Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Малахов, К. А. Свешников, П. К. Силаев, Безвычитательная перенормировка вакуумной энергии квантованного поля при наличии нетривиальных граничных условий, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 1, 49–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:28:29

© 2005 г. И. Ю. Малахов*, К. А. Свешников*, П. К. Силаев*

БЕЗВЫЧИТАТЕЛЬНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА ВАКУУМНОЙ ЭНЕРГИИ КВАНТОВАННОГО ПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Предложен метод вычисления вакуумной энергии квантованного поля при наличии нетривиальных граничных условий и обусловленных ими логарифмически расходящихся членов, не использующий вычислительную процедуру. Метод может быть применен и в том случае, когда энергетические уровни системы известны только численно; более того, при этом не требуется ни знания аналитического вида уравнения для определения уровней, ни детального анализа их асимптотического поведения.

Ключевые слова: перенормировка, вакуум, нулевые колебания, макроскопические квантовые эффекты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Еще в 1948 г. Казимир [1] рассмотрел эффект зависимости энергии макроскопической системы от граничных условий, обусловленный вакуумными флуктуациями квантованного электромагнитного поля. С тех пор эффект Казимира интенсивно исследовался как теоретически, так и экспериментально (в качестве достаточно подробного обзора см. работу [2]). Между тем вычисление вакуумной энергии квазисвободного квантованного поля при наличии нетривиальных граничных условий (далее – энергии Казимира) за исключением простейших случаев свободных полей, заключенных в полостях с плоской границей, представляет собой весьма серьезную проблему. Основные причины состоят в следующем. При наличии нетривиальных граничных условий большие (зачастую непреодолимые) трудности создает уже достаточно явное вычисление в аналитическом виде энергетического спектра системы и анализ его УФ-асимптотики. Кроме того, появляются логарифмические расходимости, которые приводят к неоднозначностям в процедуре вычислительной перенормировки.

Так, свободному полю в шаре, т.е. системе, в которой можно выписать явные трансцендентные уравнения для спектра, было посвящено достаточно большое количество

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: costa@bog.msu.ru; silaev@goa.bog.msu.ru

работ: было исследовано электромагнитное поле внутри проводящей сферы [3]; рассматривались фермионы, запертые внутри сферы с помощью механизма, принятого в моделях кварковых мешков [4]–[6]; были исследованы эффекты, возникающие из-за ненулевой массы фермионов [7]. Тем не менее первые аналитические результаты для энергии Казимира в достаточно замкнутой форме были получены лишь в работе [8] для массивного скалярного поля и в работе [9] – для фермионов. Следует подчеркнуть, что эти результаты существенным образом опираются на возможность выписать явное трансцендентное уравнение для спектра – при наличии явных трансцендентных уравнений для уровней становится возможен переход от сумм, содержащих неявные выражения, к интегралам, которые содержат только явные выражения [10].

Целью настоящей работы является формулировка метода, который позволил бы находить энергию Казимира при наличии логарифмических расходимостей для задач, в которых не только отсутствуют аналитические выражения для энергетических уровней и их УФ-асимптотики, но даже не представляется возможным выписать явные трансцендентные уравнения для этих уровней.

Подчеркнем, что при таких условиях невозможно воспользоваться известным приемом [5], который позволяет обойти трудности, связанные с наличием логарифмической расходимости в энергии Казимира свободных безмассовых полей в сферической полости. Логарифмическая расходимость возникает в этом случае как следствие кривизны поверхности, ограничивающей полость, и приводит к неоднозначности в процедуре вычитательной перенормировки. Появление неоднозначностей в вычитательной процедуре при наличии логарифмической расходимости вполне очевидно. Действительно, для безмассовых полей энергия определяется единственным размерным параметром L – характерным линейным размером. Второй размерный параметр задачи – параметр регуляризации α , который мы тоже выберем имеющим размерность длины. Поэтому в отсутствие логарифмической расходимости “минимальное вычитание”, состоящее в отбрасывании в выражении для энергии сингулярных по α членов, является не только естественной, но и достаточно хорошо обоснованной процедурой (если опустить вопрос об однозначности способа выделения сингулярной части): из очевидных размерных соображений любое слагаемое, пропорциональное α^{-s} ($s > 0$) будет зависеть от L как L^{s-1} , т.е. будет пропорционально неотрицательной степени L . Тем самым мы можем использовать $L = \infty$ в качестве точки нормировки, в которой энергия Казимира должна обращаться в нуль, и вычесть все сингулярные слагаемые. После вычитания в пределе $\alpha \rightarrow 0$ останется только слагаемое $c\alpha^0/L$ (с правильной зависимостью от L), которое и составляет окончательный ответ.

При наличии логарифмической расходимости вычитание становится неоднозначным: для перенормировки слагаемого $c\alpha^0 \ln(\alpha/L)/L$ из него следует вычесть $c\alpha^0 \ln(d\alpha/L)/L$, где d – произвольная константа. В результате окончательный ответ будет содержать неопределенность, связанную с d . Нормировка окончательного ответа при $L \rightarrow \infty$ в данном случае невозможна, поскольку неопределенность имеет вид const/L , т.е. неопределенность возникает как раз в той константе, которую нам необходимо найти. Конкретный пример такого рода детально рассмотрен в работах [11] в контексте киральных

моделей мешков в $(1+1)D$.

Упомянутый выше прием [2], [5] позволяет в ряде случаев (более конкретно — для свободных полей в сферической полости) обойти эту проблему: к “внутренней” энергии Казимира добавляют энергию Казимира во внешней области. Эта энергия содержит такую же логарифмическую расходимость, как и для внутренней области, но с противоположным знаком. Тем самым проблемы с неоднозначностью вычитательной процедуры и нормировкой окончательного ответа снимаются. Однако теперь речь идет уже о вычислении энергии вакуума существенно модифицированной по сравнению с исходной постановкой задачи, когда поля существуют как во внутренней, так и во внешней областях.

В настоящей работе будет рассмотрена процедура, которая позволит с помощью физически обоснованных аргументов последовательным образом выделить конечную часть непосредственно в выражении для вакуумной энергии поля для внутренней (или внешней) задачи.

2. МАССИВНОЕ ОДНОМЕРНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Проиллюстрируем основную идею метода на простейшем примере энергии Казимира с логарифмической расходимостью — рассмотрим энергию основного состояния массивного скалярного поля, заданного на отрезке длины L с нулевыми граничными условиями на концах интервала. Исходное выражение для энергии Казимира в этом случае имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + m^2}. \quad (1)$$

Стандартный подход к перенормировке этого выражения состоит в том, что при соответствующей регуляризации расходящихся выражений из суммы (1) вычитается энергия, приходящаяся на отрезок той же длины L у поля, существующего на всей числовой прямой [1], [2], [12]. Однако, как уже упоминалось выше, при наличии логарифмических расходимостей любое вычитание не является полностью однозначной процедурой. Кроме того, в таком подходе неявно предполагается возможность использования для вычисления энергии в качестве реперной такой конфигурации, когда поле может существовать и вне отрезка. Как следствие, в этом подходе фактически вычисляется разность энергий двух различных систем — поля на отрезке и свободного поля, т.е. величина, физический смысл которой и взаимосвязь с граничными условиями на отрезке по меньшей мере не очевидны.

В рассматриваемом подходе мы будем работать только с суммой (1) и производить ее перенормировку в рамках безвычитательной процедуры, используя таким образом только свойства данной конкретной конфигурации поля. Первый этап такой процедуры состоит в регуляризации суммы (1) с помощью обрезающей функции $F(\alpha\omega_n)$, в результате чего вместо (1) получаем сходящееся выражение

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n F(\alpha\omega_n). \quad (2)$$

При этом α – параметр обрезания размерности длины, зависимость от которого предполагается такой, что $F(\alpha\omega_n) \rightarrow 1$ для произвольного фиксированного ω_n , если $\alpha \rightarrow 0$.

Используя далее разложение $\sqrt{(\pi n/L)^2 + m^2}$ при $n \gg 1$, для регуляризованной суммы (2) получим представление

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)} = c_2 \frac{L^1}{\alpha^2} + c_1 \frac{L^0}{\alpha^1} + c_\lambda m^2 L \ln\left(\frac{L}{\alpha}\right) + \frac{c_0}{\alpha^0 L} + \text{исчезающие при } \alpha \rightarrow 0 \text{ слагаемые.} \quad (3)$$

Легко видеть, что коэффициент c_λ при логарифмической расходимости в (3) не зависит от конкретного поведения обрезавшей функции $F(x)$ внутри интервала обрезания, а имеет фиксированное значение

$$c_\lambda = \frac{1}{4\pi}. \quad (4)$$

Для этого заметим, что $F(x)$ по своему смыслу является функцией, приблизительно постоянной и равной единице в окрестности нуля и практически равной нулю вне пределов интервала обрезания $|x| > \Delta x$. Тогда индекс N , на котором происходит эффективное обрезание бесконечной суммы в выражении (2), зависит от параметра α как

$$N \sim \Delta x \frac{L}{\alpha}. \quad (5)$$

При этом коэффициент пропорциональности k между N и $\Delta x L/\alpha$ в (5) всегда будет $O(1)$, но для различных $F(x)$ при одном и том же интервале обрезания Δx его точное значение будет различным, так как он определяется не только величиной интервала обрезания, но и эффективной полушириной обрезавшей функции на этом интервале. Для логарифмического члена в представлении (3) последнее обстоятельство, однако, оказывается несущественным, так как он порождается суммой

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{m^2}{\omega_n} F(\alpha\omega_n) \sim \frac{m^2 L}{4\pi} \ln N = \frac{m^2 L}{4\pi} \ln\left(\frac{L}{\alpha}\right) + \frac{m^2 L}{4\pi} \ln(k\Delta x), \quad (6)$$

и в силу логарифмического характера результата суммирования оказывается, что коэффициент при $m^2 L \ln(L/\alpha)$ в представлении (3) не зависит ни от k , ни от Δx , а принимает фиксированное значение (4). В то же время коэффициенты $c_{1,2}$ в выражении (3) существенно зависят от конкретного поведения обрезавшей функции $F(x)$ внутри интервала обрезания Δx , так как отделение $k\Delta x$ от L/α возможно только в логарифмическом члене (6). При этом, так же как и коэффициент c_λ при логарифмической расходимости (4), коэффициенты $c_{1,2}$ не зависят от массы поля m , так как соответствуют безмассовому пределу модели.

В свою очередь, коэффициент c_0 при члене нулевого порядка по α в представлении (3) является на самом деле безразмерной функцией mL :

$$c_0 = f(mL), \quad (7)$$

с нетривиальной зависимостью между $f(x)$ и $F(x)$. В частности, c_0 с очевидностью содержит слагаемое $(mL)^2 \ln(k\Delta x)/(4\pi)$, явно зависящее от свойств обрезающей функции, а в безмассовом пределе $m \rightarrow 0$ принимает хорошо известное значение $c_0 = -\pi/24$ [2], [12].

При наличии логарифмической расходимости в регуляризованном выражении для вакуумной энергии (3) любое вычитание будет приводить к неопределенности, следовательно, следует попытаться избавиться от процедуры вычитания. Безвычитательный способ перенормировки $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ состоит в следующем. Будем вычислять не $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$, а $\partial_L^2 \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$:

$$\partial_L^2 \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)} \simeq \frac{m^2}{4\pi L} + c_0 \frac{2}{L^3} + \dots \quad (8)$$

Это выражение является регулярным по α и не нуждается ни в каких вычитаниях. Необходимо отметить, что истинная асимптотика $\partial_L^2 \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ при $L \rightarrow \infty$ вовсе не определяется выражением (8); это выражение описывает исключительно исчезновение сингулярных по α слагаемых в результате дифференцирования. В любом случае, однако, $\partial_L^2 \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$, как и все следующие производные $\partial_L^n \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$, $n > 2$, будет достаточно быстро убывать при $L \rightarrow \infty$, что легко показать следующим способом. Заметим, что при $L \rightarrow \infty$ сумма (2) может быть аппроксимирована интегралом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n F(\alpha \omega_n) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n F(\alpha \omega_n) - \frac{m}{4} F(\alpha m) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{L}{\pi} \sqrt{x^2 + m^2} F(\alpha \sqrt{x^2 + m^2}) - \frac{m}{4} F(\alpha m). \end{aligned} \quad (9)$$

Так как в обоих пределах интегрирования подинтегральная функция исчезает вместе со всеми производными, то известных проблем [13] с оценкой остаточных краевых слагаемых при переходе от суммы к интегралу в (9) не возникает. Очевидно, что полученное выражение обращается в нуль при двукратном дифференцировании по L .

Следует также подчеркнуть, что процедуры снятия регуляризации $\alpha \rightarrow 0$ и дифференцирования ∂_L^2 не коммутируют – при дифференцировании нерегуляризованной суммы (1) мы не получим конечного ответа.

В результате становится содержательной следующая цепочка рассуждений. Истинная (регуляризованная) вакуумная энергия поля $E_{\text{Cas}}^{(r)}$ должна быть регулярной по α величиной, однозначно определяемой из соответствующей компоненты $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$. Собственно проблема последовательного вычисления $E_{\text{Cas}}^{(r)}$ состоит в том, что само по себе разделение $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ на сингулярную и регулярную по α составляющие является существенно неоднозначным, и для определения правильного способа разбиения требуются дополнительные физические соображения. Сама же искомая энергия Казимира поля E_{Cas} представляет собой предел $E_{\text{Cas}}^{(r)}$ при $\alpha \rightarrow 0$:

$$E_{\text{Cas}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} E_{\text{Cas}}^{(r)} = \frac{f_0(mL)}{L}, \quad (10)$$

где $f_0(mL)$ в общем случае не будет совпадать с функцией (7), так как последняя существенно зависит от вида обрезающей функции $F(x)$.

Дополнительные физические соображения, необходимые для определения вакуумной энергии, состоят в следующем. Сначала заметим, что как для E_{Cas} , так и для $E_{\text{Cas}}^{(r)}$ при любой разумной обрезающей функции мы имеем хорошо обусловленную точку нормировки при $L = \infty$. А именно, как $E_{\text{Cas}}^{(r)}$, так и $\partial_L E_{\text{Cas}}^{(r)}$ должны исчезать при $L \rightarrow \infty$. Далее, $\partial_L^2 \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ как вторая производная по размеру L от вакуумной энергии является однозначной величиной в том смысле, что не зависит от способа разбиения исходной $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ на сингулярную и регулярную части. Тогда из-за однозначности и регулярности по α будет иметь место следующее соотношение:

$$\partial_L^2 E_{\text{Cas}}^{(r)} = \partial_L^2 \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}. \quad (11)$$

Следует отметить, что в отличие от соотношения (11) для вторых производных на уровне первых производных установить связь между $\partial_L E_{\text{Cas}}^{(r)}$ и регулярной по α составляющей в $\partial_L \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ без явного вычисления $E_{\text{Cas}}^{(r)}$ и $\partial_L E_{\text{Cas}}^{(r)}$ невозможно, так как при выделении из $\partial_L \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ регулярной величины с неизбежностью возникнет уже упомянутая выше проблема неоднозначности такой процедуры. Однако на данном этапе в использовании соотношения между $\partial_L E_{\text{Cas}}^{(r)}$ и $\partial_L \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ нет никакой необходимости, так как сформулированных выше условий уже достаточно для однозначного определения $E_{\text{Cas}}^{(r)}$.

Действительно, используя соотношение (11), мы из исходного выражения (2) для $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ находим $\partial_L^2 E_{\text{Cas}}^{(r)}$ как функцию L для всех значений L от $L = \infty$ до интересующего нас размера системы. Располагая значениями $\partial_L^2 E_{\text{Cas}}^{(r)}(L)$ на этом интервале, можно с легкостью восстановить и саму $E_{\text{Cas}}^{(r)}$ как функцию L , поскольку для последней начальные условия при $L \rightarrow \infty$ известны. Подчеркнем, что эти начальные условия не следуют из соотношения (10), так как f_0 в общем случае есть нетривиальная функция от mL , а выводятся из дополнительных соображений на физическом уровне строгости: поскольку смысл имеют только регуляризованные конечные выражения для вакуумной энергии типа (2), то предел $L \rightarrow \infty$ эквивалентен пределу $m \rightarrow \infty$, когда все степени свободы поля, включая вакуумные флуктуации, будут заморожены. Вакуумная энергия поля в этом случае должна быть тождественно равна нулю.

3. БЕЗВЫЧИТАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Формализуем теперь изложенную процедуру таким образом, чтобы она не опиралась на явное аналитическое выражение для спектра. Итак, мы располагаем некоторым спектром ω_n , энергия Казимира для которого содержит логарифмическую расходимость. Прежде всего найдем такой параметр μ , что сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\omega_n^2 - \mu^2} F(\alpha \sqrt{\omega_n^2 - \mu^2}) \quad (12)$$

не будет содержать логарифмической расходимости при $\alpha \rightarrow 0$. Для массивного одномерного поля μ с очевидностью будет совпадать с массой поля m . В более нетривиальном случае, например, для скалярного поля в сферической полости, это будет некоторый параметр с размерностью массы, характеризующий итоговый (суммарный по всем угловым моментам) коэффициент при логарифмической расходимости.

Далее мы “добавляем” к полю массу $\mathcal{M}$, для чего изменяем исходные уровни ω_n следующим образом:

$$\omega_n \rightarrow \sqrt{\omega_n^2 + \mathcal{M}^2}, \quad (13)$$

и исследуем зависимость энергии Казимира от этой добавленной массы в диапазоне от $\mathcal{M} = 0$ до $\mathcal{M} = \infty$. Удобно ввести параметр M такой, что

$$M^2 \equiv \mathcal{M}^2 + \mu^2,$$

и рассматривать зависимость энергии Казимира от M

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}}(M) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\omega_n^2 + M^2 - \mu^2} \quad (14)$$

в диапазоне от $M = \mu$ до $M = \infty$. Для этого находим (численно, поскольку по условию аналитические выражения для энергетических уровней ω_n отсутствуют) для всех $M \in [\mu, \infty]$ величину

$$\partial_M^2 \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}(M)}{M} \right) = \partial_M^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2} + 1} F \left(\alpha \sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2} + 1} \right) \right]. \quad (15)$$

Здесь в отличие от предыдущего случая в аргумент функции $F(x)$ подставлена безразмерная величина

$$\frac{1}{M} \sqrt{\omega_n^2 + M^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2} + 1}, \quad (16)$$

так что α также безразмерно. Заметим также, что можно было бы и не делить выражение (14) для вакуумной энергии на M , но тогда количество дифференцирований пришлось бы увеличивать на единицу, что крайне нежелательно с вычислительной точки зрения.

Легко видеть, что после перехода к таким безразмерным спектральным переменным масса M играет роль эффективного размера системы. Действительно, уравнения (13)–(16) можно интерпретировать как следующее преобразование спектра: сначала мы “вычитаем” из спектра “эффективную массу” μ и обезразмериваем спектр, разделив его на μ : $\omega_n \rightarrow \omega'_n = \sqrt{\omega_n^2 - \mu^2}/\mu$. Затем проводим масштабное преобразование с параметром M/μ : $x \rightarrow x'(M/\mu)$, $\omega'_n \rightarrow \omega''_n = \omega'_n/(M/\mu)$. К полученному (безразмерному) спектру “добавляем” единичную массу:

$$\omega''_n \rightarrow \sqrt{(\omega''_n)^2 + 1} = \sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2} + 1}, \quad (17)$$

и в результате в качестве энергетической переменной получаем безразмерную величину (16). Очевидно, что в результате таких замен зависимость от параметра масштабного преобразования M/μ будет такова, что предел $M \rightarrow \infty$ соответствует стремлению размеров системы к бесконечности, а при $M = \mu$ мы получаем исходный спектр, деленный на μ .

Заметим теперь, что выражение в правой части соотношения (15) построено таким образом, что все расходящиеся члены исчезают при дифференцировании. Действительно, при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2}} + 1 = \frac{\sqrt{\omega_n^2 - \mu^2}}{M} + \frac{M}{2\sqrt{\omega_n^2 - \mu^2}} + \dots \quad (18)$$

Легко видеть, что первое слагаемое в (18) дает в $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}(M)/M$ вклад, логарифмическая расходимость в котором отсутствует согласно определению μ через условие (12), а остальные расходимости пропорциональны $(M/\alpha)^2/M$ и $(M/\alpha)^1/M$ и исчезают при двукратном дифференцировании. Второе слагаемое в (18) также порождает логарифмическую расходимость, но коэффициент при ней пропорционален M^1 , так что она аналогичным образом исчезает при двукратном дифференцировании.

Таким образом, правая часть в (15) будет определять регулярную при $\alpha \rightarrow 0$ величину. Далее следует повторить цепочку рассуждений из предыдущего раздела, с помощью которых мы переходим от расходящейся при снятии регуляризации величины $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$ к конечной вакуумной энергии поля $E_{\text{Cas}}^{(r)}$. В частности, будет иметь место аналог соотношения (11), которое теперь в терминах безразмерного спектра (17) и новой масштабной переменной M вместо L запишется в виде

$$\partial_M^2 \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}(M)}{M} \right) = \partial_M^2 \left(\frac{E_{\text{Cas}}^{(r)}(M)}{M} \right), \quad (19)$$

а также будет сохраняться естественная точка нормировки для $E_{\text{Cas}}^{(r)}(M)$, а именно

$$E_{\text{Cas}}^{(r)}(M \rightarrow \infty) = \partial_M E_{\text{Cas}}^{(r)}(M \rightarrow \infty) = 0. \quad (20)$$

Последнее условие может быть теперь мотивировано двумя способами. С одной стороны, как уже говорилось выше, поле с бесконечной массой (которая добавляется к полю через подстановку (13)) должно иметь нулевую энергию Казимира. С другой стороны, рассматривая соотношения (15)–(17) как масштабное преобразование, предел $M \rightarrow \infty$ можно трактовать как неограниченное увеличение размеров системы. Но при растяжении системы до бесконечных размеров энергия Казимира также должна стремиться к нулю. Таким образом, вычислив из соотношений (15) и (19) значения $\partial_M^2 (E_{\text{Cas}}^{(r)}(M)/M)$ для всех M в диапазоне от μ до ∞ и используя граничные условия (20), мы можем восстановить искомое $E_{\text{Cas}}(M = \mu)$, соответствующее исходному спектру.

Изложенный метод, использующий вторую производную по размеру системы, вполне эффективно работает в случае одномерного массивного скалярного поля. Более того,

он применим для любого типичного одномерного спектра вне зависимости от наложенных граничных условий и конкретного вида потенциала (или эффективного потенциала), которые порождают этот спектр. Для применения рассмотренного метода достаточно, чтобы расхожимости порождались суммированием слагаемых, пропорциональных n^1 , n^0 и n^{-1} , а спектр большинства физически значимых полевых моделей в $(1+1)D$ удовлетворяет этому требованию вне зависимости от наложенных граничных условий.

Чтобы этот метод оказался эффективным и в трехмерном случае, количество дифференцирований следует увеличить на два. Действительно, в трехмерном случае основной сингулярный член будет пропорционален объему и, следовательно, иметь вид $c_4 L^3 / \alpha^4$. Чтобы от него избавиться, необходимо взять четвертую производную ∂_L^4 . Логарифмический по α член при таком количестве дифференцирований также заведомо исчезнет. Собственно, преобразование спектра (12)–(14) построено как раз таким образом, чтобы коэффициент при логарифмической расхожимости содержал только положительные степени M . Отрицательная степень M^{-1} умножается на сумму $\sqrt{\omega_n^2 - \mu^2}$, которая не содержит логарифмической расхожимости согласно определению μ через условие (12).

Основным (впрочем, чисто техническим) недостатком изложенного метода является необходимость проводить вычисления с повышенным количеством верных знаков: точности стандартной double-арифметики в данном случае не хватает. Численные расчеты проводились на 50-значной арифметике, реализованной на int-массивах, что, разумеется, существенно замедляет вычисления, но не делает их бесконечно долгими.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Сначала приведем результаты применения изложенной выше схемы безвычитательной перенормировки энергии Казимира для рассмотренного выше случая одномерного массивного скалярного поля на отрезке длиной L с нулевыми граничными условиями. Численные расчеты проводились для $m = \mu = 1$. На рис. 1, 2 показаны соответственно вторая производная $\partial_L^2 E_{\text{Cas}}$ и сама вакуумная энергия поля E_{Cas} как функции логарифма длины отрезка $\ln L$.

Приведенные данные получены с помощью регуляризирующих функций $F(x) = e^{-x}$, $F(x) = e^{-x^2}$, $F(x) = e^{-x^3}$, $\dots$, $F(x) = e^{-x^6}$, $F(x) = e^{-2 \operatorname{ch}(x)+2}$. Для всех функций результаты совпадают с явно избыточной для наших целей точностью – 8 знаков. Диапазон значений регуляризирующего параметра α , по которому проводилось фитирование в точку $\alpha = 0$, соответствовал верхнему пределу суммирования около 5000 уровней для первой из функций ($F(x) = e^{-x}$) и около 2500 уровней для остальных функций. При этом наилучшая точность (минимальная погрешность фитирования) достигалась для функции $F(x) = e^{-x^6}$.

Как и следовало ожидать, вторая производная энергии гораздо быстрее выходит на безмассовый предел $\partial_L^2 2E_0 = -\pi/(6L^3) \approx -0.52359878/L^3$ при $L \rightarrow 0$, чем сама энергия выходит на свой безмассовый предел $2E_0 = -\pi/(12L) \approx -0.26179939/L$.

В то же время даже для данной задачи попытка непосредственного вычисления энергии Казимира посредством численного фитирования разложения (3) регуляризованной

Рис. 1

Рис. 2

суммы (2) по степеням α приводит к неоднозначности. Именно, найденный таким путем коэффициент c_0 для конечного члена явно зависит от вида обрезающей функции, что непосредственно вытекает из табл. 1.

Точность приведенных результатов легко оценить по совпадению $2c_\lambda$ с аналитическим ответом (4):

$$2c_\lambda = \frac{1}{2\pi} = 0.1591549\dots \quad (21)$$

Из табл. 1 также следует, что неоднозначность результатов фитирования зависит от L . Последнее обстоятельство непосредственно вытекает из представления (3) для $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(\text{r})}$: чем меньше L , тем меньше “доля” логарифмического члена в сумме, и, следовательно, тем меньше неоднозначность окончательного ответа. Также легко видеть, что при использовании в качестве обрезающей функции $F(x) = e^{-x}$ сходимость наихудшая.

Для безмассового скалярного поля в шаре единичного радиуса $R = 1$ получаем результаты, приведенные в табл. 2.

ТАБЛИЦА 1. Коэффициенты c_0 и c_λ при конечном и логарифмическом членах в $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$, полученные с помощью численного фитирования для различных обрезающих функций

$F(x)$	$L = 0.01$		$L = 0.1$		$L = 1.0$	
	$2c_0$	$2c_\lambda$	$2c_0$	$2c_\lambda$	$2c_0$	$2c_\lambda$
e^{-x}	-25.1833	0.1590462	-1.653	0.1591543	0.391	0.1591993
e^{-x^2}	-25.1792	0.1591549	-1.613	0.1591549	0.804	0.1591541
e^{-x^3}	-25.1779	0.1591549	-1.598	0.1591549	0.930	0.1591549
e^{-x^4}	-25.1774	0.1591549	-1.592	0.1591549	0.985	0.1591549
e^{-x^5}	-25.1770	0.1591549	-1.588	0.1591549	1.02	0.1591549
e^{-x^6}	-25.1767	0.1591549	-1.585	0.1591549	1.05	0.1591549
$e^{-2 \operatorname{ch}(x)+2}$	-25.1781	0.1591549	-1.600	0.1591549	0.909	0.1591547

ТАБЛИЦА 2. Значения величины $2E_{\text{Cas}}/\mu$ для безмассового ($m = 0$) скалярного поля в шаре радиуса $R = 1$

$F(x)$	μ^2	μ	$2E_{\text{Cas}}/\mu$
e^{-x^3}	0.01895799	0.1376880	0.0550299
e^{-x^5}	0.01895777	0.1376872	0.0550527
e^{-x^7}	0.01895777	0.1376872	0.0550531
$e^{-2 \operatorname{ch}(x)+2}$	0.01895774	0.1376871	0.0550455

При этом найденные значения четвертой производной для разных $F(x)$ совпадают с точностью до четырех первых знаков, причем наибольшее отклонение дает $F(x) = e^{-x^3}$. Соответственно точность в определении $E_{\text{Cas}} = 3.790 \cdot 10^{-3}$ также можно оценить как 4 верных знака. Такая сравнительно невысокая точность обусловлена тем, что диапазон использованных значений регуляризирующего параметра α соответствовал приблизительно 200 s -уровням и максимальному значению орбитального момента l

порядка 600, соответственно. (В данном диапазоне энергий энергетические уровни $\omega_{n,l}$ в среднем почти линейно зависят как от радиального квантового числа n , так и от орбитального момента l . При этом отношение скоростей роста $\omega_{n,l}$ по n и l можно оценить как 3 : 1, так что $\omega_{n=200,l=0} \approx \omega_{n=0,l=600}$.)

Заметим, что в ходе вычислений мы нашли не только энергию Казимира в безмассовом случае $m = 0$, но и энергию Казимира для всех возможных масс поля $\mathcal{M}$ (добавленных к полю через соотношение (13)) в диапазоне от нуля до “эффективной” бесконечности.

Рис. 3

Результаты вычислений, приведенные на рис. 3, свидетельствуют, что при рассматриваемом способе перенормировки ответ не содержит инфракрасной особенности при $\mathcal{M} \rightarrow 0$ в отличие от выводов, сделанных в работах [2], [8]. С точки зрения общей теории для полей, локализованных в конечном объеме, появление инфракрасных особенностей при $\mathcal{M} \rightarrow 0$ вообще выглядит достаточно экзотически. На самом деле появление таких особенностей в работах [2], [8] связано с тем несколько завуалированным обстоятельством, что даже при наличии “естественной” точки нормировки $\mathcal{M} = \infty$ в стандартной вычислительной процедуре все же сохраняется определенный произвол в виде возможности добавления к окончательному ответу функции, которая, с одной стороны, достаточно быстро убывает при $\mathcal{M} \rightarrow \infty$, а с другой стороны, вполне может иметь при $\mathcal{M} \rightarrow 0$ логарифмическую особенность. В то же время использованная нами процедура перенормировки никаких вычитаний и, следовательно, никаких неоднозначностей не со-

держит – при дифференцировании исключаются только положительные степени M , которые заведомо должны отсутствовать в окончательном ответе для вакуумной энергии поля. При этом во всем диапазоне изменения M (от μ до ∞) значения соответствующей (четвертой) производной всегда конечны, и при $M \rightarrow \infty$ она убывает быстрее, чем M^{-5} (хотя и медленнее, чем экспонента, на что было впервые указано в работе [8]), так что при $M = \mu$, т.е. при $M = 0$, мы получаем конечный ответ.

Следует, однако, подчеркнуть, что предложенный безвычитательный метод перенормировки, хотя в нем и нет связанного с вычитаниями произвола, все же является лишь одним из возможных способов выделения конечной части из исходного расходящегося выражения для вакуумной энергии поля. Действительно, вернемся еще раз к одномерной задаче и рассмотрим следующую регуляризацию исходной суммы (1) в терминах безразмерных величин (15), (16):

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}(M)}{M} \rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\text{Cas}}^{(r)}(M)}{M} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2} + 1} \tilde{F}(\alpha, \omega_n). \quad (22)$$

По сравнению с выражением (2) в модифицированное выражение для регуляризованной энергии (22) подставлена новая обрезающая функция

$$\tilde{F}(\alpha, \omega_n) = F\left(\alpha \sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2} + 1}\right) \left(1 + \frac{\alpha^2 f(M)}{C_F}\right), \quad (23)$$

где $f(M)$ – некоторая достаточно гладкая функция, убывающая на бесконечности быстрее $1/M$, а C_F – некоторая константа, которую мы будем выбирать в зависимости от исходной обрезающей функции F . Чисто формально у нас нет никаких оснований для того, чтобы запретить такой способ регуляризации. Действительно, при $\alpha \rightarrow 0$ дополнительный множитель в обрезающей функции (23) обращается в единицу, так что $\tilde{F} \rightarrow 1$ и регуляризация снимается. Более того, фактически наличие дополнительного множителя у $\tilde{F}(\alpha, \omega_n)$ никак на ее регуляризующих свойствах по сравнению с исходной $F(\alpha \omega_n)$ не сказывается, поскольку как интервал обрезания, так и эффективная полуширина остаются прежними.

Очевидно, что такое изменение регуляризации приведет к появлению дополнительного слагаемого $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(\text{add})}(M)$ в выражении для вакуумной энергии, которое порождается функцией $f(M)$:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{Cas}}^{(r)}(M) = \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}(M) + \mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(\text{add})}(M). \quad (24)$$

Легко проверить, что единственным не исчезающим при $\alpha \rightarrow 0$ вкладом в $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{Cas}}^{(r)}(M)/M$ от этого дополнительного слагаемого в функции (24) будет $D_F f(M)/C_F$, где $D_F \equiv c_2$ – коэффициент при лидирующей сингулярности $1/\alpha^2$ в неперенормированной энергии Казимира $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(r)}$, однозначно определяемый из асимптотического разложения (3). Поскольку c_2 зависит от конкретного вида функции F , то в общем случае это дополнительное слагаемое $D_F f(M)/C_F$ также зависит от конкретного вида функции F , т.е. такая регуляризация будет давать неоднозначные ответы, зависящие от F . Однако в данном случае однозначность легко восстановить, если по определению полагать $C_F \equiv D_F$. Тогда

единственным не исчезающим при $\alpha \rightarrow 0$ вкладом от $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(\text{add})}(M)$ в $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{Cas}}^{(r)}(M)/M$ будет непосредственно $f(M)$.

Проведем теперь нашу процедуру перенормировки, которая заключается в том, что мы вычисляем выражение $\partial_M^2(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{Cas}}^{(r)}(M)/M)$ как функцию M в соответствующем интервале $M \in [\mu, \infty]$. Это выражение уже не содержит сингулярных слагаемых и имеет регулярный предел при $\alpha \rightarrow 0$. Несмотря на отсутствие произвола, связанного с вычитанием бесконечных слагаемых, при использовании этой модифицированной процедуры перенормировки в ответе для $\partial_M^2(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{Cas}}^{(r)}(M)/M)$ появится дополнительное слагаемое $\partial_M^2(\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{(\text{add})}(M)/M) = \partial_M^2 f(M)$, которое порождается исключительно использованной нами регуляризацией. Поскольку по условию $f(M)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то двукратное интегрирование выражения $\partial_M^2 f(M)$ из точки нормировки $M = \infty$ восстановит в точности функцию $f(M)$, которая и войдет как дополнительное слагаемое в окончательный ответ для $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{Cas}}(M)/M$ и тем самым в искомую перенормированную энергию Казимира $\tilde{E}_{\text{Cas}}(M)$.

Разумеется, приведенный пример является в достаточной степени искусственным. Более того, против такого способа регуляризации имеется вполне очевидное возражение, суть которого состоит в том, что окончательный ответ для $\tilde{E}_{\text{Cas}}(M)$ будет содержать дополнительное слагаемое $M f(M)$ и тем самым зависеть от вида регуляризующей функции $\tilde{F}(\alpha, \omega_n)$. Иными словами, возникает явная зависимость окончательного ответа для перенормированной вакуумной энергии от способа регуляризации, что неприемлемо по очевидным соображениям.

С другой стороны, к этому возражению есть и вполне обоснованный контраргумент, заключающийся в том, что при проведении любой содержательной процедуры перенормировки исходное расходящееся выражение (1) для вакуумной энергии так или иначе обязательно должно быть заменено на сходящееся. С этой точки зрения оба способа регуляризации (2) и (22) вполне эквивалентны, так как оба они при $\alpha \rightarrow 0$ воспроизводят исходное выражение (1), обеспечивают равенство нулю вакуумной энергии и ее первой производной при $M = \infty$, и нет никакого физически обоснованного способа выбора в пользу того или другого. В таком контексте в безвычитательной процедуре перенормировки имеется принципиальный произвол, связанный с выбором конкретной регуляризации исходного выражения (1) для энергии Казимира, при этом использование “естественной” точки нормировки $M = \infty$ отнюдь его не устраняет. Вопрос о том, возможна ли модификация рассмотренного метода, устраняющая зависимость окончательного ответа от этого произвола, выходит за рамки настоящей работы и будет рассмотрен отдельно.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе предложен метод определения энергии Казимира в виде комбинации аналитических выкладок и численных расчетов, который не содержит процедуры вычитания и, следовательно, не требует дополнительной нормировки для устранения неопределенностей в вычитательной процедуре. Недостатком метода является необходимость вычислений с повышенным числом верных знаков (в частности, спектр

системы следует находить с высокой точностью) и наличие произвола, связанного с выбором конкретной формы регуляризации исходного выражения (1) для энергии Казимира.

Основным достоинством метода является его идеологическая и техническая тривиальность, позволяющая применять его в тех случаях, когда отсутствует (явное или неявное) аналитическое выражение для энергетических уровней системы, а в самом общем случае и для уравнения, из которого эти уровни должны определяться. Более того, нет необходимости вычислять приближенные асимптотические выражения для уровней. Значимость этого обстоятельства легко видеть из следующего примера. В одномерном случае, когда суммирование идет по одному квантовому числу n , а количество расходящихся членов (в степенях n) в УФ-асимптотике невелико, можно воспользоваться аналитическими выражениями для сумм регуляризованных подходящим способом рядов, составленных из расходящихся членов, а остальные (сходящиеся) ряды просуммировать численно. В то же время в трехмерном случае (даже в случае сферической симметрии) суммируется двойной ряд, и уже для простейших систем его перенормировка представляет собой довольно громоздкую задачу [8]. Если же уровни можно найти только численно, то задача выделения из спектра расходящихся членов и численного суммирования остатка становится совсем затруднительной. Именно в таких ситуациях, по-видимому, и имеет смысл применять изложенный метод.

Благодарности. Данная работа выполнена при частичной финансовой поддержке по гранту № НШ-1450.2003.2 Президента РФ для ведущих научных школ.

Список литературы

- [1] *H. B. G. Casimir.* Proc. K. Ned. Akad. Wetensc. 1948. V. 51. P. 793; Physica. 1953. V. 19. P. 846.
- [2] *M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko.* Phys. Rep. 2001. V. 353. P. 1; quant-ph/0106045.
- [3] *T. H. Boyer.* Phys. Rev. 1968. V. 174. P. 1764; *R. Balian, R. Duplantier.* Ann. Phys. 1978. V. 112. P. 165; *K. A. Milton, L. L. De Raad, J. Schwinger.* Ann. Phys. 1978. V. 115. P. 388.
- [4] *K. A. Milton.* Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 1441; P. 1444; *G. E. Brown, A. D. Jackson, M. Rho, V. Vento.* Phys. Lett. B. 1984. V. 140. P. 285.
- [5] *L. Vepstas, A. D. Jackson.* Phys. Rep. 1990. V. 187. P. 109.
- [6] *M. De Francia, H. Falomir, E. M. Santangelo.* Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. 2129; *A. Hosaka, H. Toki.* Phys. Rep. 1996. V. 277. P. 65.
- [7] *J. Baacke, Y. Igarashi.* Phys. Rev. D. 1983. V. 27. P. 460; *S. K. Blau, M. Wisser, A. Wipf.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 310. P. 163.
- [8] *M. Bordag, E. Elizalde, K. Kirsten, S. Leseduate.* Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 4896.
- [9] *E. Elizalde, M. Bordag, K. Kirsten.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 1743.
- [10] *M. Bordag, B. Geyer, K. Kirsten, E. Elizalde.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 179. P. 215.
- [11] *К. А. Свешников, П. К. Сулаев.* ТМФ. 1998. Т. 117. С. 263; *И. Ю. Малахов, К. А. Свешников, С. М. Федоров, М. Ф. Халили.* ТМФ. 2002. Т. 132. С. 238; *И. Ю. Малахов, К. А. Свешников.* ТМФ. 2002. Т. 132. С. 363.
- [12] *К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер.* Квантовая теория поля. Т. 1. М.: Мир, 1984.
- [13] *А. О. Гельфонд.* Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1967.

Поступила в редакцию 11.XI.2003 г.,
после доработки 4.VIII.2004 г.