Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Малышев, Алгебра Хопфа графов и ренормгрупповые уравнения, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 1, 22–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:02:52

© 2005 г.

Д. В. Малышев*

АЛГЕБРА ХОПФА ГРАФОВ И РЕНОРМГРУППОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Изучаются уравнения ренормгруппы, следующие из алгебры Хопфа графов. Вершинные функции рассматриваются как векторы в дуальном к алгебре Хопфа пространстве. Ренормгрупповые уравнения на эти вершинные функции эквивалентны ренормгрупповым уравнениям на отдельные фейнмановские интегралы. Решение ренормгрупповых уравнений может быть представлено в виде экспоненты от бета-функции. Явно показано, что экспонента от однопетлевой бета-функции позволяет найти коэффициенты перед лидирующими логарифмами для отдельных фейнмановских интегралов. Результаты вычислений согласуются с вычислениями в паркетном приближении.

Ключевые слова: алгебра Хопфа графов, ренормгруппа, ведущие логарифмы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Однопетлевые уравнения ренормгруппы позволяют найти ведущие логарифмы для суммы фейнмановских интегралов в любом порядке по константе связи [1]. В действительности уравнение ренормгруппы можно записать для отдельных фейнмановских диаграмм [2], тогда однопетлевая бета-функция фиксирует лидирующий логарифм для каждой фейнмановской диаграммы, т.е. позволяет найти не только степень логарифма, но и коэффициент перед этой степенью для данной диаграммы. Если известны старшие коэффициенты бета-функции, то фиксируются также и следующие за ведущими логарифмы.

В статье показано, что уравнения ренормгруппы для отдельных фейнмановских интегралов следуют из уравнений ренормгруппы дуальных к алгебре Хопфа графов. Алгебра Хопфа графов была введена Конном и Креймером как формальная математическая структура, описывающая R -операцию Боголюбова [3]. В этом формализме фейнмановские интегралы являются элементами дуального пространства линейных функций на графах. Алгебра Хопфа графов задает структуру алгебры Ли в дуальном пространстве [4]. Бета-функция – это некоторый элемент алгебры Ли. Экспонента от бета-функции задает ренормгрупповой диффеоморфизм в пространстве фейнмановских ин-

*Московский государственный университет, Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия; Princeton University, Princeton, NJ, USA. E-mail: malyshev@gate.itep.ru

тегралов. В статье показано, что экспонента от однопетлевой бета-функции задает ведущие логарифмы для отдельных фейнмановских диаграмм.

Мы будем изучать безмассовую теорию φ^4 в четырехмерном евклидовом пространстве с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{16\pi^2}{4!}g\varphi^4.$$

Знак минус перед членом взаимодействия введен для того, чтобы избежать появления знаков минус в разложениях по константе связи.

Рассмотрим четырехточечную вершинную функцию

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n g^{n+1}, \quad (1)$$

где F_n – вклад n -петлевых диаграмм.

В теории возмущений вершинные функции являются формальными рядами по константе связи. Пространство формальных рядов – это бесконечномерное пространство, в котором мономы g^n являются базисными векторами. Аналогично можно рассматривать линейное пространство графов, т.е. бесконечномерное пространство, в котором базисные векторы помечены графами. Мы будем работать в пространстве, в котором базисные векторы соответствуют одночастично-неприводимым графам и несвязным объединениям одночастично-неприводимых графов, а также существует вектор, соответствующий пустому графу $\emptyset$. Обозначим это линейное пространство графов через $\mathcal{H}$. Графы и соответствующие векторы в $\mathcal{H}$ будем обозначать буквами Γ и γ .

Вершинная функция принадлежит пространству $\mathcal{H}^*$ линейных функций на графах. Если выбрать в этом пространстве дуальный базис, то вершинная функция принимает вид

$$F = \gamma_0 + \sum_{\gamma} \frac{1}{S_\gamma} F_\gamma \gamma, \quad (2)$$

где γ_0 – граф, состоящий из одной вершины, γ – одночастично-неприводимые графы, F_γ – значение фейнмановского интеграла для графа γ , S_γ – симметричный фактор. Символ γ , стоящий после F_γ , означает базисный вектор в пространстве $\mathcal{H}^*$.

Линейное пространство графов является расширением пространства формальных рядов по константе связи. Далее мы увидим, что уравнение ренормгруппы в линейном пространстве графов эквивалентно системе ренормгрупповых уравнений на отдельные фейнмановские интегралы [2]. Эти уравнения являются более информативными, чем стандартные уравнения ренормгруппы и позволяют, например, вычислить ведущие логарифмы для отдельных фейнмановских интегралов при произвольных внешних импульсах [5], [6].

Если каждый граф с k вершинами заменить на g^k , то вершинная функция (2) перейдет в стандартную вершинную функцию, а уравнения ренормгруппы – в обычные уравнения ренормгруппы, но при этом часть информации потеряется.

Отметим, что данные здесь определения отличаются от определений Конна и Креймера. Так, в работах [3], [4] эффективная константа связи рассматривается как формальный ряд по константе связи с коэффициентами в алгебре графов, т.е. в формуле (1)

коэффициент F_n является элементом из $\mathcal{H}$. Мы будем рассматривать дуальное линейное пространство $\mathcal{H}^*$ вместо линейного пространства формальных рядов по константе связи, т.е. в формуле (1) произведем замену g^n на векторы из $\mathcal{H}^*$.

Еще одно отличие от определений Конна и Креймера заключается в том, что мы фиксируем внешние ребра графов. Это означает, например, что в вершинную функцию (2) дают вклад три однопетлевых графа $\gamma_1^{(s)}$, $\gamma_1^{(t)}$ и $\gamma_1^{(u)}$ с различными ориентациями, при этом коэффициенты, стоящие перед этими графами, имеют вид $F(\gamma_1^{(s)}) = \ln(\mu^2/s)$, $F(\gamma_1^{(t)}) = \ln(\mu^2/t)$ и $F(\gamma_1^{(u)}) = \ln(\mu^2/u)$, соответственно.

Найдем уравнение ренормгруппы в линейном пространстве графов по аналогии с уравнением в пространстве формальных рядов по константе связи. Ренормгрупповое уравнение на четырехточечную вершинную функцию имеет вид

$$\frac{d}{d \ln \mu^2} Z^{-2} F = 0, \quad (3)$$

где Z – перенормировка амплитуд полей. В безмассовой теории в размерной регуляризации масса не перенормируется в любом порядке теории возмущений. В однопетлевом приближении также не будет перенормировок двухточечной вершинной функции, т.е. перенормировок амплитуд полей. Поэтому в однопетлевом приближении уравнение (3) принимает более простой вид

$$\frac{d}{d\tau} F = 0, \quad (4)$$

где введено обозначение $\tau = \ln \mu^2$. Перепишем уравнение (4) в виде уравнения Каллана–Симанчика

$$\partial_\tau F + \beta(g) \partial_g F = 0. \quad (5)$$

Здесь производная ∂_τ действует на фейнмановские интегралы F_n , а оператор $\beta(g) \partial_g$ – на мономы g^n , т.е. на базисные векторы в пространстве формальных рядов по g , по правилу

$$\beta(g) \partial_g g^n = -\frac{3}{2} n g^{n+1}. \quad (6)$$

Используя это равенство, запишем уравнение (5) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d\tau} F_n - \frac{3}{2} n F_{n-1} \right) g^{n+1} = 0. \quad (7)$$

Уравнение на вектор линейного пространства эквивалентно системе уравнений на координаты этого вектора

$$\frac{d}{d\tau} F_n - \frac{3}{2} n F_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Решение этой системы дает ответ для суммы ведущих логарифмов от n -петлевых диаграмм:

$$F_n = \left(\frac{3}{2} \tau \right)^n, \quad (9)$$

где $\tau = \ln(\mu^2/p^2)$.

Чтобы найти обобщение уравнения (5) в линейном пространстве графов, необходимо определить действие бета-функции на базисные векторы, соответствующие графам. С точки зрения алгебры Хопфа графов $\mathcal{H}$ бета-функция является элементом дуального пространства $\mathcal{H}^*$, где умножение задается с помощью вставки графов [3]

$$\gamma_1 * \gamma_2 = \sum_v \gamma_1 \circ_v \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2. \quad (10)$$

Здесь символ $\circ_v$ означает вставку γ_1 в вершину $v \in \gamma_2$, а $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ есть несвязное объединение γ_1 и γ_2 .

Обобщение однопетлевого уравнения Каллана–Симанчика (5) имеет вид

$$\partial_\tau F + \hat{\beta} \circ F = 0, \quad (11)$$

где F – это вектор в $\mathcal{H}^*$, который мы определили с помощью суммы по одночастично-неприводимым графам (2), оператор

$$\hat{\beta} = -\frac{1}{2}(\gamma_1^{(s)} + \gamma_1^{(t)} + \gamma_1^{(u)}) \quad (12)$$

есть однопетлевая бета-функция. Производная ∂_τ действует на координаты, т.е. на фейнмановские интегралы F_γ , а оператор $\hat{\beta}$ – на базисные векторы γ с помощью вставки однопетлевых диаграмм. Отметим, что аналогичное действие оператора $\beta(g)\partial_g$ соответствует вставке $\beta(g)$ вместо g .

Из уравнения (11) следует рекуррентное соотношение на отдельные фейнмановские интегралы

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(\gamma_{n+1}) = \sum_{\gamma_n = \gamma_{n+1}/\gamma_1} F(\gamma_n), \quad (13)$$

где $F(\gamma_{n+1})$ – ведущие логарифмы для $(n+1)$ -петлевого графа γ_{n+1} , а суммирование ведется по n -петлевым графам γ_n , полученным после стягивания всевозможных однопетлевых подграфов в γ_{n+1} . Симметричные факторы S_γ в уравнении (13) исчезают вследствие тождества [5]

$$\frac{i(\gamma_1, \gamma_n; \gamma_{n+1})}{S_{\gamma_1} S_{\gamma_n}} = \frac{1}{S_{\gamma_{n+1}}}, \quad (14)$$

где $i(\gamma_1, \gamma_n; \gamma_{n+1})$ – число ориентаций графа γ_1 таких, что при вставке γ_1 в γ_n получается γ_{n+1} .

Обратим внимание на то, что формула (13) дает ответ только для ведущих логарифмов. Чтобы найти следующие за ведущими логарифмы, необходимо стягивать поддиаграммы с соответствующим числом петель и умножать на коэффициенты бета-функции для этих поддиаграмм [2].

2. ДИФФЕОМОРФИЗМЫ И СДВИГИ

В этом разделе найдены коэффициенты перед ведущими логарифмами для отдельных фейнмановских диаграмм из решения обобщенного уравнения ренормгруппы (11). Это уравнение имеет вид уравнения Шредингера в евклидовом пространстве

$$\partial_\tau F = -\hat{\beta} \circ F, \quad (15)$$

где бета-функция играет роль гамильтониана. Решение этого уравнения запишем в виде

$$F(\tau) = e^{-\tau\hat{\beta}} F_0, \quad (16)$$

где F_0 — некоторая начальная вершинная функция. Оператор $e^{-\tau\hat{\beta}}$ описывает эволюцию начального вектора F_0 в вектор $F(\tau)$. Иными словами, этот оператор задает диффеоморфизм пространства $\mathcal{H}^*$, соответствующий ренормгрупповому преобразованию. Проблема заключается в том, что действие оператора $e^{-\tau\hat{\beta}}$ устроено довольно сложно. Чтобы понять структуру ответа, рассмотрим более простую задачу о диффеоморфизмах на прямой.

Пусть $\hat{V} = V(x)\partial_x$ — векторное поле на прямой, тогда оператор $g = e^{\hat{V}}$ задает диффеоморфизм вещественной прямой. Этот оператор инвариантен относительно замены $x \rightarrow y(x)$, но его действие на функцию $f(x)$ является достаточно сложным, поскольку оператор ∂_x действует не только на $f(x)$, но и на $V(x)$. Удобно работать с нормально упорядоченными операторами. Нормальное упорядочение обозначается двумя точками с обеих сторон оператора,

$$\tilde{g} = :e^{\tilde{V}(x)\partial_x} :, \quad (17)$$

и означает, что производная действует на стоящую справа функцию и не действует на $\tilde{V}(x)$, поэтому

$$:e^{\tilde{V}(x)\partial_x} : f(x) = f(x + \tilde{V}(x)). \quad (18)$$

Таким образом, нормальное упорядочение экспоненты задает сдвиг переменной. Задача состоит в том, чтобы для данного $V(x)$ найти $\tilde{V}(x)$ такой, что

$$e^{V(x)\partial_x} = :e^{\tilde{V}(x)\partial_x} :. \quad (19)$$

Начало разложения оператора $e^{V(x)\partial_x}$ имеет вид

$$e^{V(x)\partial_x} = 1 + V\partial + \frac{1}{2}((V\partial V)\partial + V^2\partial^2) + \dots \quad (20)$$

Соответственно, начало разложения $\tilde{V}(x)$ имеет вид

$$\tilde{V}(x) = V + \frac{1}{2}V\partial V + \frac{1}{3!}(V\partial V\partial V + V^2\partial^2 V) + \dots \quad (21)$$

В общем случае имеем [7]

$$\tilde{V}(x) = \sum_T \frac{1}{S_T} \frac{1}{T!} V_T, \quad (22)$$

где суммирование ведется по всем деревьям с корнем, S_T – число симметрий дерева, т.е. число перестановок ветвей дерева, которые не меняют вид дерева. Древесный факториал $T^!$ определяется следующим образом. Нарисуем дерево так, чтобы корень дерева был наверху, а все ребра были направлены вниз. Тогда для каждой вершины можно определить поддереву как часть дерева, лежащую ниже этой вершины. Обозначим число вершин в поддереве $t \subset T$ через n_t . Древесный факториал определяется по формуле

$$T^! = \prod_{t \subseteq T} n_t, \quad (23)$$

где произведение вычисляется по всем поддеревьям в T . Обычный факториал $N!$ совпадает с древесным факториалом для дерева с N вершинами и без разветвлений.

В формуле (22) осталось определить функцию V_T . Эта функция зависит от поля V и его производных и строится по дереву T . Для определения V_T удобно рассмотреть поля, зависящие от нескольких переменных, тогда

$$\tilde{V}^i = V^i + \frac{1}{2} V^j \partial_j V^i + \frac{1}{3!} (V^k \partial_k V^j \partial_j V^i + V^k V^j \partial_k \partial_j V^i) + \dots \quad (24)$$

Вершинам дерева соответствуют функции $V^n(x)$, ребрам – производные $\partial/\partial x^n$. Корню дерева соответствует функция V^i со свободным индексом. Из корня выходит несколько ребер, им соответствуют операторы дифференцирования, действующие на V^i . Пусть некоторому ребру P соответствует производная ∂_k , тогда вершине на нижнем конце P соответствует функция V^k с тем же индексом. Ребра, выходящие из этой вершины, соответствуют производным, действующим на V^k , и т.д. Таким образом, для каждого дерева с корнем можно найти соответствующий член V_T , и наоборот, для каждого члена V_T в разложении $\tilde{V}$ можно найти соответствующее дерево.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение первого порядка, аналогичное уравнению (15),

$$\partial_\tau f(x, \tau) = V(x) \partial_x f(x, \tau). \quad (25)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$f(x, \tau) = e^{\tau V(x) \partial_x} f_0(x), \quad (26)$$

где $f_0(x)$ – начальное условие. Выразим решение через нормально упорядоченные операторы:

$$f(x, \tau) = :e^{\tilde{V}(x, \tau) \partial_x}: f_0(x) = f_0(x + \tilde{V}(x, \tau)). \quad (27)$$

Пусть $f_0(x) = x$, тогда

$$f(x, \tau) = x + \tilde{V}(x, \tau) = x + \sum_T \frac{1}{S_T} \frac{1}{T^!} \tau^{n_T} V_T, \quad (28)$$

где n_T – число вершин в дереве T .

Теперь установим соответствие между функцией $f(x, \tau)$ и вершинной функцией. Переменная x соответствует вершине графа, в частности отдельно стоящий x соответствует графу γ_0 , состоящему из одной вершины. Оператор $V\partial$ соответствует бета-функции, поскольку этот оператор заменяет x на $V(x)$, а действие бета-функции приводит к замене вершин на графы. Функция V_T , построенная из V , соответствует графу, полученному путем вставки однопетлевых графов. Отличие состоит в том, что разным деревьям может соответствовать один граф, т.е. разные пути вставок однопетлевых графов могут приводить к одному результату. Отметим также, что деревья, соответствующие графам, имеют симметричный фактор, равный симметричному фактору графа. Поэтому выражение для вершинной функции в приближении главных логарифмов принимает вид

$$F = e^{-\tau\tilde{\beta}}\gamma_0 = \gamma_0 + \tilde{\beta}(\tau), \quad (29)$$

где

$$\tilde{\beta}(\tau) = \sum_{\gamma} \frac{1}{S_{\gamma}} \sum_{T_{\gamma}} \frac{1}{T_{\gamma}!} \tau^{n_{\gamma}} \gamma. \quad (30)$$

Теперь легко найти ведущие логарифмы для отдельных фейнмановских диаграмм, если вспомнить, что вершинная функция разлагается по графам:

$$F = \gamma_0 + \sum_{\gamma} \frac{1}{S_{\gamma}} F_{\gamma} \gamma. \quad (31)$$

Ведущий логарифмический вклад в n -петлевую диаграмму γ_n имеет вид

$$F_{\gamma_n} = c(\gamma_n) \tau^n, \quad (32)$$

где коэффициент можно найти, сравнивая (30) и (31):

$$c(\gamma_n) = \sum_{T_{\gamma_n}} \frac{1}{T_{\gamma_n}!}. \quad (33)$$

Ранее мы вывели рекуррентное соотношение (13) на ведущие логарифмы. Из этого уравнения следует, что коэффициенты $c(\gamma_n)$, определенные в (33), должны удовлетворять уравнению

$$c(\gamma_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{\gamma_n = \gamma_{n+1} / \gamma_1} c(\gamma_n). \quad (34)$$

Это утверждение несложно доказать, используя следующее свойство древесных факториалов [8]:

$$\frac{n}{T!} = \sum_{t \in \mathcal{F}(T)} \frac{1}{t!}, \quad (35)$$

где T – любое дерево с корнем, содержащее n вершин, $\mathcal{F}(T)$ – множество деревьев t с $(n-1)$ вершиной, полученных из T удалением одной из вершин на конце ветвей. Отметим, что вершинам на концах ветвей соответствуют однопетлевые подграфы, поэтому стягивание однопетлевых подграфов соответствует удалению вершин на концах ветвей.

Мы видим, что ведущие логарифмы для отдельных фейнмановских интегралов можно найти, не вычисляя этих интегралов. Логика вывода следующая: написать уравнение однопетлевой ренормгруппы в пространстве $\mathcal{H}^*$; решить это уравнение в виде экспоненты от бета-функции; перейти к оператору сдвига, т.е. к нормально упорядоченной экспоненте; после этого представить ответ как сдвиг аргумента исходной функции. В квантовой теории поля такой сдвиг аргумента исходной функции соответствует перенормировке константы связи.

Переход к обычной вершинной функции и уравнению ренормгруппы осуществляется с помощью замен $\gamma_n \rightarrow g^{n+1}$ и $\hat{\beta} \rightarrow \beta(g)\partial_g$. При этом перенормированная вершинная функция равна

$$\begin{aligned} F(g, \tau) &= e^{-\tau\beta(g)\partial_g}\gamma = g + \tilde{\beta}(\tau) = \\ &= g + \sum_{\gamma \neq \gamma_0} \frac{1}{S_\gamma} \sum_{T_\gamma} \frac{1}{T_\gamma!} \tau^{n_\gamma} g^{n_\gamma+1} = \frac{g}{1 - 3g\tau/2}, \end{aligned}$$

где $\tau = \ln(\Lambda^2/p^2)$, а $g = g(\Lambda)$ – бегущая константа связи на масштабе Λ .

3. ПАРКЕТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Задача о нахождении главных логарифмических асимптотик для четырехточечной вершинной функции в безмассовой теории φ^4 для произвольных внешних импульсов была решена Поляковым [9] с помощью интегрального уравнения на вершинную функцию. Аналогичные рассуждения можно использовать для нахождения асимптотик отдельных фейнмановских интегралов.

В этом разделе мы выведем формулу (33) для главных логарифмов в симметричной точке из прямых оценок фейнмановских интегралов в регуляризации обрезанием. Прежде чем описать общий случай, рассмотрим несколько примеров.

Рис. 1. Двухпетлевая диаграмма.

Рассмотрим двухпетлевую диаграмму γ_2 (рис. 1). В большой петле бежит импульс k , а в маленькой – импульс p (он на рисунке не показан). Импульс $k - q_2$ является внешним

для однопетлевой поддиаграммы. Пусть $q \sim q_1 \sim q_2$. Далее мы увидим, что ведущие логарифмы получаются при интегрировании по $k > q$. Для внутреннего интеграла, соответствующего однопетлевой поддиаграмме, имеем

$$F_{\gamma_1}(k) = \int_0^\Lambda \frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+k)^2} d^4 p. \quad (36)$$

Этот интеграл имеет логарифмическое поведение только в области $p > k$, поэтому нижний предел можно заменить на k , а подынтегральное выражение — на $d \ln(p^2/\Lambda^2)$. Таким образом, в приближении главных логарифмов имеем

$$F_{\gamma_1}(k) = \int_k^\Lambda d \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} = \int_0^y dx = y, \quad (37)$$

где $y = \ln(\Lambda^2/k^2)$, а $x = \ln(\Lambda^2/p^2)$. Поступим аналогично с двухпетлевым интегралом

$$F_{\gamma_2} = \int_q^\Lambda \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+q)^2} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} d^4 k. \quad (38)$$

Здесь ведущие логарифмы получаются при интегрировании по $k > q$:

$$F_{\gamma_2} = \int_0^\eta y dy = \frac{1}{2} \eta^2, \quad (39)$$

где $\eta = \ln(\Lambda^2/q^2)$.

Рис. 2. Трехпетлевые диаграммы.

Второй пример — трехпетлевая диаграмма γ_3 (рис. 2). Пусть k_1 — импульс в верхней большой петле, k_2 — в нижней большой петле, а p — в однопетлевой поддиаграмме в центре. Есть две области, дающие вклад в главные логарифмы: $k_1 < k_2 < p$ и $k_2 < k_1 < p$. Первому случаю соответствует интеграл

$$I = \int_q^\Lambda d \ln \frac{k_1^2}{\Lambda^2} \int_{k_1}^\Lambda d \ln \frac{k_2^2}{\Lambda^2} \int_{k_2}^\Lambda d \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} = \int_0^\eta \frac{y^2}{2} dy = \frac{1}{3!} \eta^3, \quad (40)$$

где, как и прежде, $\eta = \ln(\Lambda^2/q^2)$. Аналогичный ответ получается для второй области. Окончательный ответ для главных логарифмов получается суммированием по указанным областям:

$$F_{\gamma_3} = \frac{1}{3} \eta^3. \quad (41)$$

Последний пример – граф $\tilde{\gamma}_3$ (рис. 2). Пусть p_1, p_2 – импульсы, бегущие по однопетлевым подграфам, k – импульс в большой петле, а q – внешний импульс. Для получения главной логарифмической асимптотики необходимо проинтегрировать по $p_1, p_2 > k$, поэтому соответствующий интеграл имеет вид

$$F_{\tilde{\gamma}_3} = \int_q^\Lambda d \ln \frac{k^2}{\Lambda^2} \int_k^\Lambda d \ln \frac{p_1^2}{\Lambda^2} \int_k^\Lambda d \ln \frac{p_2^2}{\Lambda^2} = \int_0^\eta y^2 dy = \frac{1}{3} \eta^3. \quad (42)$$

В общем случае имеем следующее соответствие между максимальными деревьями расходящихся подграфов и интегралами, дающими вклад в главные логарифмы. Поскольку дерево максимальное, то каждый подграф имеет ровно на одну петлю больше, чем вложенный в него подграф. Следовательно, каждой вершине можно поставить в соответствие переменную интегрирования. Если $\gamma_1 \subset \gamma_2$, то, соответственно, $p_1 < p_2$. Переменная, отвечающая корню, т.е. самому графу, принадлежит интервалу (q, Λ) , где q – характерный внешний импульс. При каждом интегрировании добавляется одна степень логарифма, поэтому интеграл для k -петлевого графа γ_k имеет вид

$$I^{(k)} = \int_0^{\tilde{y}} y^{k-1} dy = \frac{1}{k} \tilde{y}^k, \quad (43)$$

где $\tilde{y} = \ln(\Lambda^2/\tilde{p}^2)$ – внешний импульс для графа γ_k . Подынтегральное выражение y^{k-1} получается при интегрировании по переменным, соответствующим подграфам в γ_k . Мы видим, что каждое интегрирование дает вклад, пропорциональный $1/k$, где k – количество петель в графе. Таким образом, n -кратный интеграл, построенный по дереву T_γ , равен

$$I(T_\gamma) = \frac{1}{T_\gamma!} \eta^n, \quad (44)$$

где $T_\gamma!$ – произведение чисел петель в подграфах графа γ . Окончательный ответ для главных логарифмов имеет вид

$$F(\gamma_n) = \sum_{T_\gamma!} \frac{1}{T_\gamma!} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^n. \quad (45)$$

Мы видим, что коэффициент перед главным логарифмом совпадает с коэффициентом в формуле (33).

В общем случае уравнение Каллана–Симанчика на четырехточечную вершинную функцию имеет вид

$$\partial_\tau F + \hat{\beta} \circ F - 2\hat{\gamma} \circ F = 0. \quad (46)$$

Оператор $\hat{\gamma}$ соответствует перенормировкам амплитуд полей. Этот оператор действует с помощью вставки одночастично-неприводимых диаграмм с двумя внешними ребрами. Решение уравнения (46) запишем в виде

$$F = e^{-\tau \hat{\beta} + 2\tau \hat{\gamma}} F_0, \quad (47)$$

где F_0 – начальное условие для дифференциального уравнения (46).

Если известны функции β и γ , то из уравнения (47) можно найти ответ для любого фейнмановского интеграла, дающего вклад в F .

4. ВЫВОДЫ

В статье найдены уравнения ренормгруппы в формализме алгебры Хопфа графов. Показано, что эти уравнения эквивалентны ренормгрупповым уравнениям на отдельные фейнмановские интегралы. В качестве примера использования обобщенных уравнений ренормгруппы вычислены коэффициенты перед главными логарифмами для отдельных фейнмановских интегралов. Вывод основывается только на существовании алгебры Хопфа и дуальной к ней алгебры Ли и не использует специальные черты теории φ^4 . Поэтому предложенный метод должен иметь обобщения на другие теории. Основная проблема — найти соответствующую алгебру Хопфа. Например, в теориях Янга–Миллса эта алгебра должна быть согласована с калибровочной инвариантностью и матричной структурой. Решение задачи о нахождении алгебры Хопфа, согласованной с калибровочной инвариантностью в абелевых теориях, можно найти в работе [10]. Вопрос об алгебрах Хопфа в матричных теориях решается в работе [11]. Таким образом, можно ожидать, что алгебра Хопфа будет определена и в теориях Янга–Миллса. Более смелые надежды состоят в возможности использования алгебры Хопфа для формализации многопетлевых вычислений в неевклидовых областях [12].

Благодарности. Автор глубоко признателен А. Ю. Морозову за ценные обсуждения. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-02-17373.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976; *Дж. Коллинз.* Перенормировка. М.: Мир, 1988.
- [2] *K. G. Chetyrkin.* Nuovo Cimento A. 1990. V. 103. P. 1653.
- [3] *A. Connes, D. Kreimer.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 210. P. 249; hep-th/9912092.
- [4] *A. Connes, D. Kreimer.* Commun. Math. Phys. 2001. V. 216. P. 215; hep-th/0003188.
- [5] *D. Malyshev.* Phys. Lett. B. 2004. V. 578. P. 231; hep-th/0307301.
- [6] *D. Malyshev.* Non RG logarithms via RG equations. hep-th/0402074.
- [7] *A. Connes, H. Moscovici.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 198. P. 199; math.DG/9806109; *A. Gerasimov, A. Morozov, K. Selivanov.* Int. J. Mod. Phys. A. 2001. V. 16. P. 1531; hep-th/0005053.
- [8] *D. Kreimer.* Adv. Theor. Math. Phys. 1999. V. 3. № 3. P. 627; hep-th/9901099.
- [9] *А. М. Поляков.* ЖЭТФ. 1969. Т. 57. С. 271.
- [10] *И. В. Волович, Д. В. Прохоренко.* Тр. МИРАН. 2004. Т. 147. С. 166.
- [11] *D. Malyshev.* JHEP. 2002. V. 0205. P. 013; hep-th/0112146.
- [12] *В. А. Смирнов, Э. Р. Разметов.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 1. С. 64; hep-ph/9812529; *V. A. Smirnov.* Phys. Lett. B. 1999. V. 465. P. 226; hep-ph/9907471.

Поступила в редакцию 7.IX.2004 г.