Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Тирулогасантар, А. Л. Хохоуето, Векторные когерентные состояния на алгебрах Клиффорда, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 1, 9–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:04:25

ВЕКТОРНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ НА АЛГЕБРАХ КЛИФФОРДА

Известные канонические когерентные состояния выражаются в виде бесконечного ряда по степеням комплексного числа z и положительного целого числа $\rho(m) = m!$. По аналогии с каноническими когерентными состояниями представлен класс векторных когерентных состояний, возникающий в результате замены комплексной переменной z на вещественную матрицу Клиффорда. Представлен также другой класс векторных когерентных состояний, получающийся при одновременной замене переменной z на вещественную матрицу Клиффорда и числа $\rho(m)$ на вещественную матрицу. В качестве примера приведены векторные когерентные состояния кватернионов и октонионов, связанные с вещественными матричными представлениями последних. Также дан физический пример.

Ключевые слова: векторные когерентные состояния, алгебры Клиффорда, кватернионы, октонионы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Когерентные состояния (КС) образуют переопределенное семейство векторов в гильбертовом пространстве. В типичном случае КС являются квантовыми состояниями, которые, как известно, хорошо описывают квантовые явления. В частности, КС представляют собой математический инструмент для установления тесной связи между классическим и квантовым формализмами. Обычные КС могут быть определены разными способами [1]. Один из способов определения множества КС состоит в следующем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\phi_m\}_{m=0}^{\infty}$ и пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Говорят, что состояния

$$|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(|z|)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{\rho(m)}} \phi_m \in \mathfrak{H} \quad (1.1)$$

образуют множество КС для $z \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ – открытое подмножество в $\mathbb{C}$, если выполняются следующие условия:

*Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada.
E-mail: santhar@cs.concordia.ca; al.hohoueto@yahoo.fr

- а) состояния $|z\rangle$ нормированны, т.е. $\langle z|z\rangle = 1$ для каждого $z \in \mathcal{D}$;
 б) множество $\{|z\rangle: z \in \mathcal{D}\}$ допускает разложение единицы, т.е.

$$\int_{\mathcal{D}} |z\rangle\langle z| d\mu = I. \quad (1.2)$$

В приведенных формулах $\mathcal{N}(|z|)$ – нормировочный множитель, $\{\rho(m)\}_{m=0}^{\infty}$ – последовательность положительных вещественных чисел, $d\mu$ – выбранная подходящим образом мера на $\mathcal{D}$, I – тождественный оператор на $\mathfrak{H}$.

В работе [2] векторные когерентные состояния (ВКС) были представлены в аналогичном (1.1) виде путем замены комплексного числа z на $(n \times n)$ -матрицу $Z = A(r)e^{i\zeta\Theta(k)}$ с наложенными на $(n \times n)$ -матрицы $A(r)$ и $\Theta(k)$ условиями

$$\begin{aligned} [A(r), A(r)^{\dagger}] &= 0, \\ \Theta(k)^{\dagger} &= \Theta(k), \quad \Theta(k)^2 = \mathbb{I}_n, \\ [A(r), \Theta(k)] &= 0, \end{aligned}$$

где индекс $\dagger$ обозначает эрмитово сопряжение матрицы, а $\mathbb{I}_n$ – единичная матрица размера $n \times n$. В этом случае ВКС имеют вид

$$|\mathcal{Z}, j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(|\mathcal{Z}|)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{Z}^m}{\sqrt{\rho(m)}} \chi^j \otimes \phi_m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

где $\{\chi^j: j = 1, 2, \dots, n\}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$. Пусть $|A(r)| = [A(r)A(r)^{\dagger}]^{1/2}$. Чтобы получить разложение единицы с использованием состояний (1.3), нужно решить проблему моментов

$$\int_{\Omega} \frac{|A(r)|^{2m}}{\mathcal{N}(|\mathcal{Z}|)} d\nu = \rho(m)\mathbb{I}_n, \quad (1.4)$$

где Ω – подходящая область изменения переменной r , а $d\nu$ – мера на этой области (подробнее см. [2]). В качестве примера ВКС были построены на основе комплексного представления для кватернионов. Эти происходящие из комплексного матричного представления для кватернионов ВКС были в известной степени исследованы.

В настоящей работе представлены ВКС на вещественных алгебрах Клиффорда, построенные с помощью вещественных матричных представлений последних. Используя свойства матриц Клиффорда, мы сводим матричную проблему моментов (1.4) к классической проблеме моментов (см. ниже (2.16)). Такой подход, по крайней мере для матриц типа матриц Клиффорда, позволяет построить ВКС, отвечающие всем решенным в обширной литературе по КС проблемам моментов (см. ниже замечание 1). По сути данная работа никоим образом не претендует на новизну в том, что касается развитого в работе [2] метода; основной вклад настоящей работы состоит в том, что она обобщает предложенную в работе [2] конструкцию ВКС для кватернионов на алгебру Клиффорда общего вида.

2. ПОСТРОЕНИЕ ВКС НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА ОБЩЕГО ВИДА

Пусть X – вещественное линейное пространство, а (X, f) – вещественное квадратичное пространство. Под этим мы подразумеваем, что

$$f = \langle \cdot | \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y), \quad (2.1)$$

– скалярное произведение в пространстве X . Тогда алгебра Клиффорда пары (X, f) – это пара $(C(f), \Theta)$, где $C(f)$ – $\mathbb{R}$ -алгебра и

$$\Theta: X \rightarrow C(f), \quad x \mapsto \Theta(x), \quad (2.2)$$

– линейная функция такая, что

$$\Theta(x)\Theta(x)^T = \Theta(x)^T\Theta(x) = f(x, x)\mathbb{I}_n = \|x\|^2\mathbb{I}_n \quad \forall x \in X, \quad (2.3)$$

где мы выбрали матричное представление алгебры $C(f)$ вещественными матрицами размера $n \times n$, удовлетворяющими (2.3), и использовали для обозначения этих матриц тот же символ, что и для элементов алгебры $C(f)$. Для каждого элемента z единичной окружности S^1 определим новую линейную функцию Θ_z формулой

$$\Theta_z(x) = z\Theta(x). \quad (2.4)$$

Для всех $x \in X$ новая функция удовлетворяет соотношению

$$\Theta_z(x)\Theta_z(x)^\dagger = \Theta_z(x)^\dagger\Theta_z(x) = \Theta(x)^T\Theta(x) = f(x, x)\mathbb{I}_n = \|x\|^2\mathbb{I}_n. \quad (2.5)$$

Поэтому для каждого $z \in S^1$ пара $(C(f), \Theta_z)$ снова является алгеброй Клиффорда. Кроме того, можно заметить, что алгебры Клиффорда, соответствующие любым двум различным элементам S^1 , изоморфны.

Пусть $\chi^1, \dots, \chi^n$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}^n$ и пусть $\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$ – ортонормированный базис в произвольном абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Определим теперь на пространстве $\mathbb{C}^n \otimes \mathfrak{H}$ следующее множество состояний:

$$|\Theta_z, j\rangle = |\Theta_z\rangle^j = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(\|x\|)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Theta_z(x)^m}{\sqrt{\rho(m)}} \chi^j \otimes \phi_m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

где нормировочная константа $\mathcal{N}(\|x\|)$ и последовательность $\rho(m)$ должны быть выбраны таким образом, чтобы состояния (2.6) были нормированными и порождали разложение единицы.

Нормализация и разложение единицы. Из соотношения (2.5) имеем

$$(\Theta_z(x)^\dagger)^m \Theta_z(x)^m = \|x\|^{2m} \mathbb{I}_n.$$

Произведем следующее отождествление:

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \|x\| \equiv t, \quad (2.7)$$

и положим

$$x_m = \frac{\rho(m)}{\rho(m-1)} \quad \forall m \geq 1. \quad (2.8)$$

Тогда мы можем определить

$$\begin{aligned} x_m! &= \rho(m), \quad m \geq 1, \\ x_0! &:= 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В предположении, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = R < \infty, \quad (2.10)$$

снабдим множество параметров

$$\mathcal{D} = \{(t, \theta) | 0 \leq t < L, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad L = \sqrt{R}, \quad (2.11)$$

мерой $d\mu = t dt d\theta$, где $d\theta$ — инвариантная относительно поворотов мера на множестве S^1 , элементы которого представлены в параметрическом виде $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Теперь мы можем утверждать следующее.

ТЕОРЕМА. *Состояния (2.6) нормированны в том смысле, что*

$$\sum_{j=1}^n \langle \Theta_z, j | \Theta_z, j \rangle = 1, \quad (2.12)$$

и дают разложение единицы

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} w(t) \sum_{j=1}^n |\Theta_z, j\rangle \langle \Theta_z, j| t dt d\theta = \mathbb{I}_n \otimes I, \quad (2.13)$$

если

$$\mathcal{N}(t) = n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{x_m!}, \quad (2.14)$$

$$w(t) = \frac{\mathcal{N}(t)}{2\pi} \lambda(t) \quad (2.15)$$

и $\lambda(t)$ является решением проблемы моментов

$$\int_0^L \lambda(t) t^{2m+1} dt = x_m!. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно видно, что для $(t, \theta) \in \mathcal{D}$ условие нормировки принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \langle \Theta_z, j \mid \Theta_z, j \rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}(t)} \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho(m)\rho(l)}} \langle \Theta_z^{l\dagger}(x) \Theta_z(x)^m \chi^j \mid \chi^j \rangle \langle \phi_m \mid \phi_l \rangle = \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}(t)} \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\rho(m)} t^{2m} \langle \chi^j \mid \chi^j \rangle = \frac{n}{\mathcal{N}(t)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{\rho(m)} = 1, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathcal{N}(t) = n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{x_m!}.$$

Рассматривая теперь условие, приводящее к разложению единицы, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^{2\pi} w(t) \sum_{j=1}^n |\Theta_z, j\rangle \langle \Theta_z, j| t dt d\theta &= \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{w(t)}{\mathcal{N}(t) \sqrt{\rho(m)\rho(l)}} |\Theta_z^m \chi^j \otimes \phi_m\rangle \langle \Theta_z^l \chi^j \otimes \phi_l| d\mu = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{w(t)}{\mathcal{N}(t) \sqrt{\rho(m)\rho(l)}} \Theta_z^m |\chi^j\rangle \langle \chi^j| \Theta_z^{l\dagger} \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_l| d\mu = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{w(t)}{\mathcal{N}(t) \sqrt{\rho(m)\rho(l)}} \Theta_z^m \mathbb{I}_n \Theta_z^{l\dagger} \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_l| d\mu = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{w(t)}{\mathcal{N}(t) \sqrt{\rho(m)\rho(l)}} e^{i(m-l)\theta} \Theta^m(x) \Theta^{l\dagger}(x) \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_l| d\mu = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^L \frac{2\pi w(t)}{\mathcal{N}(t) \rho(m)} \Theta^m(x) \Theta^{m\dagger}(x) \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_m| t dt = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^L \frac{2\pi w(t)}{\mathcal{N}(t) x_m!} t^{2m} t dt \mathbb{I}_n \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_m|. \end{aligned}$$

Таким образом, выбирая $w(t) = \mathcal{N}(t)\lambda(t)/(2\pi)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^{2\pi} w(t) \sum_{j=1}^n |\Theta_z, j\rangle \langle \Theta_z, j| t dt d\theta &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{x_m!} \left[\int_0^L \lambda(t) t^{2m+1} dt \right] \mathbb{I}_n \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_m| = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}_n \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_m| = \mathbb{I}_n \otimes I \end{aligned}$$

в том случае, если функция λ удовлетворяет условию (2.16). Следовательно, состояния (2.6) образуют множество ВКС.

Имеется несколько подходящих способов выбора положительной последовательности $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ (см. ниже замечание 1). Основной способ выбора x_m состоит в том, что $x_m = m$ для всех $m \in \mathbb{N}$. В этом случае $\mathcal{N}(t) = ne^{t^2}$, $\rho(m) = m!$ и $L = \infty$. Таким образом, $w(t) = n/\pi$, и выбор $\lambda(t) = e^{-t^2}$ вместе с заменой $t^2 = r$ приводит к ожидаемому разложению единицы в силу равенства

$$\int_0^{\infty} e^{-r} r^{(m+1)-1} dr = \Gamma(m+1).$$

3. ОПЕРАТОРЫ УНИЧТОЖЕНИЯ, РОЖДЕНИЯ И ЧИСЛА ЧАСТИЦ

В данном разделе будет кратко показано, что принятый в работе [2] для комплексного представления кватернионов подход может быть применен к произвольной алгебре Клиффорда.

Определим операторы уничтожения, рождения и числа частиц на базисных векторах $\{\phi_m\}_{m=0}^{\infty}$ формулами

$$a\phi_m = \sqrt{x_m} \phi_{m-1}, \quad a^\dagger \phi_m = \sqrt{x_{m+1}} \phi_{m+1}, \quad N'\phi_m = x_m \phi_m, \quad (3.1)$$

соответствующие операторы для ВКС $|\Theta_z(x), j\rangle$ суть

$$A = \mathbb{I}_n \otimes a, \quad A^\dagger = \mathbb{I}_n \otimes a^\dagger, \quad N = \mathbb{I}_n \otimes N'. \quad (3.2)$$

Как и в работе [2], действие этих операторов задается формулами

$$\begin{aligned} A|\Theta_z, j\rangle &= \Theta_z|\Theta_z, j\rangle, \\ A^\dagger|\Theta_z, j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(\|x\|)}} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{x_{m+1}}{x_m}} \Theta_z^m \chi^j \otimes \phi_{m+1}, \\ N|\Theta_z, j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(\|x\|)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_m}{\sqrt{x_m!}} \Theta_z^m \chi^j \otimes \phi_m. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее, если $x_m = m$ ($m \in \mathbb{N}$), то нетрудно показать, что

$$|\Theta_z(x), j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\Theta_z(x) \otimes a^\dagger - \Theta_z^\dagger(x) \otimes a} \chi^j \otimes \phi_0. \quad (3.4)$$

Определим самосопряженные операторы

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^\dagger), \quad P = \frac{1}{i\sqrt{2}}(A - A^\dagger). \quad (3.5)$$

В терминах этих операторов соотношение неопределенностей Гейзенберга в каждом состоянии $|\Theta_z(x), j\rangle$ в общем случае принимает вид

$$\langle \Delta Q \rangle_{|\Theta_z(x), j\rangle} \langle \Delta P \rangle_{|\Theta_z(x), j\rangle} \geq \frac{1}{2}, \quad (3.6)$$

где величины $\langle \Delta Q \rangle_{|\Theta_z(x), j\rangle}$ и $\langle \Delta P \rangle_{|\Theta_z(x), j\rangle}$ имеют обычный смысл.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выбор последовательности $\{x_m\}$ зависит от существования на области значений параметров некоторой меры, которая порождает соотношение отбора типа проблемы моментов (2.16) и условие нормировки, аналогичное (2.14). Например, в рамках такой программы действий для построения конкретных классов КС были решены несколько проблем моментов [3]. Далее, из формул (3.1) можно видеть, что получающаяся осцилляторная алгебра определяется исключительно выбором чисел x_m . Поскольку соотношения (2.14), (2.16) и (3.1) являются обычными соотношениями типа КС, мы можем воспроизводить ВКС на основе всех известных классов КС и их деформированных вариантов.

4. ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 1. КВАТЕРНИОННЫЕ ВКС. В этом примере мы представляем кватернионные ВКС, связанные с вещественным матричным представлением кватернионов. Кватернионные ВКС, использующие комплексное матричное представление кватернионов, были представлены в работе [2], где получающиеся ВКС были (2×1) -векторами. ВКС настоящего примера в принципе эквивалентны ВКС, представленным в работе [2]. Однако в данном случае мы получаем ВКС в виде (4×1) -векторов. Более того, дополнительный член $e^{i\theta}$ добавляет дополнительный параметр к кватернионам, что препятствует установлению изоморфизма между рассмотренным в работе [2] комплексным представлением и представлением, рассматриваемым в настоящем примере. В работе [2] было показано, что построенные там кватернионные ВКС могут описывать двухуровневый атом, вращающийся в однокомпонентном электромагнитном поле. Здесь будет показано, что рассматриваемый класс ВКС может быть полезен при описании четырехуровневой атомной системы.

Пусть

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{q}' = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \quad (4.1)$$

— вещественная алгебра кватернионов с делением. Известно, что $\mathbb{H}$ алгебраически изоморфна алгебре вещественных матриц

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad (4.2)$$

(подробное объяснение можно найти в работе [4] и цитируемой там литературе).

Для $z = e^{i\theta} \in S^1$ и $\mathbf{q}' \in \mathcal{M}$ положим $\mathbf{q} = z\mathbf{q}'$. Тогда

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^\dagger = \mathbf{q}^\dagger\mathbf{q} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\mathbb{I}_4 = |\mathbf{q}|^2\mathbb{I}_4 = |\mathbf{q}'|^2\mathbb{I}_4,$$

где $|\mathbf{q}'|$ – норма кватерниона, $\mathbb{I}_4$ – единичная (4×4) -матрица. Таким образом, в обозначениях предыдущего раздела мы имеем следующее множество ВКС в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^4 \otimes \mathfrak{H}$:

$$|\mathbf{q}, j\rangle = \frac{1}{2} e^{-|\mathbf{q}|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{q}^m}{\sqrt{m!}} \chi^j \otimes \phi_m, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (4.3)$$

Поскольку условие моментов имеет вид (2.16), здесь можно также заменить $\rho(m) = m!$ на другую последовательность, как было указано ранее.

Кватернионные состояния, реализующие минимум соотношения неопределенностей. Собственные значения $\mathbf{q}$ суть $z_1 = a_0 + ib$ и $z_2 = a_0 - ib$, каждое кратности 2, где $b = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Пусть $\chi_j^{(1)}, \chi_j^{(2)}$, $j = 1, 2$, – ортонормированные собственные векторы, отвечающие собственным значениям z_1 и z_2 , соответственно (такие собственные векторы существуют). Поскольку

$$\mathbf{q}^m \chi_j^{(1)} = z_1^m \chi_j^{(1)}, \quad \mathbf{q}^m \chi_j^{(2)} = z_2^m \chi_j^{(2)},$$

состояния

$$|\mathbf{q}, j, i\rangle = e^{-|\mathbf{q}|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_i^m}{\sqrt{m!}} \chi_j^{(i)} \otimes \phi_m, \quad j, i = 1, 2, \quad (4.4)$$

реализуют минимум соотношения неопределенностей (3.6), т. е.

$$\langle \Delta Q \rangle_{|\mathbf{q}, j, i\rangle} \langle \Delta P \rangle_{|\mathbf{q}, j, i\rangle} = \frac{1}{2}. \quad (4.5)$$

ПРИМЕР 2. Октонионные ВКС. Обозначим через $\mathbb{O}$ алгебру октонионов над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. В работе [4] показано, что любому элементу $a \in \mathbb{O}$ отвечают элемент левого матричного представления $\omega(a)$ и элемент правого матричного представления $\nu(a)$, задаваемые соответственно выражениями

$$\omega(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & a_7 & -a_6 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -a_6 & -a_7 & a_4 & a_5 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 & a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

$$\nu(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & a_5 & -a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & a_6 & a_7 & -a_4 & -a_5 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & a_7 & -a_6 & a_5 & -a_4 \\ a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Связь между этими двумя представлениями дается формулой

$$\nu(a) = K_8 \omega^T(a) K_8, \quad (4.6)$$

где $K_8 = \text{diag}(K_4, \mathbb{I}_4)$ – ортогональная матрица, $K_4 = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ – матрица, определяющая метрику на пространстве Минковского $\mathbb{R}_{1,3}^4$.

Пусть $z = e^{i\theta} \in S^1$, положим

$$\omega(a, z) = z\omega(a), \quad \nu(a, z) = z\nu(a). \quad (4.7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega(a, z)\omega^\dagger(a, z) &= \omega^\dagger(a, z)\omega(a, z) = \nu(a, z)\nu^\dagger(a, z) = \nu^\dagger(a, z)\nu(a, z) = \\ &= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2)\mathbb{I}_8 = \|a\|^2\mathbb{I}_8. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем два множества ВКС:

$$\begin{aligned} |\omega(a, z), j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-\|a\|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega(a, z)^m}{\sqrt{m!}} \chi^j \otimes \phi_m, \quad j = 1, 2, \dots, 8, \\ |\nu(a, z), j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-\|a\|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nu(a, z)^m}{\sqrt{m!}} \chi^j \otimes \phi_m, \quad j = 1, 2, \dots, 8. \end{aligned} \quad (4.8)$$

На самом деле, используя соотношение (4.6), можно получить “правые” ВКС из “левых” с помощью преобразования

$$|\nu(a, z), j\rangle = K_8 |\omega(\bar{a}, z), j\rangle K_8, \quad a \in \mathbb{O}, \quad j = 1, 2, \dots, 8. \quad (4.9)$$

Условие моментов снова имеет вид (2.16). Возможны различные способы выбора последовательности $\rho(m)$, но мы продолжаем придерживаться простейшего: $\rho(m) = m!$.

Скажем несколько слов относительно базовой обобщенной осцилляторной алгебры, для чего рассмотрим операторы $a, a^\dagger$ и N' , заданные формулами (3.1), и определим соответствующие операторы уничтожения, рождения и числа частиц $A_L, A_L^\dagger, N_L$ для “левых” ВКС и $A_R, A_R^\dagger, N_R$ для “правых” ВКС. Действие этих операторов имеет тот же вид, что и в предыдущих разделах. В принципе эти два множества операторов порождают две алгебры $\mathfrak{U}_{\text{osc}}^L$ и $\mathfrak{U}_{\text{osc}}^R$, которые, однако, одинаковы.

Октонионные состояния, реализующие минимум соотношения неопределенностей. Для левого представления октонионов обозначим через Q_L и P_L самосопряженные операторы Q и P (3.5) и положим $b = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_7^2}$. Собственные значения $\omega(a, z)$ суть $z_1 = e^{i\theta}(a_0 + ib)$ и $z_2 = e^{i\theta}(a_0 - ib)$, каждое кратности 4. Пусть $\chi_j^{(1)}, \chi_j^{(2)}, j =$

1, 2, 3, 4, – соответствующие нормированные собственные векторы. Для $i = 1, 2$ состояния

$$\begin{aligned} |\omega(a, z), j, i\rangle &= e^{-\|a\|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega(a, z)^m}{\sqrt{m!}} \chi_j^{(i)} \otimes \phi_m = \\ &= e^{-\|a\|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_i^m}{\sqrt{m!}} \chi_j^{(i)} \otimes \phi_m, \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (4.10)$$

реализуют минимум соотношения неопределенностей (3.6), т.е.

$$\langle \Delta Q_L \rangle_{|\omega(a, z), j, i\rangle} \langle \Delta P_L \rangle_{|\omega(a, z), j, i\rangle} = \frac{1}{2}.$$

Совершенно аналогичные результаты могут быть получены для правого представления.

5. ВКС С МАТРИЧНЫМИ МОМЕНТАМИ

До сих пор мы получали ВКС путем замены комплексного числа z в выражении (1.1) на матрицу Клиффорда, в то время как моменты $\{\rho(m)\}_{m=0}^{\infty}$ оставались, как обычно, последовательностью положительных вещественных чисел. В этом разделе мы предпримем попытку заменить как z , так и $\rho(m)$ матрицами, а именно заменим z на матрицу Клиффорда и $\rho(m)$ на некоторую матрицу $R(m)$. Такая процедура позволяет исследовать более общую картину.

Для того чтобы выполнить поставленную задачу, мы потребуем, чтобы матрица $R(m)$ удовлетворяла условию

$$R(m)R^\dagger(m) = R^\dagger(m)R(m) = f(m)\mathbb{I}_n, \quad (5.1)$$

причем n должно быть выбрано так, чтобы матрица $R(m)$ соответствовала по размеру матрице Клиффорда. Определим теперь множество ВКС следующим образом:

$$|Z, j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(|Z|)}} \sum_{m=0}^{\infty} R(m) Z^m \chi^j \otimes \phi_m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Посмотрим на условия нормировки и разложения единицы для матриц из примеров 1 и 2.

5.1. Случай кватернионов. Пусть $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$, $Z = \mathbf{q}e^{i\theta}$. В качестве $R(m)$ возьмем, например,

$$R(m) = \frac{1}{\sqrt{m!}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 \cos x & -\mathbb{I}_2 \sin x \\ \mathbb{I}_2 \sin x & \mathbb{I}_2 \cos x \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

при фиксированном $x \in \mathbb{R}$. Имеем

$$R(m)R^\dagger(m) = R^\dagger(m)R(m) = \frac{1}{m!}\mathbb{I}_4.$$

В таком случае условие нормировки принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \langle Z, j \mid Z, j \rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}(|Z|)} \sum_{j=1}^4 \sum_{m=0}^{\infty} \langle R(m) \mathbf{q}^m \chi^j \mid R(m) \mathbf{q}^m \chi^j \rangle = \\ &= \frac{4}{\mathcal{N}(|Z|)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{q}|^{2m}}{m!} = \frac{4}{\mathcal{N}(|Z|)} e^{|\mathbf{q}|^2} = 1 \end{aligned}$$

и приводит к нормировочному множителю

$$\mathcal{N}(|Z|) = 4e^{|\mathbf{q}|^2}. \quad (5.4)$$

С другой стороны, используя отождествление (2.7) и меру

$$d\mu = \frac{4|\mathbf{q}| d|\mathbf{q}| d\theta}{\pi}, \quad (5.5)$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} |Z, j\rangle \langle Z, j| d\mu &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(m-l)\theta} R(m) \mathbf{q}^m \left[\sum_{j=0}^{\infty} |\chi^j\rangle \langle \chi^j| \right] [R(l) \mathbf{q}^l]^{\dagger} \otimes \\ &\quad \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_l| e^{-|\mathbf{q}|^2} \frac{|\mathbf{q}| d|\mathbf{q}| d\theta}{\pi} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\int_0^{\infty} e^{-|\mathbf{q}|^2} |\mathbf{q}|^{2m} 2|\mathbf{q}| d|\mathbf{q}| \right] \mathbb{I}_4 \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_l| = \mathbb{I}_4 \otimes I. \end{aligned}$$

5.2. Случай октонионов. Здесь мы можем взять либо $Z = \omega(a, z)$, либо $Z = \nu(a, z)$, где $\omega(a, z)$ и $\nu(a, z)$ такие же, как в примере 2. В качестве $R(m)$ можно выбрать

$$R(m) = \frac{1}{\sqrt{m!}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_4 \cos x & -\mathbb{I}_4 \sin x \\ \mathbb{I}_4 \sin x & \mathbb{I}_4 \cos x \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

при фиксированном значении x . Дальнейшее аналогично случаю кватернионов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выбор матриц в виде (5.3) и (5.6) диктуется лишь тем обстоятельством, что они являются матрицами типа матриц Клиффорда, поскольку удовлетворяют соотношению (5.1). При этом выбор параметра x ничем более не ограничен. Однако, изменяя значение x , можно получать различные множества ВКС.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку Z и $R(m)$ являются матрицами, то размещение матрицы $R(m)$ справа от Z не эквивалентно, вообще говоря, размещению этой матрицы слева от Z . В нашем случае благодаря свойствам матриц Клиффорда и предположению относительно $R(m)$ построение может быть беспрепятственно произведено любым из способов. Далее, при построении КС последовательность $\rho(m)$ в формуле (1.1) берется положительной, и в силу этого при получении разложения единицы мы приходим к проблеме моментов, в которой моменты положительны. Когда мы заменяем $\rho(m)$ матрицей $R(m)$, можно ожидать, что эта матрица будет положительно-определенной. Однако в нашем построении использовалась матрица $R(m)$, не являющаяся положительно-определенной. Можно заметить, что в действительности не важно, с какой матрицы мы начинаем, а важно то, что в конечном счете для всего построения мы приходим к проблеме моментов, в которой моменты положительны.

6. ФИЗИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Простые квантовые электродинамические системы являются точно решаемыми, если пренебречь потерями. Несколько уровневые и несколько компонентные обобщения модели Джейнса–Камминга могут быть решены точно с помощью точно решаемой модели Джейнса–Камминга [5]. В этом разделе мы реализуем кватернионные ВКС как КС четырехуровневой системы.

Известно, что существует несчетное число квантовых гармонических потенциалов с одним и тем же спектром $E_m = m$ и различными волновыми функциями [6]. Пусть H_i , $i = 1, 2, 3, 4$, – гамильтонианы с одинаковым спектром $E_m^i = m$, $i = 1, 2, 3, 4$, и, возможно, с разными волновыми функциями ψ_m^i , $i = 1, 2, 3, 4$, $m = 0, 1, \dots, \infty$.

Пусть H – гамильтониан четырехуровневой атомной системы, относительно которой мы предположим, что она является точно решаемой. Предположим далее, что собственные значения и собственные функции этой системы суть $E_m^i = m$ и ψ_m^i , $i = 1, 2, 3, 4$, $m = 0, 1, \dots, \infty$, и что собственные значения невырожденные. Предположим также, что волновые функции образуют ортонормированный базис гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Пусть $\{\chi^j \otimes \phi_m\}$ – базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^4 \otimes \mathfrak{H}$ из примера 1. Применим теперь предложенный в работе [7] метод следующим образом. Пусть V – унитарное отображение, $V: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^4 \otimes \mathfrak{H}$, такое, что $V\psi_m^j = \chi^j \otimes \phi_m$. Оператор V может быть записан в явном виде:

$$V = \sum_{j=1}^4 \sum_{m=0}^{\infty} |\chi^j \otimes \phi_m\rangle \langle \psi_m^j|.$$

Пусть $\tilde{H} = VHV^{-1}$, тогда имеем

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{H}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_4 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{H}_i \phi_m = m \phi_m$, $i = 1, 2, 3, 4$. В рамках приведенной постановки определенные формулой (4.3) ВКС могут рассматриваться как множество КС для гамильтониана $\tilde{H}$ в следующем смысле.

Рассмотрим диагональную матрицу

$$Z = \text{diag}(z_1, z_1, z_2, z_2)$$

с элементами z_i , $i = 1, 2$, соответствующими состояниям (4.4), которые реализуют минимум соотношения неопределенностей, и возьмем $R(m) = m! \mathbb{I}_4$. Состояния

$$|Z, j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(|Z|)}} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{R(m)} Z^m \chi^j \otimes \phi_m, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

являются КС гамильтониана $\tilde{H}$. Эти КС могут быть связаны с КС (4.3), поскольку существует унитарная матрица U такая, что кватернион $\mathbf{q}$ в (4.3) может быть записан в виде

$$\mathbf{q} = U Z U^\dagger, \quad \mathbf{q}^m = U Z^m U^\dagger, \quad |\mathbf{q}, j\rangle = U |Z, j\rangle U^\dagger, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

При умножении состояний $|\mathbf{q}, j\rangle$ слева и справа соответственно на V^{-1} и V они преобразуются в состояния

$$V^{-1} |\mathbf{q}, j\rangle V = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(|\mathbf{q}|)}} \sum_{m=0}^{\infty} V^{-1} \left(\frac{\mathbf{q}^m}{\sqrt{m!}} \chi^j \otimes \phi_m \right) V, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

которые можно рассматривать как КС для гамильтониана H .

Список литературы

- [1] *S. T. Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau*. Coherent States, Wavelets and their Generalizations. New York: Springer, 2000; *J. R. Klauder, B. S. Skagerstam*. Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics. Singapore: World Scientific, 1985; *А. М. Переломов*. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
- [2] *K. Thirulogasanthar, S. T. Ali*. J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 5070–5083.
- [3] *J. R. Klauder, K. A. Penson, J.-M. Sixdeniers*. Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 013817.
- [4] *Y. Tian*. Adv. Appl. Clifford Algebras. 2000. V. 10. P. 61–90.
- [5] *M. W. Janowicz, J. M. A. Ashbourn*. Phys. Rev. A. 1997. V. 55. P. 2348–2359.
- [6] *P. B. Abraham, H. E. Moses*. Phys. Rev. A. 1980. V. 22. P. 1333–1340; *M. M. Nieto*. Phys. Rev. D. 1981. V. 24. P. 1030–1032.
- [7] *S. T. Ali, M. Englis, J.-P. Gazeau*. J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 6067–6089.

Поступила в редакцию 28.XI.2003 г.,
после доработки 29.III.2004 г.