Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Славнов, Калибровочная инвариантность конденсата размерности два в теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 1, 3–8

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:41:04

© 2005 г.

А. А. Славнов*

КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ КОНДЕНСАТА РАЗМЕРНОСТИ ДВА В ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Независимость от калибровки вакуумного конденсата размерности два в теории Янга–Миллса продемонстрирована с помощью методов некоммутативной теории поля.

Ключевые слова: некоммутативная теория, калибровочная инвариантность, конденсат.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вакуумные конденсаты, по-видимому, играют важную роль в непертурбативной динамике калибровочных полей. Хорошо известным примером является глюонный конденсат размерности четыре $\langle \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) \rangle$, который эффективно используется при анализе правил сумм в КХД [1]. Другой возможный конденсат, имеющий каноническую размерность два, отвечает ненулевому вакуумному среднему $V^{-1} \int_V \langle \text{tr}(A_\mu^2) \rangle dx$. Очевидным недостатком этого конденсата является отсутствие калибровочной инвариантности оператора $A_\mu^2(x)$. Кажется, что его вакуумное среднее, будучи зависимым от калибровки, не может представлять интереса для физики. Тем не менее этот конденсат использовался при анализе таких калибровочно зависимых объектов, как, например, глюонный пропагатор [2]. Недавно было высказано утверждение о том, что ненулевое значение $V^{-1} \int_V \langle \text{tr}(A_\mu^2) \rangle dx$ может быть существенным для изучения топологической структуры вакуума и проблемы невылета кварков в КХД [3], [4]. Авторы работ [4] показали, что даже если конденсат $V^{-1} \int_V \langle \text{tr}(A_\mu^2) \rangle dx$ не является калибровочно инвариантной величиной, его минимальное значение имеет калибровочно инвариантный смысл. Дальнейшее развитие этих идей привело к построению БРСТ-инвариантного конденсата [5]

$$V^{-1} \left\langle \int_V \text{tr} \left(\frac{1}{2} A_\mu^2(x) - i \alpha c(x) \bar{c}(x) \right) d^4x \right\rangle, \quad (1)$$

где $c(x)$ — духи Фаддеева–Попова. В этой и последующих работах обсуждалась также роль этого конденсата в разложении произведений операторов, отвечающих различным амплитудам.

---

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: slavnov@mi.ras.ru

Все эти исследования указывают на то, что вакуумный конденсат размерности два играет важную роль в структуре вакуума калибровочных теорий. В этой связи его зависимость от калибровки представляется весьма неприятным явлением.

В данной работе мы покажем, что хотя оператор $\text{tr}(A_\mu^2(x))$ зависит от калибровки, вакуумное среднее $V^{-1} \int_V \langle \text{tr}(A_\mu^2(x)) \rangle dx$ калибровочно инвариантно и может иметь прямой физический смысл. В этом доказательстве будет эффективно использована техника некоммутативных калибровочных теорий, которая позволяет дать простое и элегантное доказательство калибровочной инвариантности вакуумного конденсата размерности два. Явная конструкция представлена в разделе 2. Это неожиданное явление получает естественное объяснение, если использовать связь между некоммутативными калибровочными теориями и матричными моделями (см., например, [6]). Соответствующая модель описана в разделе 3. В этом разделе упомянута также возможность калибровочно инвариантной модификации лагранжиана Янга–Миллса, позволяющая ввести “массовый” член. Стоит отметить, что использование в этой работе некоммутативного формализма является чисто техническим приемом, и наши результаты относятся к коммутативной теории.

2. КАЛИБРОВОЧНО ИНВАРИАНТНЫЙ КОНДЕНСАТ РАЗМЕРНОСТИ ДВА

Для доказательства калибровочной инвариантности вакуумного конденсата размерности два удобно воспользоваться методами некоммутативных калибровочных теорий.

Некоммутативная $U(N)$ -инвариантная теория описывается действием типа Янга–Миллса

$$S = -\frac{1}{8g^2} \int \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) d^4x, \quad (2)$$

где тензор кривизны есть

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu]. \quad (3)$$

Здесь $*$ обозначает мoyalовское произведение:

$$\phi(x) * g(x) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \xi^{\mu\nu} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \right\} \phi(x) g(y) \Big|_{y=x}, \quad (4)$$

а $\theta^{\mu\nu}$ – невырожденная антисимметричная вещественная матрица, $\theta^2 = -I$, где I обозначает единичную матрицу. Легко видеть, что в интегралах от квадратичных форм мoyalовское произведение можно заменить обычным коммутативным произведением. Поэтому в уравнении (2) мы заменили $F_{\mu\nu} * F_{\mu\nu}$ на $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$.

Поля A_μ принадлежат алгебре $U(N)$: $A_\mu = A_\mu^a t^a$, $a = 0, i$, где i обозначает $SU(N)$ -индекс,

$$\begin{aligned} t^0 &= \frac{1}{\sqrt{2N}} I, & \text{tr}(t^a t^b) &= \frac{1}{2} \delta^{ab}, & [t^a, t^b] &= i f^{abc} t^c, \\ \{t^a, t^b\} &= \frac{1}{N} \delta^{ab} + d^{abc} t^c. \end{aligned} \quad (5)$$

Действие (2) инвариантно относительно некоммутативных $U(N)$ -преобразований

$$A_\mu \rightarrow \omega * A_\mu * \omega^+ + i\omega * \partial_\mu \omega^+, \quad (6)$$

$$\omega = \exp\{*\epsilon\} = \sum_n \frac{1}{n!} (i\epsilon)^{*n}. \quad (7)$$

Хорошо известно, что в некоммутативном случае нельзя построить $SU(N)$ -инвариантное действие, так как алгебра $SU(N)$ не замкнута относительно мюловского умножения. Однако в пределе $\xi \rightarrow 0$ калибровочные преобразования (6) расщепляются на обычные $SU(N)$ - и $U(1)$ -преобразования, а лагранжиан становится суммой лагранжианов $SU(N)$ -поля Янга–Миллса и свободного электромагнитного поля.

В квантовой теории предел $\xi \rightarrow 0$ гораздо более сложен. При конечном ξ однопетлевые радиационные поправки можно вычислить с помощью стандартной процедуры перенормировки, однако полученный результат сингулярен при $\xi = 0$. Более того, соответствующие амплитуды имеют нефизические сингулярности при нулевых внешних импульсах. В диаграммах более высокого порядка появляются неинтегрируемые инфракрасные сингулярности, что приводит к несамосогласованности теории [7].

Совсем по-другому выглядит предельный переход $\xi \rightarrow 0$ в регуляризованной теории. Регуляризованную амплитуду можно записать в виде

$$\Gamma^\Lambda = \sum_i \int f_i^\Lambda(p, k) T_i(p, k) dk_1 \dots dk_n, \quad (8)$$

где $f_i^\Lambda(p, k)$ – рациональная функция переменных p, k , а T_i – произведение тригонометрических функций

$$\begin{aligned} & \sin(\xi p_l^\mu \theta_{\mu\nu} k_m^\nu), & \sin(\xi p_l^\mu \theta^{\mu\nu} p_m^\nu), & \sin(\xi k_l^\mu \theta^{\mu\nu} k_m^\nu), \\ & \cos(\xi p_l^\mu \theta^{\mu\nu} p_m^\nu), & \cos(\xi p_l^\mu \theta_{\mu\nu} k_m^\nu), & \cos(\xi k_l^\mu \theta^{\mu\nu} k_m^\nu). \end{aligned}$$

Индекс Λ означает, что введена некоторая калибровочно инвариантная регуляризация, так что

$$\int |f^\Lambda(p, k)| dk_1 \dots dk_n < \infty. \quad (9)$$

Благодаря абсолютной сходимости интеграла (8) функция $\Gamma^\Lambda(p)$, заданная формулой (8), имеет определенный предел при $\xi \rightarrow 0$. Предельная теория – это регуляризованная коммутативная $SU(N)$ -модель, которую можно перенормировать, вводя необходимые контрчлены. Если же сначала перейти к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$, то процедура перенормировки не позволяет устранить все расходимости, и предел $\xi \rightarrow 0$ не существует. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что введена какая-либо инвариантная регуляризация, и предел $\xi \rightarrow 0$ берется в регуляризованной теории.

Мы утверждаем, что вакуумное среднее

$$\begin{aligned} \langle \text{tr}(A_\mu(x) A_\mu(x)) \rangle &= \Omega^{-1} \int_\Omega \langle \text{tr}(A_\mu(x) A_\mu(x)) \rangle d^4x = \\ &= \Omega^{-1} \int \left[\exp\{iS_{\text{GF}}\} \int_\Omega \text{tr}(A_\mu(x) A_\mu(x)) d^4x \right] dA, \end{aligned} \quad (10)$$

где S_{GF} обозначает действие (2) плюс фиксирующий калибровку член и необходимые духи Фаддеева-Попова, не зависит от калибровки. В этой формуле Ω – четырехмерный объем интегрирования. Благодаря трансляционной инвариантности действия правая часть уравнения (10) не зависит от Ω , и можно перейти к пределу при $\Omega \rightarrow \infty$.

Ключевую роль в нашем доказательстве играет калибровочно инвариантный объект, включающий интеграл $\int \text{tr}(A_\mu(x)A_\mu(x)) d^4x$. Соответствующий калибровочно инвариантный функционал имеет вид

$$M = \int \text{tr} \left(\frac{1}{2} A_\mu(x) A_\mu(x) - \xi^{-1} A_\mu(x) \theta^{\mu\nu} x_\nu \right) d^4x. \quad (11)$$

В самом деле, при преобразованиях (6) M преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} M \rightarrow \int \text{tr} \left(\frac{1}{2} A_\mu * A_\mu + i\omega * A_\mu * \partial_\mu \omega^+ - \frac{1}{2} \omega * \partial_\mu \omega^+ * \omega * \partial_\mu \omega^+ - \right. \\ \left. - \xi^{-1} \omega * A_\mu * \omega^+ * \theta^{\mu\nu} x_\nu - \xi^{-1} i\omega * \partial_\mu \omega^+ * \theta^{\mu\nu} x_\nu \right) d^4x. \end{aligned} \quad (12)$$

Пользуясь ассоциативностью маяловского произведения и унитарностью матриц ω , получаем следующее выражение для δM :

$$\begin{aligned} \delta M = \int \text{tr} \left(i\omega * A_\mu * \partial_\mu \omega^+ + \frac{1}{2} \partial_\mu \omega * \partial_\mu \omega^+ - i\omega * A_\mu * \partial_\alpha \omega^+ \theta^{\alpha\beta} \theta^{\mu\nu} \delta^{\beta\nu} - \right. \\ \left. - \frac{i}{2\xi} \omega * \partial_\mu \omega^+ * \theta^{\mu\nu} \partial_\nu(x^2) \right) d^4x. \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно, интеграл

$$I = \int \left[\exp\{iS_{\text{GF}}\} \Omega^{-1} \int_\Omega \text{tr} \left(\frac{1}{2} A_\mu(x) A_\mu(x) - \xi^{-1} A_\mu(x) \theta^{\mu\nu} x_\nu \right) d^4x \right] dA_\mu \quad (14)$$

не зависит от калибровки. Переход к произвольной калибровке можно осуществить стандартным образом, путем умножения интеграла (14) на “1”, где

$$1 = \Delta_F(A) \int \delta(F(A^\omega) - B) d\omega, \quad (15)$$

замены переменных $A_\mu^\omega \rightarrow A_\mu$ и интегрирования по B с весом $\exp\{i \int B^2/(2\alpha) d^4x\}$. Благодаря калибровочной инвариантности функционала M мы получим формулу для I , которая выглядит точно так же, как уравнение (14), но с другим фиксирующим калибровку членом.

Вакуумное среднее $\langle \text{tr}(A_\mu(x)) \rangle$ обращается в нуль из-за трансляционной инвариантности действия, и линейный член в формуле (14), сингулярный при $\xi = 0$, исчезает. Таким образом, мы приходим к тому, что значение конденсата размерности два

$$\langle \text{tr}(A_\mu(x)A_\mu(x)) \rangle = \Omega^{-1} \left\langle \int_\Omega \text{tr}(A_\mu(x)A_\mu(x)) d^4x \right\rangle \quad (16)$$

не зависит от калибровки.

Во всех этих рассуждениях мы предполагали, что введена какая-либо калибровочно инвариантная регуляризация. Как уже говорилось выше, при фиксированной регуляризации можно перейти к пределу $\xi \rightarrow 0$. В результате мы получим обычную $SU(N)$ -калибровочную теорию плюс свободное $U(1)$ -поле. Этим завершается доказательство калибровочной инвариантности вакуумного конденсата размерности два в коммутативной $SU(N)$ -теории Янга–Миллса.

3. ТЕОРИЯ ЯНГА–МИЛЛСА КАК МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ

Описанный в предыдущем разделе механизм имеет простое и естественное объяснение, если воспользоваться связью между некоммутативной теорией Янга–Миллса и матричной моделью, описываемой действием

$$S = -\frac{1}{8g^2} \int \text{tr}(A_\mu(x) * A_\nu(x) - A_\nu(x) * A_\mu(x) - \xi^{-2} \theta^{\mu\nu})^2 d^4x. \quad (17)$$

Здесь A_μ принадлежит алгебре $U(N)$, как уже обсуждалось выше. Это действие инвариантно относительно преобразований

$$A_\mu(x) \rightarrow \omega(x) * A_\mu(x) * \omega^+(x). \quad (18)$$

Будучи записано в терминах сдвинутых полей $A_\mu - \xi^{-1} \theta^{\mu\nu} x_\nu$, это действие описывает некоммутативную $U(N)$ модель Янга–Миллса:

$$S_{\text{sh}} = -\frac{1}{8g^2} \int \text{tr}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu])^2 d^4x. \quad (19)$$

Преобразования (18) в терминах сдвинутых полей имеют вид

$$A_\mu^\omega(x) = \omega(x) * A_\mu(x) * \omega^+(x) + i\omega(x) * \partial_\mu \omega^+(x) \quad (20)$$

и представляют собой не что иное, как некоммутативные калибровочные преобразования. Заметим, что “сдвинутое” действие и калибровочные преобразования (20) не сингулярны в пределе $\xi \rightarrow 0$. В этом пределе мы получаем обычную коммутативную теорию Янга–Миллса.

Очевидным образом интегралы вида

$$\int_\Omega \text{tr}(A_\mu^2(x)) dx, \quad \int_\Omega \text{tr}([A_\mu(x) * A_\mu(x)]^2) dx \quad (21)$$

инвариантны относительно преобразований (18). Поэтому в “сдвинутой” теории интеграл

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega \text{tr}(A_\mu(x) - \xi^{-1} \theta^{\mu\nu} x_\nu)^2 d^4x = \\ & = \frac{1}{2} \int_\Omega \text{tr}(A_\mu^2 - 2\xi^{-1} A_\mu \theta^{\mu\nu} x_\nu + \xi^{-2} x^2) d^4x \end{aligned} \quad (22)$$

инвариантен относительно калибровочных преобразований. Последний член является несущественной константой, которую можно опустить, не нарушая калибровочную инвариантность. Следовательно функционал

$$M = \int_{\Omega} \text{tr} \left(\frac{1}{2} A_{\mu}(x)^2 + \xi^{-1} A_{\mu}(x) \theta_{\mu\nu} x_{\nu} \right) d^4 x \quad (23)$$

инвариантен относительно калибровочных преобразований (20).

Описанная выше конструкция позволяет также написать калибровочно инвариантное обобщение лагранжиана Янга–Миллса, включающее “массовый” член (не содержащий производных член, квадратичный по A_{μ}). Действительно, действие

$$S = -\frac{1}{8g^2} \int \left\{ \text{tr} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + i[A_{\mu} * A_{\nu} - A_{\nu} * A_{\mu}])^2 + \right. \\ \left. + m^2 \text{tr} \left(\frac{1}{2} A_{\mu}^2 - \xi^{-1} A_{\mu} \theta^{\mu\nu} x_{\nu} \right) \right\} d^4 x \quad (24)$$

очевидным образом калибровочно инвариантно. Однако наивный предел $\xi \rightarrow 0$ сингулярен. Кроме того, это действие содержит линейный член, явно нарушающий трансляционную инвариантность. Поэтому вопрос о физической интерпретации действия (24) требует более детального исследования.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В этой работе мы показали, что значение вакуумного конденсата размерности два $\langle \text{tr}(A_{\mu}(x)A_{\mu}(x)) \rangle$ не зависит от калибровки. Калибровочная инвариантность этого конденсата является следствием скрытой симметрии теории Янга–Миллса, которая становится явной, если рассматривать ее как предел некоммутативной калибровочной теории. Эта симметрия имеет простую и естественную интерпретацию в терминах матричных моделей.

Благодарности. Эта работа была частично поддержана РФФИ (грант № 02-01-00126), грантом поддержки ведущих научных школ НШ-2052.2003.1 и программой РАН “Теоретические проблемы математики”.

Список литературы

- [1] *M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov.* Nucl. Phys. B. 1979. V. 147. P. 345; P. 448.
- [2] *M. Lavelle, M. Schaden.* Phys. Lett. B. 1988. V. 208. P. 297; *M. Lavelle, M. Oleszczuk.* Mod. Phys. Lett. A. 1992. V. 7. P. 3617.
- [3] *Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pene, J. Rodriguez-Quintero.* Phys. Lett. B. 2000. V. 493. P. 315.
- [4] *F. V. Gubarev, L. Stodolsky, V. I. Zakharov.* Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 2220; *F. V. Gubarev, V. I. Zakharov.* Phys. Lett. B. 2001. V. 501. P. 28.
- [5] *K. I. Kondo.* Phys. Lett. B. 2001. V. 514. P. 335.
- [6] *M. Douglas, N. Nekrasov.* Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 977.
- [7] *S. Minwalla, M. Van Raamsdonk, N. Seiberg.* JHEP. 1999. V. 9906. P. 007; *I. Ya. Arefeva, D. M. Belov, A. S. Koshelev.* Phys. Lett. B. 2000. V. 476. P. 431; *M. Hayakawa.* Phys. Lett. B. 2000. V. 478. P. 394; *A. Matusis, L. Susskind, N. Tombas.* JHEP. 2000. V. 0012. P. 002.

Поступила в редакцию 18.X.2004 г.