Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Т. Хабибуллин, Обрывы цепочки Тоды и проблема редукций, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 1, 33–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:41:57

© 2005 г.

И. Т. Хабибуллин*

ОБРЫВЫ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ И ПРОБЛЕМА РЕДУКЦИЙ

Доказано, что обобщенные цепочки Тоды, соответствующие простым алгебрам Ли серии D , являются редукциями цепочек, соответствующих алгебрам Ли серии A .

Ключевые слова: обобщенные цепочки Тоды, интегрируемость по Дарбу, инварианты Лапласа, пара Лакса, простые алгебры Ли.

1. ВВЕДЕНИЕ

В известной работе Шабата и Ямилова [1] был найден полный список интегрируемых гиперболических уравнений вида

$$v_{xt}(n) = \exp\left(\sum_j A_{nj}v(j)\right), \quad 0 \leq n, j \leq N, \quad (1)$$

называемых экспоненциальными системами или обобщенными цепочками Тоды. Здесь $A = (A_{nj})$ – постоянная матрица. В [1] было доказано, что нераспадающаяся система уравнений (1) интегрируема в “явном виде” тогда и только тогда, когда A является матрицей Картана простой алгебры Ли (о связи алгебр Ли и интегрируемых цепочек см. также [2], [3]). Обобщенные цепочки Тоды, соответствующие классическим сериям конечномерных алгебр Ли, получаются в результате обрыва цепочки Тоды

$$v_{xt} = e^{v(n-1)-2v(n)+v(n+1)}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (2)$$

путем наложения некоторых граничных условий. Ниже нам будет удобно перейти к другой записи цепочки Тоды, полагая $u(n) = v(n) - v(n+1)$:

$$u_{xt}(n) = e^{u(n-1)-u(n)} - e^{u(n)-u(n+1)}. \quad (3)$$

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия.
E-mail: ihabib@imat.rb.ru

Данная цепочка очевидным образом обрывается при наложении условий $u(-1) = -\infty$ и $u(K+1) = \infty$ (такие обрывы будем называть вырожденными). При этом цепочка сводится к системе гиперболических уравнений

$$\begin{aligned} u_{xt}(0) &= -e^{u(0)-u(1)}, \\ u_{xt}(j) &= e^{u(j-1)-u(j)} - e^{u(j)-u(j+1)}, \quad 0 < j \leq K-1, \\ u_{xt}(K) &= e^{u(K-1)-u(K)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обобщенная цепочка Тоды (4) соответствует алгебре Ли A_K . Полагая $u(j) = -u(K-j)$, находим дальнейшую редукцию системы, соответствующую либо алгебре C_n , либо алгебре B_n в зависимости от четности числа K (см. [3]). Долгое время оставалось неясным, являются ли экспоненциальные системы, соответствующие алгебрам Ли серии D_n , редукциями системы вида (4). В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос. Алгоритм построения общего решения для цепочек серии A давно известен (см., например, [4]), он был придуман еще Дарбу [5]. Поэтому сведение заданной системы к цепочке серии A в принципе позволяет явно проинтегрировать цепочку методом Дарбу. Следует отметить, что общее решение цепочки вида (1), соответствующей простой алгебре Ли, можно построить средствами теории представлений групп Ли [3]. Исследование задачи о редукциях упростилось во многом благодаря новому подходу к проблеме обрыва нелинейных цепочек, излагаемому в разделе 2. К настоящему времени разработаны различные методы поиска условий обрыва цепочек, сохраняющих свойство интегрируемости. Например, можно искать обрывы, совместимые с законами сохранения и гамильтоновой структурой [6] или с высшими симметриями [7] цепочки. Однако при этом остается нерешенной задача поиска пары Лакса для оборванной цепочки. Поэтому имеет смысл начать с обрыва линейных цепочек, задающих пару Лакса, так чтобы после обрыва пара линейных цепочек оставалась совместной. С одной стороны, эта задача проще, так как цепочки линейны, с другой стороны, сразу же строится пара Лакса для оборванной нелинейной цепочки. Предлагаемый подход к обрывам цепочек не требует ничего, кроме пары Лакса, и, как показывают вычисления, позволяет обнаружить все известные примеры интегрируемых обрывов. Любопытно, что для ранее известных редуцированных цепочек пары Лакса, найденные предлагаемым способом, могут отличаться от стандартных (см. случай цепочки серии D_n ниже).

В разделе 3 обсуждается предложенный Гурса симметричный критерий обрыва последовательности инвариантов Лапласа линейного гиперболического уравнения, который активно используется в последующих разделах. Интерес к этой тематике возродился после работ Андерсона, Камрана [8] и Жиберы, Соколова [9], в которых была осознана важность инвариантов Лапласа в задаче классификации нелинейных гиперболических уравнений.

В разделах 4, 5 обсуждается основной результат, состоящий в том, что в случае общего положения решение $(u(0), u(1), \dots, u(N))$ цепочки серии D_{N+1} является редукци-

ей (получается проецированием на первые $N + 1$ координат) некоторого решения $(u(0), u(1), \dots, u(2N + 1))$ цепочки серии A_{2N+1} . Однако у цепочки D_{N+1} могут существовать особые решения (такое решение приводится ниже в примере 5), которые связаны с цепочкой, соответствующей алгебре A_{2N} меньшей размерности.

В заключительном разделе приводится интегрируемая конечно-полевая цепочка неэкспоненциального типа (52), имеющая некоторое сходство с цепочкой серии C . Действительно, краевое условие $D_t e^{-u(N+1)} = D_x e^{u(N)}$ в (52) и условие $e^{-u(N+1)} = e^{u(N)}$, замыкающее цепочку C , совпадают при $x = t$. Любопытно, что цепочка (52) также является редукцией цепочки серии A . Представляется правдоподобной следующая гипотеза. Если цепочка Тоды обрывается с одной стороны вырожденным условием, а с другой стороны – любым интегрируемым краевым условием, то полученная конечная цепочка есть редукция цепочки серии A . Отметим, что цепочки, соответствующие исключительным алгебрам Ли, остаются вне нашего рассмотрения.

2. ОБРЫВЫ АССОЦИИРОВАННОЙ ЦЕПОЧКИ

Обсудим проблему интегрируемых обрывов дискретных цепочек на примере цепочки Тоды (3). Напомним ее пару Лакса

$$\phi(n+1) = (D_x + u_x(n))\phi(n), \quad (5)$$

$$\phi_t(n) = -e^{u(n-1)-u(n)}\phi(n-1). \quad (6)$$

Допустим, что на цепочку (3) в точке $n = -1$ накладывается интегрируемое условие обрыва вида $u(-1) = F(u(0), u(1), \dots)$, где функция F зависит от конечного числа полевых переменных и их производных. Очевидно, что при этом из полного набора динамических переменных, состоящего из переменных $u(n)$, где $-\infty < n < \infty$, и всех их производных по x и производных по t (все смешанные производные выражаются на основании самой цепочки) выделяется подмножество вида $\{u(n), u_t(n), u_x(n), \dots\}_{n=0}^{\infty}$, являющееся динамическим набором для оборванной цепочки.

Естественно ожидать, что в то же время из дополнительного динамического набора, состоящего из собственных функций $\{\phi(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, может быть выделено подмножество вида $\{\phi(n)\}_{n=0}^{\infty}$, обслуживающее пару Лакса оборванной цепочки. Другими словами, обрыв нелинейной цепочки должен порождать обрыв пары Лакса. Поэтому, чтобы замкнуть ассоциированную пару цепочек (5), (6), можно попытаться выразить (линейно) переменную $\phi(-1)$ через конечное число переменных вида $\phi(0), \phi(1), \dots$. Однако в такой форме эта правдоподобная гипотеза не подтверждается¹⁾: не удастся выразить $\phi(-1)$ в требуемом виде. Но гипотеза легко исправляется. Нужно взять еще одну пару Лакса (калибровочно неэквивалентную заданной)

$$\psi(n+1) = (D_t + u_t(n))\psi(n), \quad (7)$$

$$\psi_x(n) = -e^{u(n-1)-u(n)}\psi(n-1), \quad (8)$$

¹⁾Точнее, гипотеза верна лишь для вырожденного условия обрыва. В левой концевой точке это условие имеет вид $e^{u(j)} = 0$, а в правой концевой точке – вид $e^{-u(j)} = 0$.

для того чтобы ввести в рассмотрение еще один набор собственных функций $\{\psi(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Вторая пара Лакса с точностью до линейной замены переменных $\psi(n) = e^{-u(n)}\tilde{\psi}(n)$ является вещественно сопряженной исходной паре. Теперь условие обрыва цепочки (3) задается неявно в виде некоторого условия линейной связи между значениями двух собственных функций в различных точках:

$$\sum_{i=N}^{N_1} a_i \phi(i) + \sum_{i=M}^{M_1} b_i \psi(i) = 0, \quad (9)$$

где N, N_1, M, M_1 – произвольные целые числа такие, что $N \leq N_1, M \leq M_1$. Сначала выразим $\phi(N)$ из этого равенства. Затем продифференцируем равенство по переменной x с учетом уравнений (5) и (8), в результате получим:

$$\sum_{i=N}^{N_1} a_{ix} \phi(i) + a_i (\phi(i+1) - u_x(i) \phi(i)) + \sum_{i=M}^{M_1} b_{ix} \psi(i) - b_i w_{i-1} \psi(i-1) = 0,$$

где $w_n = e^{u(n)-u(n+1)}$. Выразим теперь $\psi(M-1)$ из последнего соотношения и сформулируем результат в виде утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть в равенстве (9) $a_N \neq 0$ (для определенности положим $a_N = -1$), $b_M \neq 0$, $w_{M-1} \neq 0$, тогда из условия связи (9) вытекают следующие краевые условия для пар Лакса (5), (6) и (7), (8):

$$\phi(N) = \sum_{i=N+1}^{N_1} a_i \phi(i) + \sum_{i=M}^{M_1} b_i \psi(i), \quad (10)$$

$$\psi(M-1) = \sum_{i=N+1}^{N_1+1} A_i \phi(i) + \sum_{i=M}^{M_1} B_i \psi(i). \quad (11)$$

Краевые условия замыкают обе пары Лакса таким образом, что крайне левые уравнения этих пар, т.е. уравнение (6) в точке $n = N+1$ и уравнение (8) в точке $n = M$, принимают вид

$$\phi_t(N+1) = -w_N \left(\sum_{i=N+1}^{N_1} a_i \phi(i) + \sum_{i=M}^{M_1} b_i \psi(i) \right), \quad (12)$$

$$\psi_x(M) = -w_{M-1} \left(\sum_{i=N+1}^{N_1+1} A_i \phi(i) + \sum_{i=M}^{M_1} B_i \psi(i) \right). \quad (13)$$

Искомые коэффициенты a_i, A_i, b_i, B_i определяются из условий совместности

$$(\phi_x(N+1))_t = (\phi_t(N+1))_x, \quad (\psi_x(M))_t = (\psi_t(M))_x, \quad (14)$$

равносильных следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_i}{\partial x} &= a_i(u_x(i) - u_x(N)) + A_i b_M w_{M-1} - a_{i-1}, \quad i \geq N+1, \\ \frac{\partial b_i}{\partial x} &= -b_i u_x(N) + b_{i+1} w_i + B_i b_M w_{M-1}, \quad i \geq M, \\ \frac{\partial A_i}{\partial t} &= -A_i u_t(M-1) + A_{i+1} w_i + a_i A_{N+1} w_N, \quad i \geq N+1, \\ \frac{\partial B_i}{\partial t} &= B_i(u_t(i) - u_t(M-1)) + b_i A_{N+1} w_N - B_{i-1}, \quad i \geq M,\end{aligned}\tag{15}$$

где следует положить $a_N = -1$, $B_{M-1} = -1$. В действительности эта система уравнений переопределена, условие ее разрешимости как раз и порождает условие обрыва исходной нелинейной цепочки (3). Найденные условия обрыва по построению являются интегрируемыми. Ниже мы приведем несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Положим $N = -1$, $M = 0$. Точнее говоря, будем искать условия обрыва уравнений Лакса в виде

$$\phi(-1) = b_0 \psi(0), \quad \psi(-1) = A_0 \phi(0).$$

При этом все коэффициенты в формулах (10), (11), за исключением A_0 и b_0 , равны нулю. Система уравнений (15) принимает вид

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} = -A_0 u_t(-1), \quad \frac{\partial b_0}{\partial x} = -b_0 u_x(-1), \quad A_0 b_0 w_{-1} = -1.\tag{16}$$

Первые два уравнения легко решаются в явном виде, а последнее задает краевое условие

$$A_0 = \alpha(x) e^{-u(-1)}, \quad b_0 = \beta(t) e^{-u(-1)}, \quad e^{u(-1)} = -e^{-u(0)} \alpha(x) \beta(t).$$

Произвол в функциях α и β можно убрать при помощи преобразования сдвига $u(x, t) \rightarrow u(x, t) + p(x) + q(t)$, не изменяющего вида цепочки Тоды. В этом случае краевое условие приводится к виду $u(-1) = -u(0)$. Напомним, что обобщенная цепочка Тоды с краевыми условиями $u(-1) = -u(0)$ и $e^{u(n)} = 0$ отвечает алгебре C_n .

ПРИМЕР 2. Запишем условия редукции (10), (11) в виде

$$\phi(-1) = b_1 \psi(1), \quad \psi(0) = A_0 \phi(0),$$

отвечающем случаю $N = -1$, $M = 1$. Найдем неизвестные коэффициенты из уравнений

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} = -A_0 u_t(0), \quad \frac{\partial b_1}{\partial x} = -b_1 u_x(-1), \quad A_0 b_1 w_0 = -1, \quad A_0 b_1 w_{-1} = -1.\tag{17}$$

Из первых двух уравнений находим $A_0 = \alpha(x) e^{-u(0)}$, $b_1 = \beta(t) e^{-u(-1)}$. Следующие два уравнения приводят к равенствам $e^{2u(0)} = -\alpha(x) \beta(t)$ и $e^{u(-1)+u(1)} = -\alpha(x) \beta(t)$. Таким образом, краевое условие можно записать в виде $u(0) = 0$. Цепочка Тоды с условиями обрыва $u(0) = 0$ и $e^{u(n+1)} = 0$ отвечает алгебре B_n .

ПРИМЕР 3. Будем искать условие обрыва в виде

$$\phi(-1) = a_0\phi(0) + b_0\psi(0) + b_1\psi(1), \quad \psi(-1) = A_0\phi(0) + A_1\phi(1) + B_0\psi(0).$$

Неизвестные функции определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial x} &= a_0(u_x(0) - u_x(-1)) + A_0b_0w_{-1} + 1, \\ \frac{\partial b_0}{\partial x} &= -b_0u_x(-1) + b_1w_0 + B_0b_0w_{-1}, \\ \frac{\partial A_0}{\partial t} &= -A_0u_t(-1) + A_1w_0 + a_0A_0w_{-1}, \\ \frac{\partial B_0}{\partial t} &= B_0(u_t(0) - u_t(-1)) + b_0A_0w_{-1} + 1, \\ \frac{\partial b_1}{\partial x} &= -b_1u_x(-1), \quad \frac{\partial A_1}{\partial t} = -A_1u_t(0), \quad A_0b_1w_{-1} = B_0, \quad A_1b_0w_{-1} = a_0. \end{aligned} \quad (18)$$

С точностью до упомянутого выше преобразования сдвига $u(x, t) \rightarrow u(x, t) + p(x) + q(t)$ решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{u_t(0)}{2 \operatorname{sh} u(0)} e^{-u(-1)}, \quad b_0 = -\frac{u_t(0)}{2\lambda \operatorname{sh} u(0)} e^{u(0)-u(-1)}, \quad b_1 = \lambda^{-1} e^{-u(-1)}, \\ A_0 &= -\lambda \frac{u_x(0)}{2 \operatorname{sh} u(0)} e^{u(0)-u(-1)}, \quad A_1 = \lambda e^{-u(-1)}, \quad B_0 = -\frac{u_x(0)}{2 \operatorname{sh} u(0)} e^{-u(-1)}. \end{aligned}$$

При этом условие разрешимости системы (18) имеет вид условий связи на динамические переменные:

$$u_{xt}(0) = -2e^{u(-1)} \operatorname{sh} u(0) + \frac{u_x(0)u_t(0)}{2 \operatorname{sh} u(0)} e^{u(0)}. \quad (19)$$

Сравнивая последнее уравнение с бесконечной цепочкой Тоды (3), легко убедиться, что условие обрыва имеет вид

$$e^{u(-1)} = e^{-u(1)} + \frac{u_x(0)u_t(0)}{2 \operatorname{sh} u(0)}. \quad (20)$$

Теперь краевое условие для пары Лакса записывается так:

$$\phi(-1) = -\frac{u_t(0)}{2 \operatorname{sh} u(0)} e^{-u(-1)} \phi(0) - \frac{u_t(0)}{2\lambda \operatorname{sh} u(0)} e^{u(0)-u(-1)} \psi(0) + \frac{e^{-u(-1)} \psi(1)}{\lambda}, \quad (21)$$

$$\psi(-1) = -\lambda \frac{u_x(0)}{2 \operatorname{sh} u(0)} e^{u(0)-u(-1)} \phi(0) + \lambda e^{-u(-1)} \phi(1) - \frac{u_x(0)}{2 \operatorname{sh} u(0)} e^{-u(-1)} \psi(0). \quad (22)$$

Здесь λ – произвольный (спектральный) параметр. Отметим, что найденное в этом примере условие обрыва тесно связано с алгеброй D_n . Ниже мы подробно изучим этот случай.

Система уравнений (15) имеет весьма широкий набор решений. По-видимому, способов обрыва цепочки Тоды, сохраняющих интегрируемость, бесконечно много. В завершение этого раздела приведем пример обрыва, выводящего за рамки экспоненциальных систем.

ПРИМЕР 4. Пусть собственные функции связаны равенствами

$$\begin{aligned}\phi(-1) &= e^{-u(-1)}[-\psi(1) + u_t(0)\psi(0) - e^{2u(-1)}\psi(-1)], \\ \psi(-2) &= e^{-u(-2)}[\phi(0) - e^{-u(0)}\psi(0) + u_x(-1)e^{u(-1)}\psi(-1)],\end{aligned}$$

тогда условие обрыва цепочки Тоды выражается так:

$$D_x e^{u(-1)} = D_t e^{-u(0)}.$$

Из уравнений Лакса (5)–(8) следует, что собственные функции $\phi = \phi(n, x, t)$ и $\psi = \psi(n, x, t)$ при каждом целом n удовлетворяют линейным гиперболическим уравнениям

$$\phi_{xt} + u_x(n)\phi_t + w_{n-1}\phi = 0, \quad (23)$$

$$\psi_{xt} + u_t(n)\phi_x + w_{n-1}\psi = 0. \quad (24)$$

Условия (10), (11) также можно переписать в терминах этих уравнений. Если выразить в формулах (10), (11) сдвиги по n через производные по x и по t , то формулы (10), (11) примут вид дифференциальных связей между решениями гиперболических уравнений (23), (24). Легко проверить, что условие (10) представимо в виде

$$L_1(D_x)\phi(N) = (L_2(D_x) + L_3(D_t))\psi(N), \quad (25)$$

где $L_j(p)$ – некоторые полиномы от p с коэффициентами, зависящими от x, t . Например, равенство (22) можно переписать как дифференциальную связь вида

$$\left(D_x - \frac{u_x e^{-u}}{2 \operatorname{sh} u}\right)\phi(0) = -\frac{1}{\lambda} e^u \left(D_x - \frac{u_x e^{-u}}{2 \operatorname{sh} u}\right)\psi(0),$$

где $u = u(0)$.

В частном случае $L_2 = L_3 = 1$ такие дифференциальные связи и их приложение к интегрированию граничных задач обсуждались в [10].

3. СИММЕТРИЙНЫЙ КРИТЕРИЙ ОБРЫВА РЯДА ЛАПЛАСА

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства линейных гиперболических уравнений вида

$$y_{xt} + ay_x + by_t + cy = 0 \quad (26)$$

с гладкими коэффициентами. Это уравнение является хорошо исследованным. Условие его интегрируемости в явном виде формулируется в терминах инвариантов Лапласа [5]. Напомним, что дифференциальная подстановка $y_1 = y_t + ay$, переводящая любое решение уравнения (26) в решение уравнения того же вида

$$y_{1xt} + a_1 y_{1x} + b_1 y_{1t} + c_1 y_1 = 0, \quad (27)$$

называется t -преобразованием Лапласа. Оно обратимо, если функция $h = a_x + ab - c$, называемая инвариантом Лапласа, отлична от нуля, при этом $y = (y_{1x} + by_1)/h$. Кратное применение этого преобразования определяет инварианты Лапласа $h_0 = h, h_1, h_2, \dots$ с неотрицательными номерами. Аналогично определяется x -преобразование Лапласа. Оно имеет вид $y_{-1} = y_x + by$ и переводит (26) в уравнение

$$y_{-1xt} + a_{-1}y_{-1x} + b_{-1}y_{-1t} + c_{-1}y_{-1} = 0. \quad (28)$$

Обратное преобразование $y = (y_{-1t} + ay_{-1})/h_{-1}$ существует, только если инвариант Лапласа $h_{-1} = b_t + ab - c$ отличен от нуля. Повторяя x -преобразование, получаем инварианты Лапласа $h_{-1}, h_{-2}, \dots$ с отрицательными номерами. Последовательность всех инвариантов Лапласа называется рядом Лапласа. Ряд Лапласа гиперболического уравнения либо бесконечен в обоих направлениях, либо обрывается хотя бы с одной стороны. Это видно из следующей формулы, связывающей три соседних инварианта:

$$(\ln h_j)_{xt} = h_{j+1} + h_{j-1} - 2h_j.$$

Если $h_{-j} = 0$ при некотором $j > 0$, то ряд Лапласа обрывается слева, а если $h_i = 0$ при $i \geq 0$, то ряд обрывается справа. Известная теорема утверждает [5], что гиперболическое уравнение решается в квадратурах, если его ряд Лапласа обрывается хотя бы с одной стороны. Если ряд конечен, то формула общего решения не содержит квадратур.

Классические симметрии являются весьма удобным инструментом исследования ряда Лапласа на обрыв.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [11]. *Ряд Лапласа уравнения (26) обрывается справа или слева тогда и только тогда, когда это уравнение совместно с линейным однородным обыкновенным дифференциальным уравнением вида*

$$D_t^{N+1}y = p(y, y_t, \dots, D_t^N y), \quad (29)$$

или

$$D_x^{K+1}y = q(y, y_x, \dots, D_x^K y), \quad (30)$$

соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_N = 0$ для некоторого $N \geq 0$. Тогда из формулы

$$y_{N+1}h_N = y_{Nt} + a_{N+1}y_N$$

получаем, что y_N удовлетворяет уравнению первого порядка $y_{Nt} = -a_{N+1}y_N$. Далее, дифференцируя по t уравнение $y_N = (y_{N-1,t} + a_N y_{N-1})/h_{N-1}$ и исключая y_N, y_{Nt} , находим, что y_{N-1tt} линейно выражается через y_{N-1t} и y_{N-1} . Затем перейдем к y_{N-2} и т. д., пока не получим уравнение $(N+1)$ -го порядка на функцию $y = y_0$.

Пусть теперь уравнение (26) допускает симметрию (29). Докажем, что его ряд Лапласа обрывается. Считая, что $h \neq 0$ (иначе ряд обрывается справа), перейдем от переменной y к переменной y_1 . Положим $y_t = y_1 - ay$, тогда уравнение (29) примет вид $D_t^N y_1 = p_1(y_{1x}, y_1, y_{1t}, \dots, D_t^{N-1} y_1)$. При этом порядок уравнения по t понижается на единицу. Покажем, что в действительности в правую часть полученного уравнения не входит переменная y_{1x} . Из совместности уравнений (26) и (29) следует, что полученное уравнение совместно с уравнением (27). Но прямая проверка условия совместности дает $\partial p_1 / \partial y_{1x} = 0$. Действительно, совместность уравнений означает, что

$$D_x p_1(y_{1x}, y_1, y_{1t}, \dots, D_t^{N-1} y_1) = -D_t^{N-1}(a_1 y_{1x} + b_1 y_{1t} + c_1 y_1).$$

После применения оператора D_x в левой части этого равенства получаем слагаемое $(\partial p_1 / \partial y_{1x}) y_{1xx}$, в то время как в правой части не будет членов, содержащих y_{1xx} . Следовательно, p_1 не зависит от y_{1x} . Поэтому

$$D_t^{N+1} y = p_1(y, y_t, \dots, D_t^N y). \quad (31)$$

Отсюда видно, что при переходе к уравнению с более высоким номером порядок симметрии понижается. После N -кратного применения t -преобразования получим уравнение первого порядка $y_{Nt} = \alpha_N y_N$, совместное с уравнением $y_{Nxt} + a_N y_{Nx} + b_N y_{Nt} + c_N y_N = 0$. Условие совместности дает $\alpha_N + a_N = 0$, $\alpha_{Nx} + \alpha_N b_N + c_N = 0$. Поэтому $h_N = a_{Nx} + a_N b_N - c_N = 0$, и ряд Лапласа обрывается справа в точке $n \leq N$.

Аналогично проверяется, что из существования симметрии (30) следует, что $h_n = 0$ для $-K - 1 \leq n \leq -1$.

4. ЦЕПОЧКИ СЕРИИ D_n

Рассмотрим конечную цепочку, полученную из (3) наложением в точках $n = -1$ и $n = N$ условий обрыва следующего вида:

$$\begin{aligned} e^{u(-1)} &= 0, \\ u_{xt}(0) &= -e^{u(0)-u(1)}, \\ u_{xt}(j) &= e^{u(j-1)-u(j)} - e^{u(j)-u(j+1)}, \quad 0 < j \leq N, \\ e^{-u(N+1)} &= e^{u(N-1)} - \frac{u_x(N)u_t(N)}{2 \operatorname{sh} u(N)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Эта цепочка представляет собой систему из $N + 1$ гиперболического уравнения. Она соответствует простой алгебре Ли серии D_{N+1} и обычно записывается в виде

$$\begin{aligned} p_{xt}(0) &= -e^{p(0)-p(1)}, \\ p_{xt}(j) &= e^{p(j-1)-p(j)} - e^{p(j)-p(j+1)}, \quad 0 < j \leq N-2, \\ p_{xt}(N-1) &= e^{p(N-2)-p(N-1)} - (e^{p(N)} + e^{-p(N)})e^{p(N-1)}, \\ p_{xt}(N) &= (e^{-p(N)} - e^{p(N)})e^{p(N-1)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Две системы уравнений связаны заменой переменной вида $u(j) = p(j) - \ln 2$, если $j = 1, 2, \dots, N-1$ и $e^{u(N)} = \operatorname{ch} p(N)$.

Пара Лакса оборванной цепочки (32) задается уравнениями (5)–(8) при $0 < n < N$, снабженными на концах отрезка краевыми условиями

$$\begin{aligned}\phi_t(0) &= 0, \quad \psi_x(0) = 0, \\ \phi(N+1) &= \frac{u_x(N)}{2 \operatorname{sh} u(N)} \left(e^{u(N)} \phi(N) + \frac{\psi(N)}{\lambda} \right) + \frac{e^{u(N-1)} \psi(N-1)}{\lambda}, \\ \psi(N+1) &= \frac{u_t(N)}{2 \operatorname{sh} u(N)} (e^{u(N)} \psi(N) + \lambda \phi(N)) + \lambda e^{u(N-1)} \phi(N-1),\end{aligned}\tag{34}$$

и отличается от ранее известной, (см., например, [3]). Ясно, что параметр λ убирается простой заменой, поэтому можно считать $\lambda = 1$. Продолжим систему уравнений (32) вправо, т.е. доопределим переменную $u(j)$ для $j > N+1$, пользуясь следующей рекуррентной формулой:

$$e^{-u(j+1)} = e^{-u(j)} (e^{u(j-1)-u(j)} - u_{xt}(j)).\tag{35}$$

Очевидно, что переменная $u(j+1)$ корректно определена тогда и только тогда, когда $e^{-u(j)} \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *В случае общего положения существует такое значение $j = j_0 > N$, что $e^{u(j_0)} = 0$.*

Ниже мы приведем доказательство предложения 3 и уточним, что понимается под общим положением. Но сначала докажем несколько лемм. Собственные функции $\phi(j)$ и $\psi(j)$ продолжаются вправо в силу уравнений Лакса (5) и (7), являющихся соответственно x - и t -преобразованиями Лапласа для уравнений (23) и (24). Легко найти инварианты Лапласа для этих уравнений. Они имеют вид $h_j = -w_{n-j-1}$ для уравнения (23) и вид $h_j = -w_{n+j}$ для (24), где $w_n = e^{u(n)-u(n+1)}$.

Заметим, что уравнения Лакса (5)–(8), (34) обслуживаются следующим набором динамических переменных:

$$S = \{\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(N), \psi(0), \psi(1), \dots, \psi(N)\}.$$

Другими словами, все производные по x и по t собственных функций (линейно) выражаются через переменные из множества S с коэффициентами, зависящими от полевых переменных $\{u(j)\}_{j=0}^N$ и их производных по x и по t .

Нетрудно проверить, что динамический набор S эквивалентен набору

$$S_1 = \{\phi(N), \phi_t(N), \dots, D_t^N \phi(N), \psi(N), \psi_x(N), \dots, D_x^N \psi(N)\},$$

состоящему только из производных по t функции $\phi(N)$ и производных по x функции $\psi(N)$. Благодаря специфике краевого условия на левом конце набор S_1 частично распадается на два подмножества. Точная формулировка дается в следующей лемме.

ЛЕММА 1. *Существуют такие линейные однородные функции P и Q , зависящие от $N + 1$ переменной, что*

$$D_t^{N+1}\phi = P(\phi, D_t\phi, \dots, D_t^N\phi), \quad D_x^{N+1}\psi = Q(\psi, D_x\psi, \dots, D_x^N\psi),$$

где $\phi = \phi(N)$ и $\psi = \psi(N)$.

Доказательство леммы легко провести при помощи уравнений Лакса. Действительно, благодаря уравнению Лакса имеем $\phi_t(0) = 0$. Из следующего по номеру уравнения $\phi(0) = -\phi_t(1)/w_0$ в силу предыдущего находим $\phi_{tt}(1) = (w_t/w)\phi_t(1)$. Повторяя этот шаг несколько раз, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *В случае общего положения динамический набор S_1 эквивалентен набору*

$$S_2 = \{\phi(N), \phi_t(N), \dots, D_t^N\phi(N), \phi_x(N), \phi_{xx}(N), \dots, D_x^{N+1}\phi(N)\},$$

который не содержит переменных ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем второе уравнение в (34) как

$$(D_x + \alpha_{1,1})\phi(N) = \beta_{1,1}\psi(N) + \beta_{1,2}\psi(N-1), \quad (36)$$

где $\alpha_{1,1} = u_x(N)e^{u(N)}/(2 \operatorname{sh} u(N))$, $\beta_{1,1} = \alpha_{1,1}e^{-u(N)}$, $\beta_{1,2} = e^{u(N-1)}$. Продифференцируем это уравнение по x и заменим ψ_x в силу уравнения Лакса (8). В результате получим

$$(D_x^2 + \alpha_{2,1}D_x + \alpha_{2,2})\phi(N) = \beta_{2,1}\psi(N) + \beta_{2,2}\psi(N-1) + \beta_{2,3}\psi(N-2), \quad (37)$$

где $\alpha_{2,1} = \alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,2} = (\alpha_{1,1})_x$ и т.д. Дальнейшее дифференцирование дает

$$(D_x^j + \alpha_{j,1}D_x^{j-1} + \dots + \alpha_{j,j})\phi(N) = \beta_{j,1}\psi(N) + \beta_{j,2}\psi(N-1) + \dots + \beta_{j,j+1}\psi(N-j). \quad (38)$$

Поскольку $\psi_x(0) = 0$, то в данном уравнении необходимо положить $\psi(k) = 0$ для $k \leq -1$. Возьмем $1 \leq j \leq N+1$, тогда правая часть уравнений (38) задает систему из $N+1$ линейного уравнения с $N+1$ неизвестным $\psi(0), \psi(1), \dots, \psi(N)$. При этом последнее уравнение системы имеет вид

$$\begin{aligned} (D_x^{N+1} + \alpha_{N+1,1}D_x^N + \dots + \alpha_{N+1,N+1})\phi(N) = \\ = \beta_{N+1,1}\psi(N) + \beta_{N+1,2}\psi(N-1) + \dots + \beta_{N+1,N+1}\psi(0). \end{aligned} \quad (39)$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов $\beta(x, t) = \{\beta_{i,j}\}$ этой системы:

$$\beta(x, t) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{N,1} & \beta_{N,2} & \beta_{N,3} & \beta_{N,4} & \dots & \beta_{N,N+1} \\ \beta_{N+1,1} & \beta_{N+1,2} & \beta_{N+1,3} & \beta_{N+1,4} & \dots & \beta_{N+1,N+1} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Элементы матрицы суть рациональные функции переменных $u(N)$ и $u(N-1)$, а также их производных по x . Элемент $\beta_{i,j}$ равен нулю, если $j > i+1$, причем $\beta_{i,i+1} \neq 0$ для любого $i: 1 \leq i \leq N+1$.

Сначала мы рассмотрим случай общего положения, состоящий в том, что для всех точек (x, t) из некоторой открытой области $D \subset \mathbb{R}^2$ выполняется условие

$$\det \beta(x, t) \neq 0. \quad (41)$$

Вырожденный случай, при котором функция $\det \beta(x, t)$ тождественно равна нулю в области D , будет рассмотрен в следующем пункте. При выполнении условия (41) переменные $\psi(j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, можно выразить через $\phi(N), \phi(N-1), \dots, \phi(0)$, а значит, через $\phi(N)$ и ее производные по x :

$$\psi(j) = R_j(\phi, \phi_x, \dots, D_x^{N+1}\phi), \quad 0 \leq j \leq N. \quad (42)$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если для всех $(x, t) \in D$ выполнено (41), то существует такая линейная однородная функция R , что $D_x^{N+2}\phi = R(\phi, D_x\phi, \dots, D_x^{N+1}\phi)$, где $\phi = \phi(N)$.

Для доказательства следствия продифференцируем по x равенство (39) и заменим в нем $\psi(0), \psi(1), \dots, \psi(N)$ на основании условия (42).

Теперь легко показать, что ряд Лапласа уравнения (23) конечен. Пусть $n = N$, тогда в силу краевого условия $e^{-u(-1)} = 0$, и ряд Лапласа этого уравнения обрывается справа, $w_{-1} = -h_N = 0$. В силу следствия леммы 2 и предложения 2 ряд обрывается и слева, $h_{-N-2} = 0$. Но тогда по формуле пересчета $h_j = -w_{N-j-1}$ находим $w_{2N+1} = 0$. Следовательно, $e^{-u(2N+2)} = 0$. Отсюда видно, что цепочка (32) есть редукция следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} e^{u(-1)} &= 0, \\ u_{xt}(j) &= e^{u(j-1)-u(j)} - e^{u(j)-u(j+1)}, \quad 0 \leq j \leq 2N+1, \\ e^{-u(2N+2)} &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Предложение 3 доказано. В завершение этого раздела подведем итог.

ТЕОРЕМА 1. Пусть всюду в области D выполняется условие $\det \beta(x, t) \neq 0$ (случай общего положения), тогда в этой области система уравнений (32), соответствующая алгебре Ли D_{N+1} , является редукцией системы (43), соответствующей алгебре A_{2N+1} .

5. ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ

Предположим, что условие (41) нарушается, причем $\det \beta(x, t) = 0$ для всех точек $(x, t) \in D$, где D – некоторая открытая область в $\mathbb{R}^2$. В этом случае благодаря почти треугольной структуре матрицы β ее последняя строка является линейной комбинацией остальных строк. Но тогда уравнение (39) является линейной комбинацией уравнений (36)–(38). Отсюда следует, что $D_x^{N+1}\phi$ линейно выражается через $\phi, \phi_x, \dots, D_x^N \phi$, где $\phi = \phi(N)$. Поэтому, в отличие от следствия леммы 2, имеем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $(N+1)$ -го порядка $D_x^{N+1}\phi = R_1(\phi, D_x\phi, \dots, D_x^N\phi)$. Снова воспользуемся предложением 2. В этом случае обращение инварианта Лапласа в нуль происходит на один шаг раньше: $h_{-N-1} = -w_{2N}$, поэтому цепочка (32) является редукцией системы

$$\begin{aligned} e^{u(-1)} &= 0, \\ u_{xt}(j) &= e^{u(j-1)-u(j)} - e^{u(j)-u(j+1)}, \quad 0 \leq j \leq 2N, \\ e^{-u(2N+1)} &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Итак, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть всюду в области D выполняется условие $\det \beta(x, t) = 0$, тогда в этой области система уравнений (32), соответствующая алгебре Ли D_{N+1} , является редукцией системы (44), соответствующей алгебре A_{2N} .

Следующий простой пример убеждает, что условие $\det \beta(x, t) \equiv 0$, указанное в теореме 2, может реализоваться.

ПРИМЕР 5. Возьмем систему (32) при $N = 1$. Для удобства введем обозначения $u(0) = u$, $u(1) = v$. Тогда система примет вид

$$\begin{aligned} u_{xt} &= -e^{u-v}, \\ v_{xt} &= e^{u-v} - e^{v-u(2)}, \\ e^{-u(2)} &= e^u - \frac{v_x v_t}{2 \operatorname{sh} v}. \end{aligned} \quad (45)$$

Линейные условия связи (36), (37) записываются как

$$\left(D_x + \frac{v_x}{2 \operatorname{sh} v} e^v \right) \phi(1) = \frac{v_x}{2 \operatorname{sh} v} \psi(1) + e^u \psi(0), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \left(D_x^2 + \frac{v_x}{2 \operatorname{sh} v} e^v D_x + \left(\frac{v_x}{2 \operatorname{sh} v} e^v \right)_x \right) \phi(1) &= \\ = \left(\frac{v_x}{2 \operatorname{sh} v} \right)_x \psi(1) + \left(\frac{-v_x}{2 \operatorname{sh} v} e^{u-v} + u_x e^u \right) \psi(0). \end{aligned} \quad (47)$$

В этом случае матрица β имеет размер 2×2 ,

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & e^u \\ (\beta_{11})_x & -\beta_{11} + u_x e^u \end{pmatrix},$$

где $\beta_{11} = v_x / (2 \operatorname{sh} v)$. Отсюда

$$\det \beta = -\frac{1}{2 \operatorname{sh} v} \left(v_{xx} - \frac{v_x^2 e^v}{2 \operatorname{sh} v} - u_x v_x \right).$$

Условие $\det \beta = 0$ задает дифференциальное уравнение

$$-\operatorname{sh} v \det \beta = D_x \left(u - \ln v_x + \frac{1}{2} \ln(e^{2v} - 1) \right) = 0. \quad (48)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Система уравнений (45) совместна с уравнениями

$$v_x = e^u (e^{2v} - 1)^{1/2}, \quad u_t = -e^{-v} (e^{2v} - 1)^{1/2}. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $p = \sqrt{e^{2v} - 1}$, тогда $pp_t = e^{2v} v_t$, а в силу второго из равенств (49) $p_x = e^{u+2v}$. Дифференцируя по t первое из равенств (49), получим $v_{xt} = -p^2 e^{u-v} + v_t e^{2v} / p$. При выполнении условий (49) из системы уравнений (45) следует, что $v_{xt} = e^{u-v} - e^{u+v} + v_t e^{u+v} p / (2 \operatorname{sh} v)$. Легко видеть, что выражения для v_{xt} тождественно совпадают. Аналогично из второго равенства (49) находим $u_{xt} = e^{-v} (v_x p - p_x) = e^{-v} (e^u p^2 - e^{u+2v})$. Очевидно, что последнее выражение совпадает с правой частью уравнения $u_{xt} = -e^{u-v}$. Отсюда следует, что система уравнений (45) совместна с условиями (49). Предложение доказано.

Доказанное предложение утверждает, что у системы (45) есть решение (u, v) , удовлетворяющее дополнительному условию (49). Но для этого решения определитель матрицы β равен нулю в силу формулы (48). Поскольку $e^{-u(3)} = 0$, то очевидно, что рассматриваемое решение системы (45) удовлетворяет также системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{xt} &= -e^{u-v}, \\ v_{xt} &= e^{u-v} - e^{v-u(2)}, \\ u_{xt}(2) &= e^{v-u(2)}, \end{aligned} \quad (50)$$

соответствующей алгебре A_2 . Условие редукции состоит из двух частей: равенства $e^{-u(2)} = e^u - v_x v_t / (2 \operatorname{sh} v)$ и условий связи (49). Любопытно, что из предложения 4 следует соотношение $D_x e^{-v} = D_t e^u$, имеющее вид краевого условия из примера 4, рассмотренного выше.

Отметим, что в случае общего положения, когда $\det \beta(x, t) \neq 0$, система (45) есть редукция обобщенной цепочки Тоды серии A_3 с четырьмя полевыми переменными

$$\begin{aligned} u_{xt} &= -e^{u-v}, \\ v_{xt} &= e^{u-v} - e^{v-u(2)}, \\ u_{xt}(2) &= e^{v-u(2)} - e^{u(2)-u(3)}, \\ u_{xt}(3) &= e^{u(2)-u(3)}, \end{aligned} \quad (51)$$

под действием связей $e^{-u(2)} = e^u - v_x v_t / (2 \operatorname{sh} v)$ и $e^{-u(3)} = e^{-u(2)} (e^{v-u(2)} - u_{xt}(2))$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если на цепочку Тоды налагается два интегрируемых условия обрыва, одно из которых вырожденное, т.е. либо вида $e^{u(-1)} = 0$ на левом конце, либо $e^{u(N)} = 0$ на правом конце, то полученная конечно-полевая цепочка, по-видимому, будет некоторой редукцией цепочки серии A . По крайней мере, это утверждение верно для всех краевых условий, построенных в разделе 2. Схема доказательства теорем 1, 2 пригодна для всех таких обрывов.

Рассмотрим пример цепочки неэкспоненциального типа. Оборвем цепочку Тоды, налагая слева вырожденное условие обрыва, а справа условие, приведенное в примере 4:

$$\begin{aligned} e^{u(-1)} &= 0, \\ u_{xt}(j) &= e^{u(j-1)-u(j)} - e^{u(j)-u(j+1)}, \quad 0 \leq j \leq 2N, \\ D_t e^{-u(N+1)} &= D_x e^{u(N)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Пара Лакса для этой цепочки имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(n+1) &= (D_x + u_x(n))\phi(n), \\ \phi_t(n) &= -e^{u(n-1)-u(n)}\phi(n-1), \quad 0 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \psi(n+1) &= (D_t + u_t(n))\psi(n), \\ \psi_x(n) &= -e^{u(n-1)-u(n)}\psi(n-1), \quad 0 \leq j \leq N+1, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\phi(N+1) = e^{u(N-1)}\psi(N-1) + e^{-u(N+1)}\psi(N+1) - (e^{u(N)})_x \psi(N), \quad (55)$$

$$\psi(N+2) = -e^{u(N)}\phi(N) + u_t(N+1)\psi(N+1) - e^{2u(N)}\psi(N). \quad (56)$$

Продолжим собственные функции ϕ , ψ и полевые переменные $u(n)$ вправо точно так же, как и в случае цепочки серии D . Ряд Лапласа уравнения

$$\phi_{xt}(N+1) + u_x(N+1)\phi_t(N+1) + w_N\phi(N+1) = 0$$

обрывается справа, так как в силу формулы $h_j = -w_{n-j-1}$, верной для уравнения с номером n , имеем $h_{N+1} = -w_{-1} = 0$. Поэтому в силу предложения 2 функция $\phi = \phi(N+1)$ удовлетворяет уравнению

$$D_t^{N+2}\phi = q(\phi, \phi_t, \dots, D_t^{N+1}\phi). \quad (57)$$

Перепишем краевое условие (55) так, чтобы справа входили функции $\psi(N-1)$, $\psi_t(N-1)$ и $\psi_{tt}(N-1)$, а не функции $\psi(N)$ и $\psi(N+1)$:

$$\begin{aligned} \phi &= e^{-u(N+1)}[D_t + u_t(N)][D_t + u_t(N-1)]\psi(N-1) - \\ &\quad - (e^{u(N)})_x[D_t + u_t(N-1)]\psi(N-1) + e^{u(N-1)}\psi(N-1) = \\ &= e^{-u(N+1)}\psi_{tt}(N-1) + \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что для непрерывного решения системы (52) коэффициент при $\psi_{tt}(N-1)$ отличен от нуля. Поэтому можно подставить полученное выражение в формулу (57) и найти

$$D_t^{N+4}\psi(N-1) = q_1(\psi(N-1), \psi_t(N-1), \dots, D_t^{N+3}\psi(N-1)).$$

Отсюда в силу предложения 2 сразу же следует, что инвариант h_{N+3} уравнения (24) с номером $n = N-1$ обращается в нуль. Учитывая, что $h_j = -w_{n+j}$, отсюда находим, что $w_{2N+2} = -h_{N+3} = 0$. Напомним, что $w_{2N+2} = e^{u(2N+2)-u(2N+3)}$, следовательно, $e^{-u(2N+3)} = 0$. Другими словами, система уравнений (52) является редукцией цепочки A_{2N+2} .

Благодарности. Автор благодарит А. В. Жибера, С. П. Царева и И. Ю. Черданцева за полезные обсуждения. Работа была поддержана РФФИ (гранты № 04-01-00190 и № 05-01-97910-р-агидель-а).

Список литературы

- [1] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Препринт. Уфа: Башкирский филиал АН СССР, 1981.
- [2] М. А. Olshanetsky, А. М. Perelomov. Phys. Rep. 1981. V. 71. № 5. P. 313–400.
- [3] А. Н. Лезнов, М. В. Савельев. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
- [4] С. П. Царев. ТМФ. 2000. Т. 122. № 1. С. 144–160.
- [5] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. V. 2. Paris: Gautier-Villars, 1915.
- [6] Е. К. Склянин. Функциональный анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 2. С. 86–87.
- [7] I. T. Habibullin. Phys. Lett. A. 1993. V. 178. P. 369–375.
- [8] I. M. Anderson, N. Kamran. Duke Math. J. 1997. V. 87. № 2. P. 265–319.
- [9] А. В. Жибер, В. В. Соколов. УМН. 2001. Т. 56. № 1(337). С. 63–106.
- [10] И. Т. Хабибуллин, Е. В. Гудкова. Функциональный анализ и его прилож. 2004. Т. 38. № 2. С. 71–83; Е. В. Гудкова, И. Т. Хабибуллин. ТМФ. 2004. Т. 140. № 2. С. 230–240.
- [11] E. Goursat. Amer. J. Math. 1896. V. 18. P. 347–385.

Поступила в редакцию 20.V.2004 г.