Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Кривский, Р. Р. Ломпей, В. М. Симулик, О симметриях комплексного уравнения Дирака–Кэлера, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 1, 64–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:14:38

© 2005 г. И. Ю. Кривский*, Р. Р. Ломпей*, В. М. Симулик*

О СИММЕТРИЯХ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА–КЭЛЕРА

Рассмотрен комплексный вариант уравнения типа Дирака–Кэлера – восьмикомпонентное комплексное уравнение Дирака–Кэлера с ненулевой массой, которое лишь *неунитарным* преобразованием расщепляется на два уравнения Дирака. Выписан аналог комплексного уравнения Дирака–Кэлера в 5-мерии. Показано, что комплексное уравнение Дирака–Кэлера есть частный случай уравнения типа Бхабха. Доказано, что это уравнение инвариантно относительно алгебры *чисто матричных преобразований* типа Паули–Гюрши, а также относительно двух различных представлений группы Пуанкаре – фермионного (для системы двух фермионов) и бозонного $\mathcal{P}$ -представлений. Комплексное уравнение Дирака–Кэлера выписано также в явно-ковариантной бозонной форме как уравнение для системы $(B^{\mu\nu}, \Phi, \nu^\mu)$ неприводимых самодуального тензорного, скалярного и векторного полей. Проиллюстрировано отношение комплексного уравнения Дирака–Кэлера к известному шестнадцатикомпонентному уравнению Дирака–Кэлера.

Ключевые слова: уравнение Дирака–Кэлера, комплексификация, фермионы, бозоны, симметрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, 16-компонентное уравнение Дирака–Кэлера (ДК) (см., например, [1]) расщепляется [2] на систему четырех независимых уравнений Дирака

$$\begin{aligned} (i\gamma\partial - m)\psi_r &= 0, & \psi_r &\equiv (\psi_r^A), & r, A &= 1, 2, 3, 4 \equiv \overline{1}, \overline{4}, \\ \gamma\partial &\equiv \gamma^\mu \partial_\mu, & \mu &= \overline{0}, \overline{3}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

с неприводимыми (4×4) -матрицами γ_μ . Несмотря на простоту системы (1.1), в течение последнего полувека наблюдается (см. обзор [3] и приведенные в нем ссылки) повышенный интерес к уравнению ДК, особенно в задачах описания фермионных полей на решетке (см. работу [4] и приведенные в ней ссылки).

В данной статье рассматривается система двух уравнений

$$\gamma\partial\psi_1 - \kappa_1\psi_2 = 0, \quad \gamma\partial\psi_2 + \kappa_2\psi_1 = 0, \quad \psi_{1,2} \equiv (\psi_{1,2}^A) \quad (1.2)$$

* Институт электронной физики НАН Украины, Ужгород, Украина.
E-mail: iep@iep.uzhgorod.ua; lompay@zk.arbitr.gov.ua; sim@iep.uzhgorod.ua

(с неприводимыми матрицами γ_μ) для системы двух 4-компонентных величин $\psi_{1,2}$ с комплекснозначными компонентами $\psi_{1,2}^A$, т.е. уравнение

$$(\Gamma\partial - M)\Psi = 0, \quad (1.2a)$$

$$\Gamma\partial \equiv \Gamma^\mu \partial_\mu, \quad \Gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix}, \quad M \equiv \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 \\ -\kappa_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

с минимально приводимыми матрицами Дирака Γ^μ , где $\kappa_{1,2}$ – числовые параметры размерности массы (называемые *массовыми параметрами*; здесь используется естественная система единиц: $\hbar = c = 1$). Уравнение (1.2a) далее называем *комплексным уравнением Дирака–Кэллера* (КДК).

ТЕОРЕМА 1. *Неунитарный, но обратимый оператор*

$$V \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\kappa_1} \end{pmatrix}, \quad V^{-1} \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\kappa_2} \end{pmatrix}, \quad m \equiv \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}, \quad (1.3)$$

уравнивает массовые параметры κ_1, κ_2 в уравнении (1.2a), а неунитарный, но обратимый оператор

$$\hat{V} = UV, \quad U \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad U^\dagger U = UU^\dagger = I, \quad (1.4)$$

расщепляет уравнение (1.2a) на подсистему двух независимых уравнений Дирака $(i\gamma\partial \mp m)\psi_\mp = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственным вычислением соответствующих преобразованных величин. В частности, находим

$$\begin{aligned} \hat{V}(\Gamma\partial - M)\Psi &\equiv (\Gamma\partial - M_m)\Psi' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\gamma\partial - im)\psi_+ = 0, \\ (\gamma\partial + im)\psi_- = 0, \end{cases} \\ M_m &\equiv \hat{V}M\hat{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi' \equiv \hat{V}\Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отличие системы (1.2) ((1.2a)) от (1.1) – в нескольких моментах. Во-первых, в уравнении КДК (1.2a) 8 компонент, а не 16, как в (1.1). Во-вторых, как видно из (1.5), уравнение (1.2a) расщепляется на два (а не на четыре) уравнения Дирака с массами $\pm m$ (различные знаки – момент существенный, см. ниже замечание 1). Наконец, поскольку оператор $\hat{V}$ при условии

$$\kappa_1 \kappa_2 \equiv m^2 > 0, \quad \kappa_1 \neq \kappa_2, \quad (1.6)$$

неунитарен, то система (1.2) ((1.2a)) при этом условии физически не эквивалентна системе (1.5). При этом различные массовые параметры κ_1, κ_2 определяют “сравнительную долю” 4-компонентных величин ψ_1, ψ_2 в 8-компонентном столбце Ψ , что может оказаться существенным при наличии взаимодействия поля Ψ с другими полями. Здесь есть некоторая аналогия с “большой” и “малой” компонентами в обычном стационарном уравнении Дирака при наличии взаимодействия с внешним полем. Можно также

усмотреть аналогию факторов κ_1, κ_2 с электрической и магнитной проницаемостями для электромагнитного поля $(\vec{E}, \vec{H})$ в средах, в которых магнитная составляющая $\mu\vec{H}$ оказывается малой по сравнению с электрической составляющей $\varepsilon\vec{E}$ электромагнитного поля. Приведенные аргументы убеждают в целесообразности детального и всестороннего рассмотрения первичной системы уравнений (1.2) ((1.2a)) с произвольными κ_1, κ_2 .

При $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ уравнение КДК (1.2a) расщепляется на два безмассовых уравнения Дирака

$$\gamma\partial\psi(x) = 0, \quad x \in \mathcal{M}(1, 3), \quad (1.7)$$

в пространстве Минковского $\mathcal{M}(1, 3)$. Симметрии этого уравнения и его связь с электромагнитным полем хорошо изучены (см., например, работу [5] и приведенные в ней ссылки). Но наиболее примечательно то, что некоторые матричные и другие симметрии уравнения КДК (1.2a) с произвольными κ_1, κ_2 (1.6) конструируются (см. разделы 4, 5) из величин, характерных для безмассового уравнения Дирака (1.7). Поэтому ниже приводится краткое изложение известной и новой информации об уравнении (1.7), используемой в данной работе.

Структура статьи следующая. В разделе 2 дан краткий систематизированный обзор преобразований инвариантности *безмассового* уравнения Дирака, через элементы которого выражаются преобразования инвариантности массивного уравнения КДК. В разделе 3 приведен основной результат работы [6] об инвариантных (в пространствах $\mathcal{M}(1, 3)$ и $\mathcal{M}(1, 4)$) уравнениях типа Бхабха [7], выписываемых через матрицы произвольных представлений универсальной накрывающей $\mathcal{L}(1, 5)$ собственной ортохронной подгруппы $L_+^\uparrow(1, 5)$ группы $O(1, 5)$ псевдоортогональных преобразований в 6-мерном пространстве Минковского $\mathcal{M}(1, 5)$; здесь показано, что уравнение КДК в $\mathcal{M}(1, 3)$, а также аналогичное уравнение КДК в 5-мерии (т.е. в $\mathcal{M}(1, 4)$) есть частный случай фермионных уравнений типа Бхабха. Раздел 4 посвящен исследованию дополнительных симметрий массивного уравнения КДК – чисто матричной, аналогичной симметрии безмассового уравнения Дирака, а также дополнительной бозонной симметрии Пуанкаре уравнения КДК. В разделе 5 выписан явный вид несингулярного преобразования, переводящего уравнение КДК (1.2a) в его явно ковариантную бозонную форму. Проанализирована также связь 8-компонентного уравнения КДК со стандартным 16-компонентным уравнением ДК в бозонной форме. В заключении приведено краткое описание результатов работы.

2. О БЕЗМАССОВОМ УРАВНЕНИИ ДИРАКА И ЭКЗОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ γ -МАТРИЦ

Для определенности будем исходить из представления Паули–Дирака (ПД) матриц γ_μ :

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выпишем сначала матрицы Паули–Гюрши [8] в удобных для нас обозначениях [5]:

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\mu\nu} = -\hat{s}_{\nu\mu}: \quad \hat{s}_{01} = -\frac{i}{2}\gamma_2 C, \quad \hat{s}_{02} = \frac{1}{2}\gamma_2 C, \quad \hat{s}_{03} = \frac{i}{2}\gamma_4, \\ \hat{s}_{jk} = \varepsilon^{jkl}\gamma_4 \hat{s}_{0l}; \quad \gamma_4 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2.2)$$

где C – оператор комплексного сопряжения, $C\psi = \psi^*$. Для матриц (2.2) справедливы равенства

$$\gamma_4 \cdot \gamma \partial = -\gamma \partial \cdot \gamma_4, \quad \hat{s}_{0k} \cdot \gamma \partial = -\gamma \partial \cdot \hat{s}_{0k}, \quad \hat{s}_{jk} \cdot \gamma \partial = \gamma \partial \cdot \hat{s}_{jk}. \quad (2.3)$$

Поэтому семь независимых матриц в (2.2) вместе с единичной являются [8] генераторами чисто матричной вещественной алгебры A_8 инвариантности безмассового уравнения (1.7), не связанной с преобразованием аргумента $x \in \mathcal{M}(1, 3)$ спинора ψ .

Далее, матрицы $\hat{s}_{\mu\nu}$ из (2.2) удовлетворяют (см. теорему 1 из работы [5]) ковариантным коммутационным соотношениям

$$[s_{\mu\nu}, s_{\rho\sigma}] = -g_{(\mu\rho}s_{\nu\sigma)} \equiv -g_{\mu\rho}s_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}s_{\sigma\mu} - g_{\nu\sigma}s_{\mu\rho} - g_{\sigma\mu}s_{\rho\nu} \quad (2.4)$$

для лоренцевых спинов $s_{\mu\nu}$ как генераторов вещественной алгебры группы

$$SL(2, \mathbb{C}) = \mathcal{L}(1, 3) \equiv \mathcal{L} = \left\{ A \doteq 1 - \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}s_{\rho\sigma}; \omega \equiv (\omega^{\rho\sigma} = -\omega^{\sigma\rho}) \right\} \quad (2.5)$$

– универсальной накрывающей собственной ортохронной группы Лоренца $L_+^\uparrow(1, 3) \equiv L_+^\uparrow = \{\Lambda \equiv (\Lambda_\nu^\mu): \det \Lambda = +1, \Lambda_0^0 \geq 1\}$. Символ “ $\doteq$ ” в фигурных скобках в (2.5) означает “инфинитезимально”, вещественные параметры $\omega^{\rho\sigma}$ – “углы поворота” в плоскостях $\rho\sigma$ пространства Минковского $\mathcal{M}(1, 3)$, а (2×2) -матрицы $s_{\rho\sigma}$ – *исходные* генераторы группы $\mathcal{L}$. Метрический тензор выбран как $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$.

В работе [5] показано, что матрицы $\hat{s}_{\mu\nu}$ из (2.2), как и матрицы

$$s_{\mu\nu}^{(S)} \equiv \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (2.6)$$

удовлетворяют соотношениям (2.4) и являются генераторами одного и того же спинорного представления группы $\mathcal{L}$

$$D^S \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right). \quad (2.7)$$

В то же время стандартные матрицы (2.6) – обычные генераторы представления (2.7) – *не являются* преобразованиями инвариантности безмассового уравнения Дирака (1.7) (такowymi являются лишь операторы

$$j_{\mu\nu} = m_{\mu\nu} + s_{\mu\nu}^{(S)}, \quad m_{\mu\nu} \equiv x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \quad (2.8)$$

полного лоренцева момента импульса). В этой связи интересна

ТЕОРЕМА 2. Матрицы $\hat{s}_{\mu\nu}$ из (2.2) и $s_{\mu\nu}^{(S)}$ (2.6) связаны оператором $\hat{C}$:

$$\hat{s}_{\mu\nu} = \hat{C} s_{\mu\nu}^{(S)} \hat{C} = \frac{1}{4} [\hat{\gamma}_\mu, \hat{\gamma}_\nu], \quad \hat{\gamma}_\mu \equiv \hat{C} \gamma_\mu \hat{C}, \quad \hat{C}^2 = I, \quad (2.9)$$

оператор $\hat{C}$ и явный вид матриц $\hat{\gamma}_\mu$ в ПД-представлении матриц γ_μ (в обозначениях $\gamma_{\mu\nu} \equiv \gamma_\mu \gamma_\nu$) таковы:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}_0 = \gamma_0, \quad \hat{\gamma}_1 = -i\gamma_{02}C, \quad \hat{\gamma}_2 = \gamma_{02}C, \quad \hat{\gamma}_3 = i\gamma_{04}. \quad (2.10)$$

В вещественной алгебре Клиффорда–Дирака (КД) матрица $\hat{C}$ унитарна ($\hat{C}^{-1} = \hat{C}^\dagger = \hat{C}$), а матрицы $\hat{\gamma}_\mu$ из (2.10) удовлетворяют стандартным соотношениям КД:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad \gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_j^\dagger = -\gamma_j. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы проводится непосредственными вычислениями соответствующих равенств и соотношений, исходя из явного вида (2.1) матриц γ_μ в ПД-представлении.

Таким образом, смысл матрицы $\hat{C}$ (2.10) таков: она переводит обычные $\mathcal{L}$ -спины $s_{\mu\nu}^{(S)}$ (2.6) (не являющиеся преобразованиями инвариантности для уравнения (1.7)) в $\mathcal{L}$ -спины $\hat{s}_{\mu\nu}$ (2.2) ((2.9)), которые уже являются преобразованиями инвариантности уравнения (1.7). Причем, что удивительно, все матрицы $\hat{s}_{\mu\nu}$ коммутируют со всеми матрицами $s_{\mu\nu}^{(S)}$:

$$[\hat{s}_{\mu\nu}, s_{\rho\sigma}^{(S)}] = 0. \quad (2.12)$$

Последнее дает возможность сконструировать с помощью $\mathcal{L}$ -спинов $\hat{s}_{\mu\nu}$ и $s_{\mu\nu}^{(S)}$ генераторы локальных бозонных симметрий Пуанкаре безмассового уравнения Дирака (1.7).

ТЕОРЕМА 3 ([5]). Матрицы $s_{\mu\nu}^{(TS)}$ и $s_{\mu\nu}^{(V)}$, определяемые как

$$s_{0k}^{(TS)} \equiv \frac{1}{2}(s_{0k}^{(S)} - \hat{s}_{0k}) = -s_{k0}^{(TS)}, \quad s_{jk}^{(TS)} \equiv \frac{1}{2}(s_{jk}^{(S)} + \hat{s}_{jk}), \quad s_{\mu\nu}^{(V)} \equiv \frac{1}{2}(s_{\mu\nu}^{(S)} + \hat{s}_{\mu\nu}), \quad (2.13)$$

удовлетворяют соотношениям (2.4) и реализуют тензорно-скалярное и векторное представления группы $\mathcal{L}$, соответственно:

$$s_{\mu\nu}^{(TS)} \in D^{TS} \equiv (0, 1) \oplus (0, 0), \quad s_{\mu\nu}^{(V)} \in D^V \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (2.14)$$

На основании этого показано (см. теорему 2 из работы [5]), что уравнение (1.7) инвариантно не только относительно фермионного (стандартного спинорного) представления универсальной накрывающей $\mathcal{P}(1, 3) \equiv \mathcal{P}$ собственной ортохронной группы Пуан-

каре $T(4) \times L_+^\dagger(1, 3)$, генераторы которого задаются операторами Ли $j_{\mu\nu}$ (2.8) и $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, но и относительно двух бозонных $\mathcal{P}$ -представлений, генераторы которых имеют вид

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad j_{\mu\nu}^{2,3} = m_{\mu\nu} + s_{\mu\nu}^{2,3}; \quad s^2 = s^{(\text{TS})}, \quad s^3 = s^{(\text{V})}. \quad (2.15)$$

Приведенная информация, кроме прочего, значительно облегчает и делает прозрачным анализ симметрий уравнения КДК (1.2а) с произвольными κ_1, κ_2 .

3. УРАВНЕНИЕ КДК КАК ФЕРМИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА УРАВНЕНИЯ БХАБХА

Приведем здесь сначала основной результат анализа инвариантных уравнений типа уравнения Бхабха [7], выполненный в работе [6] и связанный с использованием произвольных матричных представлений универсальной накрывающей $\mathcal{L}(1, 5)$ собственной ортохронной подгруппы $L_+^\dagger(1, 5)$ группы $O(1, 5)$ псевдоортогональных преобразований в 6-мерном пространстве Минковского $\mathcal{M}(1, 5)$.

Пусть $s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ – генераторы произвольно фиксированного M -мерного представления

$$\varpi \rightarrow F(\varpi) \in D(\mathcal{L}(1, 5)), \quad \varpi \equiv (\varpi^{\hat{\mu}\hat{\nu}}) \supset \omega = (\omega^{\mu\nu}), \quad \mu, \nu = \overline{0, 3}, \quad \hat{\mu}, \hat{\nu} = \overline{0, 5}, \quad (3.1)$$

группы $\mathcal{L}(1, 5)$, которые инфинитезимально (т.е. в окрестности единицы) задают $(M \times M)$ -матрицы F (3.1) формулой

$$F(\varpi) \stackrel{\text{i}}{=} \left(I_M - \frac{1}{2} \varpi^{\hat{\mu}\hat{\nu}} s_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right), \quad \{s_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -s_{\hat{\nu}\hat{\mu}}\} \in D(\mathcal{L}(1, 5)), \quad (3.2)$$

где I_M – единичная $(M \times M)$ -матрица, а вещественные параметры $\varpi^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\varpi^{\hat{\nu}\hat{\mu}}$ – “углы поворота” в плоскостях $\hat{\mu}\hat{\nu}$ в пространстве $\mathcal{M}(1, 5)$. Эти генераторы удовлетворяют соотношениям (2.4) после замены $\mu, \nu, \rho, \sigma \rightarrow \hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\sigma} = \overline{0, 5}$.

Пусть C_4 есть оператор Казимира $\mathcal{L}$ -представления, задаваемого $(M \times M)$ -матрицами $\{s_{\mu\nu}\} \in \{s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\}$, т.е. $[C_4, s_{\mu\nu}] = 0$. Используя матрицу C_4 и матрицы $s_{\mu 5} = -s_{5\mu}$ (матрицы последнего столбца тензора $\{s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\}$ без матрицы s_{45}), выпишем уравнение первого порядка (по ∂_μ) для комплексного M -компонентного поля φ в форме

$$(i\lambda s_{\mu 5} \partial^\mu - C_4) \varphi(x) = 0, \quad \mu = \overline{0, 3}, \quad x \in \mathcal{M}(1, 3), \quad (3.3)$$

$$\varphi \equiv (\varphi^m)_{m=1}^M \in \mathcal{S}'_{4M} \equiv \mathcal{S}'(\mathcal{M}(1, 3)) \times \mathbb{C}^M,$$

где $\mathcal{S}'_{4M}$ – пространство комплексных M -компонентных обобщенных функций Шварца, т.е. пространство, сопряженное пространству $\mathcal{S}_{4M} = \{\varphi: \mathcal{M}(1, 3) \rightarrow \mathbb{C}^M\}$ пробных (основных) комплекснозначных M -компонентных функций Шварца над $\mathcal{M}(1, 3)$.

Далее, пусть C_5 есть оператор Казимира представления группы $\mathcal{L}(1, 4)$ (универсальной накрывающей собственной ортохронной подгруппы $L_+^\dagger(1, 4)$ группы $O(1, 4)$ псевдоортогональных преобразований в $\mathcal{M}(1, 4)$), задаваемого $(M \times M)$ -матрицами $\{s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}; \hat{\mu}\hat{\nu} = \overline{0, 4}\} \subset \{s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\}$, т.е. $[C_5, s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}] = 0$. Используя матрицу C_5 и все матрицы $s_{\hat{\mu}5}$ последнего

столбца тензора $\{s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\}$, выпишем уравнение 1-го порядка (по $\partial_{\tilde{\mu}}$, $\tilde{\mu} = \overline{0, 4}$) для комплексного M -компонентного поля ϕ в 5-мерии в форме

$$\begin{aligned} (i\lambda s_{\tilde{\mu}5}\partial^{\tilde{\mu}} - C_5)\phi(\tilde{x}) &= 0, \quad \tilde{\mu} = \overline{0, 4}, \quad \tilde{x} \equiv (x^{\tilde{\mu}}) \in \mathcal{M}(1, 4), \\ \partial^{\tilde{\mu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{\mu}}}, \quad \phi \equiv (\phi^m)_{m=1}^M \in \mathcal{S}'_{5M} \equiv \mathcal{S}'(\mathcal{M}(1, 4)) \times \mathbb{C}^M. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заметим, что операторы Ли

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad j_{\mu\nu} = m_{\mu\nu} + s_{\mu\nu}, \quad m_{\mu\nu} \equiv x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \quad \mu, \nu = \overline{0, 3}, \quad (3.5)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям в ковариантной форме:

$$\begin{aligned} [\partial_\mu, \partial_\nu] &= 0, \quad [\partial_\mu, j_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\rho, \\ [j_{\mu\nu}, j_{\rho\sigma}] &= -g_{(\mu\rho}j_{\nu\sigma)} \equiv -g_{\mu\rho}j_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}j_{\sigma\mu} - g_{\nu\sigma}j_{\mu\rho} - g_{\sigma\mu}j_{\rho\nu}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эти операторы (с общей областью $\mathcal{S}_{4M} \subset \mathcal{S}'_{4M}$ определения и значений, плотной в $\mathcal{S}'_{4M}$) определяют локальное представление группы $\mathcal{P}$ в $\mathcal{S}'_{4M}$ формулой

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = F_4(\omega)\varphi(\Lambda^{-1}(x-a)) \stackrel{i}{=} \left(I_M - a^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} j_{\mu\nu} \right) \varphi(x) \quad (3.7)$$

(точнее, соответствующим экспоненциальным рядом, сходящимся в пространстве $\mathcal{S}_{4M} \in \mathcal{S}'_{4M}$, с последующим продолжением этого ряда на все пространство $\mathcal{S}'_{4M}$).

Аналогично выписываются формулы, определяющие локальное представление в $\mathcal{S}'_{5M}$ группы $\mathcal{P}(1, 4)$ (универсальной накрывающей собственной ортохронной группы Пуанкаре $T(5) \times L_+^\uparrow(1, 4)$ в 5-мерии), задаваемое матрицами $\{s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\} \subset \{s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\} \in D(\mathcal{L}(1, 5))$, получаемые из формул (3.5)–(3.7) с заменой в них $\mu, \nu = \overline{0, 3} \rightarrow \tilde{\mu}, \tilde{\nu} = \overline{0, 4}$.

Теперь сформулируем основной результат работы [7] в следующем виде.

ТЕОРЕМА 4. *Уравнение (3.3) типа уравнения Бхабха в $\mathcal{M}(1, 3)$ $\mathcal{P}$ -инвариантно, а именно оно инвариантно относительно локального $\mathcal{P}$ -представления, задаваемого формулой (3.7), а уравнение (3.4) типа уравнения Бхабха в 5-мерии инвариантно относительно представления группы $\mathcal{P}(1, 5)$, задаваемого формулой*

$$\phi(\tilde{x}) \rightarrow \phi'(\tilde{x}) = F_5(\tilde{\omega})\phi(g^{-1}(\tilde{x} - \tilde{a})) \stackrel{i}{=} \left(I_M - a^{\tilde{\mu}} \partial_{\tilde{\mu}} - \frac{1}{2}\omega^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} j_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \right) \varphi(\tilde{x}), \quad \tilde{\omega} \equiv (\omega^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}), \quad (3.8)$$

где $g \in \mathcal{P}(1, 4)$, $\tilde{a} \equiv (a^{\tilde{\mu}}) \in \mathcal{M}(1, 4)$,

$$F_5(\tilde{\omega}) \stackrel{i}{=} \left(I_M - \frac{1}{2}\omega^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \right), \quad j_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = m_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} + s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}. \quad (3.9)$$

Для доказательства данной теоремы достаточно показать, что генераторы (3.5) коммутируют с оператором уравнения (3.3), а генераторы $(3.5)_{\mu\nu \rightarrow \tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ — с оператором уравнения (3.4). Трансляционная инвариантность этих уравнений очевидна, она связана с независимостью от x матриц $s_{\mu\nu}$ и C_4 (для уравнения (3.3)) и независимостью от $\tilde{x}$ матриц $s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ и C_5 (для уравнения (3.4)), соответственно. Для операторов “вращений” найдем

$$\begin{aligned} [(j_{\rho\sigma} \equiv m_{\rho\sigma} + s_{\rho\sigma}), (i\lambda s_{\mu 5} \partial^\mu - C_4)] &= i\lambda[s_{\rho\sigma}, s_{\mu 5}] \partial^\mu + i\lambda s_{\mu 5} [m_{\rho\sigma}, \partial^\mu] - [s_{\rho\sigma}, C_4] = \\ &= i\lambda(g_{\rho\mu} s_{\sigma 5} + g_{\mu\sigma} s_{5\rho}) \partial^\mu + i\lambda s_{\mu 5} (\delta_\sigma^\mu \partial_\rho - \delta_\rho^\mu \partial_\sigma) \equiv 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются соответствующие равенства для операторов $i\lambda s_{\tilde{\mu} 5} \partial^{\tilde{\mu}} - C_5$ и $j_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}$.

Перебирая различные представления группы $\mathcal{L}(1, 5) \supset \mathcal{L}(1, 4) \supset \mathcal{L}(1, 3)$ и анализируя представления $D(\mathcal{L}(1, 3)) \subset D(\mathcal{L}(1, 5))$, получаем в качестве уравнений (3.3) различные релятивистски-инвариантные уравнения 1-го порядка по ∂_μ , а именно уравнения, инвариантные относительно $\mathcal{P}$ -представлений, задаваемые генераторами с различными спинами Лоренца $\{s_{\mu\nu}\} \subset \{s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\} \in D(\mathcal{L}(1, 5))$. Аналогично, анализируя представления $D(\mathcal{L}(1, 4)) \subset D(\mathcal{L}(1, 5))$, мы получим в качестве уравнений (3.4) уравнения, инвариантные относительно различных представлений группы $\mathcal{P}(1, 4)$, задаваемые генераторами $(3.5)_{\mu\nu \rightarrow \tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ с различными матрицами $\{s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\} \subset \{s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\}$.

Простейшим из $\mathcal{P}$ -инвариантных уравнений типа уравнения Бхабха (3.3) является стандартное уравнение Дирака; для этого случая

$$\lambda = 2, \quad C_4 = m, \quad 2s_{\mu 5} = \gamma_\mu, \quad s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \frac{1}{4}[\gamma_{\tilde{\mu}}, \gamma_{\tilde{\nu}}], \quad \gamma_4 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \equiv \gamma_{0123}. \quad (3.10)$$

Действительно, как легко проверить, выписанные в (3.10) матрицы $s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$, где $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} = \overline{0, 5}$, удовлетворяют соотношениям $(2.4)_{\mu\nu \rightarrow \tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ и реализуют *неприводимое представление* группы $\mathcal{L}(1, 5)$. А $s_{\mu\nu}(3.10) = s_{\mu\nu}^{(S)}(2.6)$ при $\mu, \nu = \overline{0, 3}$ реализуют представление $D^S(2.7)$, т.е. в этом случае в уравнении (3.3) $\varphi = \psi$ и $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$, так что поле $\varphi = \psi$ есть фермионное поле массы m и спина $s = 1/2$.

Приводимые (8×8) -матрицы Дирака Γ^μ в (1.2а) вместе с матрицей

$$\Gamma^4 \equiv \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^3 = \begin{pmatrix} \gamma^4 & 0 \\ 0 & \gamma^4 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

удовлетворяют соотношениям КД (2.11) (при замене $\mu, \nu \rightarrow \tilde{\mu}, \tilde{\nu} = \overline{0, 4}$). Отсюда следует, что (8×8) -матрицы

$$\{\check{s}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = -\check{s}_{\tilde{\nu}\tilde{\mu}}\}: \quad \check{s}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \frac{1}{4}[\Gamma_{\tilde{\mu}}, \Gamma_{\tilde{\nu}}], \quad \check{s}_{\tilde{\mu} 5} = \frac{1}{2}\Gamma_{\tilde{\mu}} = -\check{s}_{5\tilde{\mu}}, \quad (3.12)$$

где $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} = \overline{0, 4}$, $\hat{\mu}, \hat{\nu} = \overline{0, 5}$, удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.4) с заменой в них $\mu, \nu, \rho, \sigma = \overline{0, 3}$ на $\hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\sigma} = \overline{0, 5}$. Следовательно, матрицы (3.12) являются генераторами приводимого представления группы $\mathcal{L}(1, 5)$.

Далее, поскольку все матрицы (3.12) имеют блочно-диагональный вид, то они коммутируют с массовым оператором M с произвольными $\kappa_{1,2}$:

$$\left[\check{s} \equiv \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad M \equiv \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 \\ -\kappa_2 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (3.13)$$

Выбирая теперь

$$\lambda = 2, \quad C_4 = M, \quad 2\check{s}_{\mu 5} = \Gamma_\mu, \quad \check{s}_{\bar{\mu} \bar{\nu}} = \frac{1}{4}[\Gamma_{\bar{\mu}}, \Gamma_{\bar{\nu}}], \quad \Gamma_4 \equiv \Gamma_{0123} = \begin{pmatrix} \gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

где M и Γ^μ заданы в (1.2а), заключаем, что уравнение КДК (1.2а) ((1.2)) есть частный случай уравнения типа уравнения Бхабха (3.3). Причем из приведенной выше теоремы 4, выбора (3.14) и явного вида матриц $\check{s}_{\mu\nu}$ из (3.14),

$$\check{s}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} s_{\mu\nu}^{(S)} & 0 \\ 0 & s_{\mu\nu}^{(S)} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

видно, что уравнение КДК (1.2а) инвариантно относительно $\mathcal{P}$ -представления, задаваемого генераторами (3.5) с $s_{\mu\nu} = \check{s}_{\mu\nu}$ (3.15), т.е. относительно $\mathcal{P}$ -представления, определяемого $\mathcal{L}$ -представлением

$$2D^S \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \ni \check{s}_{\rho\sigma}. \quad (3.16)$$

Привлекая анализ Баргмана–Вигнера, замечаем, что для $\mathcal{P}$ -генераторов (3.5) с $s_{\mu\nu} = \check{s}_{\mu\nu}$ (3.15) оператор Казимира, определяемый через вектор Паули–Любанского w^μ , имеет вид

$$w^2 \equiv w^\mu w_\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) I_8 \square, \quad w^\mu \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} j_{\nu\rho} \partial_\sigma, \quad \square \equiv \partial^\mu \partial_\mu, \quad (3.17)$$

где I_8 есть единичная (8×8) -матрица.

Наконец, как наглядно видно из системы уравнений (1.2),

$$((\gamma\partial)^2 + \kappa_1\kappa_2)\psi_1 \equiv (\square + m^2)\psi_1 = 0, \quad (\square + m^2)\psi_2 = 0, \quad \square \equiv \partial^\mu \partial_\mu. \quad (3.18)$$

Последние два утверждения означают, что каждое из 4-компонентных спинорных полей $\psi_{1,2}$, составляющих компаунд-поле $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ при произвольных значениях параметров κ_1, κ_2 , есть поле массы $m = \sqrt{\kappa_1\kappa_2}$ и спина $s = 1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При выводе уравнений (3.18) различные знаки при κ_1, κ_2 в уравнениях (1.2) играют определяющую роль: *в случае одинаковых знаков* при κ_1, κ_2 в уравнениях (1.2) поля $\psi_{1,2}$ удовлетворяли бы уравнениям $(\square - m^2)\psi_{1,2} = 0$, т.е. были бы полями с мнимой массой.

Резюмируем утверждения, связанные с формулами (3.11)–(3.18), в виде теоремы, вытекающей из теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. Уравнение КДК (1.2) ((1.2a)) с минимально приводимыми матрицами Дирака Γ^μ есть релятивистски инвариантное (т.е. $\mathcal{P}$ -инвариантное) уравнение для связанной системы $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ двух массивных 4-спиноров ψ_1, ψ_2 (т.е. полей спина $s = 1/2$) одной и той же массы $m = \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}$. Массовые параметры κ_1, κ_2 определяют меру связанности спиноров ψ_1, ψ_2 в компаунд-поле Ψ и одновременно “относительную величину” компонент спинора ψ_1 в сравнении с компонентами спинора ψ_2 в системе Ψ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (о простейших уравнениях типа Бхабха в 5-мерии). Анализируя представления $D(\mathcal{L}(1, 4)) \subset D(\mathcal{L}(1, 5))$, получим в качестве уравнений (3.4) уравнения, инвариантные относительно различных представлений группы $\mathcal{P}(1, 4)$, задаваемых генераторами $(3.5)_{\mu\nu \rightarrow \tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ с различными матрицами $\{s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\} \subset \{s_{\mu\nu}\}$. Простейшее из таких уравнений есть уравнение (3.4) с

$$\lambda = 2, \quad C_4 = \kappa, \quad 2s_{\tilde{\mu}5} = \gamma_{\tilde{\mu}}, \quad s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \frac{1}{4}[\gamma_{\tilde{\mu}}, \gamma_{\tilde{\nu}}], \quad (3.19)$$

– уравнение Дирака в 5-мерии, проанализированное в работе [9].

Следующее $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантное уравнение типа уравнения Бхабха в 5-мерии есть уравнение (3.4) с тем же выбором (3.14). Это есть уравнение КДК в 5-мерии, тоже использующее лишь минимально приводимые матрицы Дирака $\Gamma^{\tilde{\mu}}$:

$$(\Gamma^{\tilde{\mu}} \partial_{\tilde{\mu}} - M)\Psi(\tilde{x}) \equiv (\Gamma^\mu \partial_\mu + \Gamma^4 \partial_4 - M)\Psi(x, x^4) = 0, \quad \tilde{x} \equiv (x^{\tilde{\mu}}) \in \mathcal{M}(1, 4), \quad \tilde{\mu} = \overline{0, 4}. \quad (3.20)$$

Оно инвариантно относительно $\mathcal{P}(1, 4)$ -представления, задаваемого генераторами $(3.5)_{\mu\nu \rightarrow \tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ с матрицами $s_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \tilde{s}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ (3.14).

В заключение данного раздела заметим, что в случае произвольных $\mathcal{P}(1, 3)$ -инвариантных или $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантных уравнений типа уравнения Бхабха матрица s_{45} последнего столбца тензора $\{s_{\mu\nu}\} \in D(\mathcal{L}(1, 5))$ является независимой; она не выражается через матрицы $s_{\mu 5}$ этого столбца.

4. МАТРИЧНЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ КДК

Несмотря на то что 8-компонентное поле Ψ (как и его составляющие ψ_1, ψ_2) является полем ненулевой массы $m = \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}$, уравнение КДК оказывается инвариантным относительно преобразований типа Паули–Гюрши.

ТЕОРЕМА 6. Семь независимых (8×8) -матриц из

$$\tilde{s}_{\mu\nu} = -\tilde{s}_{\nu\mu}: \quad \tilde{s}_{0k} \equiv \begin{pmatrix} -\hat{s}_{0k} & 0 \\ 0 & \hat{s}_{0k} \end{pmatrix}, \quad \tilde{s}_{jk} \equiv \begin{pmatrix} \hat{s}_{jk} & 0 \\ 0 & \hat{s}_{jk} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} \equiv \begin{pmatrix} -\gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где $\hat{s}_{\mu\nu}$ даны формулами (2.2), вместе с единичной матрицей при любых значениях массовых параметров $\kappa_{1,2}$ являются генераторами дополнительной чисто матричной алгебры $\tilde{A}_8$ инвариантности уравнения КДК (1.2a).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.3) и следующие из них равенства

$$\tilde{\Gamma}M = -M\tilde{\Gamma}, \quad \tilde{s}_{0k} \cdot M = -M \cdot \tilde{s}_{0k}, \quad \tilde{s}_{jk} \cdot M = M \cdot \tilde{s}_{jk}, \quad (4.2)$$

убеждаемся, что при любых κ_1, κ_2 справедливы равенства

$$\tilde{\Gamma}\tilde{D} = -\tilde{D}\tilde{\Gamma}, \quad \tilde{s}_{0k}\tilde{D} = -\tilde{D}\tilde{s}_{0k}, \quad \tilde{s}_{jk}\tilde{D} = \tilde{D}\tilde{s}_{jk}, \quad \tilde{D} \equiv \Gamma\partial - M. \quad (4.3)$$

Это и означает справедливость утверждения теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7. (8×8) -матрицы $\tilde{s}_{\mu\nu}$ из (4.1) удовлетворяют соотношениям (2.4) и, как и матрицы $\check{s}_{\mu\nu}$ из (3.15), реализуют приводимое представление $2D^S$ (3.16) универсальной накрывающей $\mathcal{L}$ собственной ортохронной группы Лоренца $L_+^\uparrow(1, 3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как упоминалось выше, матрицы $\tilde{s}_{\mu\nu}$ из (2.2) удовлетворяют соотношениям (2.4) и реализуют, как и матрицы $s_{\mu\nu}^{(S)}$, спинорное представление D^S (2.7) группы $\mathcal{L}$.

Это утверждение справедливо и для матриц

$$s'_{\mu\nu} = -s'_{\nu\mu}: \quad s'_{0k} = -\tilde{s}_{0k}, \quad s'_{jk} = \tilde{s}_{jk}. \quad (4.4)$$

Поэтому, как следует из явного вида (4.1) (8×8) -матриц $\tilde{s}_{\mu\nu}$, они удовлетворяют соотношениям (2.4) и реализуют то же самое представление $2D^S$ (3.16) группы $\mathcal{L}$, что и матрицы $s_{\mu\nu}$ из (3.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 3 (об интерпретации матриц $\tilde{s}_{\mu\nu}$). Напомним, что (8×8) -матрицы $\tilde{s}_{\mu\nu}$ из (4.1) (специфические генераторы $\mathcal{L}$ -представления $2D^S$ (3.16)) имеют блочно-диагональный вид и как слагаемые 4-моментов $\check{j}_{\mu\nu} \equiv m_{\mu\nu} + \tilde{s}_{\mu\nu} \circ \check{s}_{\mu\nu}$ (3.15) интерпретируются как спинорные матрицы ферми-полей $\psi_{1,2}$ со спином $s = 1/2$ (т.е. как спинорные матрицы компаунд-поля $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$). Согласно утверждениям теорем 6 и 7 (8×8) -матрицы $\tilde{s}_{\mu\nu}$ из (4.1) не только реализуют то же самое $\mathcal{L}$ -представление $2D^S$ (3.16), что и матрицы $\check{s}_{\mu\nu}$ из (3.12), но и в отличие от матриц $\check{s}_{\mu\nu}$ из (3.12) сами по себе являются преобразованиями инвариантности уравнения КДК (1.2а) и, кроме того, удовлетворяют соотношениям

$$[\tilde{s}_{\mu\nu}, \check{q}] = 0, \quad \check{q} = \check{s}_{\rho\sigma} \partial_\rho \check{j}_{\rho\sigma}. \quad (4.5)$$

Поэтому (8×8) -матрицы $\tilde{s}_{\mu\nu}$ из (4.1) – специфические генераторы $\mathcal{L}$ -представления $2D^S$ (3.16) как матричной группы инвариантности (группы внутренней симметрии) уравнения КДК – можно, очевидно, ассоциировать с изоспинорными матрицами компаунд-поля $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$.

Приведем теперь утверждение о бозонной $\mathcal{P}$ -симметрии уравнения КДК.

ТЕОРЕМА 8. Уравнение КДК (1.2а) инвариантно также и относительно $\mathcal{P}$ -представления, задаваемого генераторами

$$\partial_\rho = \frac{\partial}{\partial x^\rho}, \quad j_{\rho\sigma}^{(\text{TSV})} = m_{\rho\sigma} + s_{\rho\sigma}^{(\text{TSV})}, \quad (4.6)$$

в которых спинорные (8×8) -матрицы $s_{\rho\sigma}^{(\text{TSV})}$ задают приводимое бозонное, а именно тензорно-скалярно-векторное представление

$$D^{\text{TSV}} = (0, 1) \oplus (0, 0) \oplus \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (4.7)$$

группы $\mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом приведенных выше теорем 3 и 6 и явного блочного вида (8×8) -матриц

$$s_{\rho\sigma}^{(\text{TSV})} \equiv \frac{1}{2}(\check{s}_{\rho\sigma} + \tilde{s}_{\rho\sigma}) = \begin{pmatrix} s_{\rho\sigma}^{(\text{TS})} & 0 \\ 0 & s_{\rho\sigma}^{(\text{V})} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где $s^{(\text{TS})}$ и $s^{(\text{V})}$ заданы формулами (2.13), видно, что матрицы (4.8) удовлетворяют соотношениям (2.4) и реализуют именно приводимое бозонное представление (4.7), причем слагаемые $\check{s}_{\mu\nu}$ и $\tilde{s}_{\rho\sigma}$ в (4.8) при любых $\mu, \nu, \rho, \sigma = \overline{0, 3}$ коммутируют между собой. Поэтому не только операторы $\partial, \check{j}$, но и операторы $\partial, j^{(\text{TSV})}$ (4.6) удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.6) для (исходных) генераторов группы $\mathcal{P}$. Наконец, путем непосредственных вычислений убеждаемся, что

$$[\check{D}, \partial_\rho] \equiv [\check{D}, j_{\rho\sigma}^{(\text{TSV})}] = 0, \quad \check{D} \equiv \Gamma\partial - M. \quad (4.9)$$

Это и завершает доказательство теоремы 8.

5. БОЗОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КДК

Из утверждений теорем 5 и 8 ясно, что уравнение КДК (1.2а) описывает не только систему двух “первично связанных” массовыми параметрами $\kappa_{1,2} \neq 0$ фермионов, но и систему трех “первично связанных” неприводимых бозонов – неприводимых комплекснозначных $\mathcal{L}$ -ковариантов, указанных в представлении (4.7).

“Фермионность” исходной формы (1.2) ((1.2а)) уравнения КДК наглядно видна из того, что оно записано через стандартные матрицы Дирака γ_μ (а также, конечно, из явного вида спинорных матриц $s_{\mu\nu}^{(\text{S})}$ (2.6) в ПД-представлении). Чтобы утверждение о “бозонности” уравнения КДК было столь же наглядным, достаточно перейти от ПД-представления к бозонному представлению уравнения КДК, которое выполняется преобразованием

$$\psi_1 \rightarrow \mathcal{E} = W \psi_1, \quad \psi_2 \rightarrow \chi = W \psi_2, \quad (5.1)$$

где оператор W и обратный к нему оператор W^{-1} имеют вид

$$W = \begin{pmatrix} 0 & C_+ & 0 & C_- \\ 0 & iC_- & 0 & iC_+ \\ C_+ & 0 & C_- & 0 \\ C_- & 0 & C_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_+ & C_- \\ C_+ & iC_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_- & C_+ \\ C_- & iC_- & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$C_\pm \equiv \frac{1}{2}(C \pm 1), \quad C\psi \equiv \psi^*$$

(оператор W введен в работе [10] при анализе бозонных симметрий безмассового уравнения Дирака). При преобразовании (5.1) уравнение (1.2а) ((1.2)) принимает следующий явный вид:

$$(\tilde{\Gamma}^\mu \partial_\mu - M) \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \mathcal{E} - \kappa_1 \chi = 0, \\ \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \chi + \kappa_2 \mathcal{E} = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

где

$$\tilde{\Gamma}^\mu \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^\mu & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma}^\mu \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^\mu \equiv W\gamma^\mu W^{-1}, \quad \mathcal{E} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}} \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{E}} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{E}^1 \\ \mathcal{E}^2 \\ \mathcal{E}^3 \end{pmatrix}, \quad \chi = (\chi^\mu). \quad (5.4)$$

Явный вид матриц $\tilde{\gamma}^\mu$ таков:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} C, & \tilde{\gamma}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C, \\ \tilde{\gamma}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} C, & \tilde{\gamma}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} C, \\ & & \tilde{\gamma}^4 &\equiv \tilde{\gamma}^{0123} = i; \end{aligned} \quad (5.5)$$

эти матрицы называем *матрицами Дирака в бозонном представлении* (кратко – в В-представлении).

Выпишем также преобразование (5.1) и обратное к нему в явном виде через компоненты $\psi_{1,2}^A$ и χ_r^μ :

$$\begin{aligned} \chi_r \equiv (\chi_r^\mu) &= W \psi_r = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \psi_r^2 - i \operatorname{Im} \psi_r^4 \\ \operatorname{Im} \psi_r^2 + i \operatorname{Re} \psi_r^4 \\ \operatorname{Re} \psi_r^1 - i \operatorname{Im} \psi_r^3 \\ \operatorname{Re} \psi_r^3 - i \operatorname{Im} \psi_r^1 \end{pmatrix}, \\ \psi_r \equiv (\psi_r^A) &= W^{-1} \chi_r = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \chi_r^3 - i \operatorname{Im} \chi_r^0 \\ \operatorname{Re} \chi_r^1 + i \operatorname{Re} \chi_r^2 \\ \operatorname{Re} \chi_r^0 - i \operatorname{Im} \chi_r^3 \\ \operatorname{Re} \chi_r^2 - i \operatorname{Im} \chi_r^1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\mu = \overline{0, 3}$, $A = \overline{1, 4}$, $r = 1, 2$, $\chi_1 = \mathcal{E}$ при $\chi^0 = \Phi$ и $\chi_2 = \chi^1$.

Замечая, что при W -преобразовании (5.1) явный вид дифференциальных операторов ∂_ρ и $m_{\rho\sigma} \equiv x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho$ из (4.6) не меняется, выпишем также явный вид спиновых (8×8) -матриц $s_{\rho\sigma}^{(\text{TSV})}$ из (4.6) в В-представлении, т.е. матриц $s^B \equiv W s W^{-1}$:

$$s_{\rho\sigma}^{(\text{TSV})} = \begin{pmatrix} s_{\rho\sigma}^{(\text{TS})} & 0 \\ 0 & s_{\rho\sigma}^{(\text{V})} \end{pmatrix}, \quad s_{\rho\sigma}^{(\text{TS})} = \begin{pmatrix} s_{\rho\sigma}^{(\text{T})} & 0 \\ 0 & s_{\rho\sigma}^{(\text{S})} \end{pmatrix}, \quad s_{\rho\sigma}^{(\text{S})} \equiv 0, \quad (5.7)$$

¹⁾Здесь использовано одно из шести подходящих преобразований W ; полный набор допустимых преобразований, переводящих уравнение КДК (1.2) ((1.2а)) из ферми- в бозе-представление по формулам (5.1), задается набором шести разных W , связанных между собой операторами Паули-Гюрши. Явный вид этих преобразований приведен в работе [10].

где (3×3) -матрицы $s_{\rho\sigma}^{(T)}$ имеют вид

$$s_{01}^{(T)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{02}^{(T)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{03}^{(T)} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{jk}^{(T)} = i\varepsilon^{jkl}s_{0l}^{(T)}, \quad (5.8)$$

а матричные элементы (4×4) -матриц задаются как $s_{\rho\sigma}^{(V)}$:

$$(s_{\rho\sigma}^{(V)})_{\nu}^{\mu} = \delta_{\rho}^{\mu}g_{\sigma\nu} - \delta_{\sigma}^{\mu}g_{\rho\nu}, \quad (5.9)$$

т.е.

$$s_{01}^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{02}^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{03}^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$s_{23}^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{31}^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{12}^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Отсюда наглядно видно, что матрицы $s_{\rho\sigma}^{(T)}$, $s_{\rho\sigma}^{(S)} \equiv 0$ и $s_{\rho\sigma}^{(V)}$ – генераторы $(0,1)$ -, $(0,0)$ - и $(1/2, 1/2)$ -представлений группы $\mathcal{L}$ (т.е. что поля – $\mathcal{P}$ -коварианты в уравнении (5.3) – суть комплекснозначные неприводимые тензорное $\vec{\mathcal{E}}$, скалярное Φ и векторное χ поля), и что бозонные $\mathcal{P}$ -преобразования (порождаемые генераторами (4.6) в $\mathcal{B}$ -представлении), являясь группой инвариантности уравнения КДК (5.3), не перепутывают компоненты разных $\mathcal{P}$ -ковариантов $\vec{\mathcal{E}}, \Phi, \chi$.

Тот факт, что 3-компонентное комплекснозначное поле $\vec{\mathcal{E}}$ есть неприводимый (а именно $(0,1)$) $\mathcal{P}$ -ковариант, следует из того, что оператор Казимира w^2 , определенный в (3.19), для $\mathcal{P}$ -генераторов $\partial/\partial x_{\rho}$, $j_{\rho\sigma}^{(T)} = m_{\rho\sigma} + s_{\rho\sigma}^{(T)}$ имеет вид

$$w = 1(1+1)I_3\Box. \quad (5.12)$$

Заметим также, что для каждой компоненты бозонного поля справедливо равенство $(\Box + m^2)(\vec{\mathcal{E}}, \Phi, \chi) = 0$, т.е. масса каждого из неприводимых $\mathcal{P}$ -ковариантов равна $m = \sqrt{\kappa_1\kappa_2}$.

Строго говоря, вполне оправданно утверждение, что уравнение (5.4) есть одновременно уравнение для системы двух фермионных полей $\chi_1 = (\vec{\mathcal{E}}, \Phi)$, $\chi_2 = \chi$, но, правда, в необычном (бозонном) представлении (5.5) матриц Дирака. Переход к “истинно бозонной” форме уравнения КДК осуществляется неунитарным преобразованием – заменой оператора $\tilde{\gamma}\partial \equiv \tilde{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}$ в “верхнем” уравнении в (5.3) оператором $C\tilde{\gamma}\partial$, т.е. умножением его слева на оператор C (но без преобразования объекта уравнения!). В результате в удобных обозначениях и размерностях полей получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} \alpha\partial & -m^2 \\ I_4 & \tilde{\alpha}\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{V} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{\mu}\partial_{\mu}\mathcal{E} - m^2\mathcal{V} = 0, \\ \tilde{\alpha}^{\mu}\partial_{\mu}\mathcal{V} + \mathcal{E} = 0, \end{cases} \quad \alpha\partial \equiv \alpha^{\mu}\partial_{\mu}, \quad (5.13)$$

где

$$\mathcal{E} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}} \\ \Phi \end{pmatrix} = W \psi_1, \quad \mathcal{V} \equiv (\mathcal{V}^\mu) = \frac{1}{\kappa_2} C W \psi_2, \quad \alpha^\mu \equiv C \tilde{\gamma}^\mu, \quad \overset{\times}{\alpha}^\mu \equiv \tilde{\gamma}^\mu C.$$

То, что уравнение КДК в форме (5.13) не является непосредственно уравнением для системы фермионных полей, ясно уже из того, что матрицы α^μ и $\overset{\times}{\alpha}^\mu$, как и их прямая сумма, не удовлетворяют алгебре КД (2.11).

Чтобы утверждение об “истинно бозонной форме” (5.13) уравнения КДК сделать совершенно наглядным, запишем уравнение (5.13) в явно ковариантной бозонной форме. Для этого достаточно определить через неприводимый $\mathcal{P}$ -ковариант $\vec{\mathcal{E}}$ следующий комплекснозначный тензор:

$$\mathcal{B}^{\mu\nu} = -\mathcal{B}^{\nu\mu}, \quad \mathcal{B}^{0k} = \mathcal{E}^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.14)$$

обладающий свойством

$$\hat{\varepsilon} \mathcal{B}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{B}_{\rho\sigma} = i \mathcal{B}^{\mu\nu} \Rightarrow \mathcal{B}^{jk} = i \varepsilon^{jkl} \mathcal{B}^{0l} \quad (5.15)$$

(т.е. по определению оператор $\hat{\varepsilon}$ дуального сопряжения комплексного поля $\mathcal{B}^{\mu\nu}$ совпадает с мнимой единицей i). Как следует из (5.6) и (5.8), действие спинного оператора $\overset{\text{B(T)}}{s}_{\rho\sigma}$ на тензор $\mathcal{B}^{\mu\nu}$ задается формулой

$$\overset{\text{B(T)}}{s}_{\rho\sigma} \mathcal{B}_{\mu\nu} = g_{\rho\mu} \mathcal{B}_{\sigma\nu} + g_{\mu\sigma} \mathcal{B}_{\nu\rho} + g_{\sigma\nu} \mathcal{B}_{\rho\mu} + g_{\nu\rho} \mathcal{B}_{\mu\sigma}, \quad (5.16)$$

откуда, в частности, следует стандартный закон преобразования тензора $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^{\mu\nu})$:

$$\mathcal{B}^{\mu\nu}(x) \rightarrow \mathcal{B}'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \mathcal{B}^{\alpha\beta}(x), \quad x' = \Lambda x + a. \quad (5.17)$$

В терминах комплекснозначных бозонных полей $\mathcal{P}$ -ковариантов $\Phi, \mathcal{V}^\mu, \mathcal{B}^{\mu\nu}$ — уравнение КДК (5.3) имеет следующий явно ковариантный вид:

$$\begin{cases} \partial_\nu \mathcal{B}^{\mu\nu} + \partial^\mu \Phi + m^2 \mathcal{V}^\mu = 0, & \partial_\mu \mathcal{V}^\mu = \Phi, \\ \mathcal{B}^{\mu\nu} + \partial^\mu \mathcal{V}^\nu - \partial^\nu \mathcal{V}^\mu - i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \mathcal{V}_\sigma = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Наглядно видно, что уравнение КДК (5.18) ((5.13)) (эквивалентное уравнению (5.3)) в В-представлении содержит только неприводимые тензорные $\mathcal{P}$ -коварианты ((0,0)-скаляр Φ , (1/2, 1/2)-вектор $\mathcal{V}^\mu$ и (0,1)-тензор $\mathcal{B}^{\mu\nu}$). Иначе говоря, уравнение КДК как уравнение для бозонов не содержит полей с повторяющимися спиновыми состояниями.

ЗАМЕЧАНИЕ 4 (о связи уравнения КДК со стандартным уравнением ДК). Во многих работах (см. обзор [3] и приведенные в нем ссылки) исходное уравнение ДК

$$(d - \delta + m)\phi = 0 \quad (5.19)$$

как уравнение для неоднородной дифференциальной формы в В-представлении записывается для 16-компонентного вещественнозначного поля. Это последнее в наших обозначениях выглядит как

$$\begin{cases} \partial_\nu B^{\mu\nu} + \partial^\mu \varphi + m^2 A^\mu = 0, & \partial_\mu A^\mu = \varphi, \quad B^{\nu\mu} = -B^{\mu\nu}, \\ \partial_\nu \varepsilon B^{\mu\nu} + \partial^\mu \tilde{\varphi} + m^2 \tilde{A}^\mu = 0, & \partial_\mu \tilde{A}^\mu = \tilde{\varphi}, \\ B_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho \tilde{A}^\sigma = 0, & \varepsilon B^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\rho\sigma}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Переход от уравнения КДК (5.18) ((5.13)) к системе уравнений (5.20) осуществляется выделением вещественной и мнимой частей комплекснозначных ковариантов $\Phi, \vec{\mathcal{E}}$ (или $B^{\mu\nu}$), $\mathcal{V}^\mu$, а именно

$$\Phi = \varphi - i\tilde{\varphi}, \quad \mathcal{E}^k = E^k - iH^k, \quad B^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} - i\varepsilon B^{\mu\nu}, \quad \mathcal{V}^\mu = A^\mu - i\tilde{A}^\mu, \quad (5.21)$$

где

$$B^{\mu\nu} = -B^{\nu\mu}; \quad B^{0k} = E^k, \quad B^{jk} = \varepsilon^{jkl} H^l. \quad (5.22)$$

Заметим, что действие спинного оператора $\hat{S}_{\rho\sigma}^{B(T)}$ на вещественнозначное поле $B^{\mu\nu}$ определяется той же формулой (5.16). Однако комплекснозначное поле $B^{\mu\nu}$ неприводимо (оно есть $(0, 1)$ -ковариант группы $\mathcal{L}$), тогда как вещественное поле $B^{\mu\nu}$ содержит 6 независимых компонент E^i, H^i , т.е. приводимо (оно есть $(0, 1) \oplus (1, 0)$ -ковариант группы $\mathcal{L}$). Таким образом, система уравнений (5.20) в отличие от уравнения КДК (5.18) содержит поля с дважды повторяющимися спинными состояниями. В этом смысле можно утверждать, что КДК (5.18) ((5.3), (1.2a)) является “более фундаментальным” уравнением, чем ДК (5.19) ((5.20)). Здесь имеет место полная аналогия соотношения “фундаментальности” стандартного 4-компонентного уравнения Дирака (с неприводимыми матрицами γ^μ и комплекснозначным спинором ψ) и 8-компонентного уравнения Дирака, получаемого из первого заменой $\psi = \text{Re } \psi + i \text{Im } \psi$ с последующим выделением в уравнении Дирака вещественной и мнимой частей спинора ψ .

Обратим внимание на то, что оператор $\hat{C}$, т.е. (4×4) -матрица (2.10), в В-представлении есть просто оператор комплексного сопряжения, $\hat{C} \rightarrow W \hat{C} W^{-1} = C$, а (4×4) -блоки $\hat{s}$ в (8×8) -матрицах $\tilde{s}$ (4.1) в В-представлении (т.е. при переходе $\hat{s} \rightarrow s' = W \hat{s} W^{-1}$) имеют вид

$$s'_{\mu\nu} = C \frac{1}{4} [\tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu] C = \frac{1}{4} [\tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu], \quad \tilde{\gamma}_\mu \equiv C \tilde{\gamma}_\mu C, \quad (5.23)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}_0, \quad \tilde{\gamma}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C, \quad \tilde{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} C, \\ \tilde{\gamma}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C, \quad \tilde{\gamma}_4 = i, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2s'_{01}, & \check{\gamma}_{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2s'_{02}, \\
\check{\gamma}_{03} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2s'_{03}, & \check{\gamma}_{jk} &= i\varepsilon^{jkl}\check{\gamma}_{ol} = 2s'_{jk}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Неприводимые матрицы $\check{\gamma}_{\tilde{\mu}}$ (5.24), $\tilde{\mu} = \overline{0, 4}$, конечно, удовлетворяют соотношениям (2.11); будем называть их матрицами Дирака в *экзотическом* В-представлении. Как следует из теоремы 6, матрицы

$$s'_{0k} \equiv \begin{pmatrix} -s'_{0k} & 0 \\ 0 & s'_{0k} \end{pmatrix}, \quad \check{s}'_{jk} \equiv \begin{pmatrix} s'_{jk} & 0 \\ 0 & s'_{jk} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}^{4'} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

являются генераторами чисто матричной алгебры $\tilde{A}_8$ инвариантности уравнения (5.3) (т.е. уравнения КДК в В-представлении). Они порождают соответствующие чисто матричные преобразования бозонных ковариантов $\mathcal{B}^{\mu\nu}$, $\mathcal{V}^\mu$, Φ (не меняющие их аргументов $x = (x^\mu)$), которые являются преобразованиями инвариантности системы уравнений (5.18).

ЗАМЕЧАНИЕ 5 (об отсутствии других $\mathcal{P}$ -симметрий уравнения КДК). Уравнение КДК (1.2а) ((1.2)) с отличными от нуля параметрами $\kappa_{1,2}$, особенно уравнение

$$(\Gamma^\mu \partial_\mu - i\tilde{\Gamma}' m)\Psi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma \partial \psi_1 - m \psi_2 = 0, \\ \gamma \partial \psi_2 + m \psi_1 = 0, \end{cases} \quad \tilde{\Gamma}' \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.27}$$

получаемое из (1.2а) неунитарным преобразованием V (1.3), выглядит настолько “симметрично”, что можно подозревать наличие еще и других бозонных $\mathcal{P}$ -симметрий. А именно можно думать, что операторы $j_{\mu\nu}$ из (3.5) со спиновыми матрицами $s_{\mu\nu} \in 2D^{\text{TS}}$ или $s_{\mu\nu} \in 2D^V$ коммутируют с оператором уравнения (1.2а). В этом случае уравнение КДК было бы уравнением для пары (связанных) тензорно-скалярных или пары векторных полей, соответственно. Оказывается, однако, что такие $\mathcal{P}$ -симметрии отсутствуют. Причина в том, что матрицы

$$s_{\mu\nu}^{(8)} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \hat{s}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

в отличие от матриц $\tilde{s}_{\mu\nu}$ (4.1) при $\kappa_{1,2} \neq 0$ не являются преобразованиями инвариантности ни уравнения (1.2а), ни даже уравнения (5.27). Такая симметрия имеет место для безмассового уравнения КДК (когда $\kappa_1 = \kappa_2 = m = 0$). Но в этом случае уравнение КДК расщепляется на два независимых безмассовых уравнения Дирака (когда 4-спиноры ψ_1, ψ_2 с $m = 0$ никак не связаны) – краткий обзор бозонных симметрий для такого случая приведен в разделе 1.

Понятно, что случай $m \equiv \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} = 0$ достигается не только при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, но и при $\kappa_1 = 0, \kappa_2 \neq 0$ или $\kappa_2 = 0, \kappa_1 \neq 0$. Оказывается, однако, что уравнение КДК с такими $\kappa_{1,2}$, т.е., например, система уравнений $\gamma \partial \psi_1 = 0$, $\gamma \partial \psi_2 + \kappa_2 \psi_1 = 0$, не имеет нетривиального решения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрим основные результаты данного исследования и, в частности, отличия исследуемого уравнения от давно известного стандартного 16-компонентного уравнения ДК.

В данной работе исследуется фактически новое 8-компонентное уравнение КДК (1.2а) ((1.2), (5.18)) для комплексного массивного поля, т.е. уравнение 1-го порядка (по ∂_μ) в пространстве $\mathcal{S}'_{4,8} \equiv (\mathcal{S}'(\mathcal{M}(1,3)) \times \mathbb{C}^8)'$ 8-компонентных комплексных обобщенных функций Шварца над $\mathcal{M}(1,4)$. Во введении показано (теорема 1), что это уравнение лишь *неунитарным преобразованием* (1.4) расщепляется на *два* уравнения Дирака (1.5) с неприводимыми матрицами γ^μ (тогда как стандартное уравнение ДК расщепляется на *четыре* уравнения Дирака). Причем *знаки масс* в уравнениях Дирака в (1.5) *разные*, и это существенно (см. замечание 1 в разделе 3): при одинаковых знаках масс соответствующее объединение уравнений в (1.5) (по неунитарному преобразованию, обратному к (1.4)) в 8-компонентное уравнение КДК было бы уравнением с мнимой массой (т.е. уравнением для тахионного 8-компонентного поля). Во вспомогательном разделе 2 кроме прочего приведен (теорема 2) явный вид оператора $\hat{C}$ (2.10), который переводит стандартные спинорные матрицы $s_{\mu\nu}^{(S)}$ (2.6), не являющиеся преобразованиями инвариантности безмассового уравнения Дирака (1.7), в матрицы $\hat{s}_{\mu\nu}$ (2.9), которые уже являются преобразованиями инвариантности этого уравнения (они совпадают с шестью генераторами алгебры A_8 Паули–Гюрши). В разделе 3 приведено основное конструктивное утверждение (теорема 4) из работы [7] о том, как через матрицы $\hat{s}_{\mu 5}$, $\mu = \overline{0, 3}$, из множества $\{s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{\mu}\hat{\nu} = \overline{0, 5}\}$ матричных генераторов *произвольного представления* $D(\mathcal{L}(1,5))$ универсальной накрывающей $\mathcal{L}(1,5)$ собственной ортохронной подгруппы $L_+^\uparrow(1,5)$ группы $O(1,5)$ псевдоортогональных преобразований в 6-мерном пространстве Минковского $\mathcal{M}(1,5)$ выписываются релятивистские уравнения типа Бхабха, т.е. $\mathcal{P}$ -инвариантные уравнения (3.3) 1-го порядка (по ∂_μ) для полей как многокомпонентных функций над $\mathcal{M}(1,3)$, а через $s_{\tilde{\mu}5} \subset \{s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\}$, $\tilde{\mu} = \overline{0, 4}$, выписываются аналогичные уравнения в 5-мерии (причем в общем случае матрица s_{45} является независимой, она не выражается через матрицы $s_{\mu 5}$). Здесь показано, что обсуждаемое уравнение КДК (1.2а) ((1.2)) есть фермионное уравнение типа Бхабха (т.е. релятивистски-инвариантное уравнение для связанной системы $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ двух массивных фермионных полей со спином $s = 1/2$). Явно выписано также уравнение КДК в 5-мерии как частный случай уравнений типа Бхабха, инвариантных относительно группы $\mathcal{P}(1,4)$.

Далее, как показано в разделе 4 (теорема 6), несмотря на то что $m \equiv \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \neq 0$, чисто матричной алгеброй инвариантности уравнения КДК (1.2а) является алгебра $\tilde{A}_8$ – аналог алгебры A_8 Паули–Гюрши (матричной алгебры инвариантности безмассового уравнения Дирака (1.7)); генераторы алгебры $\tilde{A}_8$ строятся из (4×4) -матриц алгебры A_8 . Через шесть генераторов $\tilde{s}_{\mu\nu}$ (4.1) из алгебры $\tilde{A}_8$ выражаются генераторы представления изоспиновой группы $SU(2)$ как группы внутренней симметрии системы фермионных полей $(\psi_1, \psi_2) = \Psi$. Используя стандартные спинорные матрицы $\tilde{s}_{\rho\sigma}$ из (3.15) и матрицы $\tilde{s}_{\rho\sigma}$ из (4.1), строятся комбинации (4.8) – спинорные матрицы как слагаемые генераторов (4.6) дополнительного бозонного (тензорно-скалярно-векторного) $\mathcal{P}$ -представления (теорема 8), которое также является группой инвариантности уравне-

ния КДК.

В разделе 5 через операторы (5.2) (переводящие безмассовое уравнение Дирака в его бозонные формы) строится преобразование $\Psi = (\psi_1, \psi_2) \rightarrow (\vec{\mathcal{E}}, \Phi, \mathcal{V})$ уравнения КДК (1.2а) ((1.2)) в его явно ковариантную бозонную форму, а именно уравнение (5.18) для системы связанных самодуального тензорного $(\mathcal{B}^{\mu\nu}) \equiv \mathcal{B} \sim \vec{\mathcal{E}}$, скалярного Φ и векторного $(\mathcal{V}^\mu) \equiv \mathcal{V}$ полей.

Таким образом, уравнение КДК (1.2а) ((5.18)), будучи инвариантным относительно двух различных унитарно-неэквивалентных представлений универсальной накрывающей $\mathcal{P}$ собственной ортохронной группы Пуанкаре $T(4) \times L_+^\uparrow(1, 3)$, одинаково пригодно для описания системы связанных как двух массивных фермионных полей $(\psi_1, \psi_2) = \Psi$, так и трех массивных бозонных полей $(\mathcal{B}, \Phi, \mathcal{V})$. Основное преимущество уравнения КДК по сравнению со стандартным уравнением ДК состоит в том, что уравнение КДК есть уравнение для системы $\mathcal{P}$ -неприводимых бозонных ковариантов $\mathcal{B}^{\mu\nu}, \Phi, \mathcal{V}^\mu$ или для системы двух стандартных (минимально приводимых) спинорных полей ψ_1, ψ_2 . Поэтому общие решения 8-компонентного уравнения КДК в фермионной или бозонной формах в отличие от стандартного 16-компонентного уравнения ДК не содержат “лишних” (повторяющихся) спиновых квантово-механических состояний. Подробнее эти и другие детали анализа уравнения КДК мы рассмотрим в последующих публикациях, которые, в частности, будут посвящены нахождению общих фермионных и бозонных решений уравнения КДК, связи между фермионными и бозонными амплитудами компаунд-поля Ψ и другим вопросам.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ДФФД Украины, договор № Ф7/458-2001.

Список литературы

- [1] *E. Kähler.* Rend. Mat. 1962. V. 21. № 3-4. P. 425.
- [2] *P. Becher, H. Joos.* Z. Phys. C. 1982. V. 15. P. 343; *J. A. Bullinaria.* Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 1276.
- [3] *S. I. Kruglov.* Int. J. Theor. Phys. 2002. V. 41. № 4. P. 653.
- [4] *R. Edwards, D. Ritchie, D. Zwanziger.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 296. P. 961.
- [5] *V. M. Simulik, I. Yu. Krivsky.* Adv. Appl. Clifford Algebr. 1998. V. 8. № 1. P. 69.
- [6] *H. J. Bhabha.* Rev. Mod. Phys. 1945. V. 17. № 2/3. P. 200.
- [7] *І. Ю. Кривський.* Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. 2001. № 9. С. 24.
- [8] *Н. Х. Ибрагимов.* ТМФ. 1969. Т. 1. № 3. С. 350.
- [9] *V. I. Fushchich, I. Yu. Krivsky.* Nucl. Phys. B. 1969. V. 14. P. 537.
- [10] *I. Yu. Krivsky, V. M. Simulik.* Adv. Appl. Clifford Algebr. 1996. V. 6. № 2. P. 249.

Поступила в редакцию 27.IV.2004 г.,
после доработки 15.X.2004 г.