{1}{2}(4 + \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos(\theta_1 + \theta_2)), \\
\mathcal{Z}_1 &= \frac{\hbar(\cos(2\theta_1 - \theta_2) + 3 \cos \theta_2)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}, & \mathcal{Z}_2 &= -\frac{\hbar(3 \cos(\theta_1) + \cos(\theta_1 - 2\theta_2))}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}.
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Собственный базис операторов “действие” S_0 и G_0

Приведем явную формулу для функций ψ_{j_1, j_2}^N (2.12):

$$\begin{aligned}
\psi_{j_1, j_2}^N(q) &= \frac{1}{\pi \hbar} \exp\left\{-\frac{|q|}{2\hbar}\right\} \sum_{\substack{\max\{0, j_1+j_2-N+1\} \leq l \leq j_1 \\ \max\{0, j_1+j_2-N+1\} \leq m \leq j_2}} \gamma_{j_1, j_2}^N(l, m) \times \\
&\times \left(\frac{\sin \frac{\theta_1+\theta_2}{2} q_1 - \cos \frac{\theta_1+\theta_2}{2} q_3 + \operatorname{sgn}(l-m) \left(\sin \frac{\theta_1-\theta_2}{2} |q| - i \cos \frac{\theta_1-\theta_2}{2} q_2 \right)}{2\hbar} \right)^{|l-m|} \times \\
&\times L_{N-1-j_1-j_2+\min\{l, m\}}^{|l-m|} \left(\frac{\cos \frac{\theta_1-\theta_2}{2} |q| + \sin \frac{\theta_1+\theta_2}{2} q_3 + \cos \frac{\theta_1+\theta_2}{2} q_1 + i \sin \frac{\theta_1-\theta_2}{2} q_2}{2\hbar \cos \frac{\theta_1-\theta_2}{2}} \right) \times \\
&\times L_{\min\{l, m\}}^{|l-m|} \left(\frac{\cos \frac{\theta_1-\theta_2}{2} |q| - \sin \frac{\theta_1+\theta_2}{2} q_3 - \cos \frac{\theta_1+\theta_2}{2} q_1 + i \sin \frac{\theta_1-\theta_2}{2} q_2}{2\hbar \cos \frac{\theta_1-\theta_2}{2}} \right). \quad (\text{Б.1})
\end{aligned}$$

Здесь $L_M^s(y) = \sum_{j=0}^M \frac{\sqrt{M! \Gamma(M+s+1)}}{(M-j)! j! \Gamma(j+s+1)} (-1)^{M-j} y^j$ – нормированные обобщенные полиномы Лагерра [13], а $\gamma_{j_1, j_2}^N(l, m)$ – коэффициенты

$$\begin{aligned}
\gamma_{j_1, j_2}^N(l, m) &= \frac{(-1)^{j_1-l}}{(j_1-l)! (j_2-m)!} \sqrt{\frac{j_1! j_2! (N-1-j_1)! (N-1-j_2)!}{l! m! (N-1-j_1-j_2+l)! (N-1-j_1-j_2+m)!}} \times \\
&\times \left(\cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)^{N-1-j_1-j_2+2 \min\{l, m\}} \left(\sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)^{j_1+j_2-l-m}.
\end{aligned}$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства образования России (грант PD02-1.1-39) и INTAS (грант 00-257).

Исправление. В списках литературы в опубликованных в нашем журнале работах [2] и [3] был приведен неправильный заголовок статьи “Adapted connections, Hamilton dynamics, geometric phases, and quantization over isotropic submanifolds” (ссылки [10] и [6], соответственно). Правильный заголовок – “Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding”, как в ссылке [9] настоящей статьи. Редакция приносит свои извинения за ошибку.

Список литературы

- [1] *В. И. Маслов.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [2] *М. В. Карасев, Е. М. Новикова.* ТМФ. 2004. Т. 141. № 3. С. 424.
- [3] *М. В. Карасев, Е. М. Новикова.* ТМФ. 2005. Т. 142. № 1. С. 127.
- [4] *M. J. Gourlay, T. Uzer, D. Farrelly.* Phys. Rev. A. 1993. V. 47. P. 3113; *J. von Milczewski, G. H. F. Diercksen, T. Uzer.* Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 2428; *T. Uzer, D. Farrelly.* Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. R2501.
- [5] *D. A. Sadovskii, B. I. Zhilinskiĭ, L. Michel.* Phys. Rev. A. 1996. V. 53. P. 4064.
- [6] *C. Neumann, R. Ubert, S. Freund et al.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 4705.
- [7] *М. В. Карасев, Е. М. Новикова.* ТМФ. 1996. Т. 108. № 3. С. 339.
- [8] *P. S. Laplace.* Traité de mecanique celeste. Paris: Bachelier, 1829.
- [9] *M. V. Karasev, E. M. Novikova.* Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding. In: Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry. Ed. M. V. Karasev. Providence, RI: AMS, 1998. P. 1–202.
- [10] *М. В. Карасев, Е. М. Новикова.* Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 6. С. 854.
- [11] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [12] *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
- [13] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 12.IV.2004 г.