Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Лазур, А. К. Рейтий, В. В. Рубиш, Метод ВКБ для уравнения Дирака со скалярно-векторной связью, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 1, 83–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:30:19

© 2005 г. В. Ю. Лазур*, А. К. Рейтий*, В. В. Рубиш*

МЕТОД ВКБ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА СО СКАЛЯРНО-ВЕКТОРНОЙ СВЯЗЬЮ

Построена рекуррентная схема нахождения ВКБ-разложений для решений уравнения Дирака во внешнем центрально-симметричном поле со скалярно-векторной лоренцевой структурой потенциалов взаимодействия. Получены квазиклассические формулы для радиальных функций в классически разрешенной и запрещенной областях, найдены условия их сшивания при переходе через точки поворота. Проведено обобщение правила квантования Бора–Зоммерфельда на релятивистский случай, когда частица спина $1/2$ взаимодействует со скалярным и электростатическим внешними полями одновременно. В квазиклассическом приближении получено общее выражение для ширины квазистационарных уровней, известное ранее лишь для электростатических потенциалов барьерного типа (формула Гамова). Показано, что для потенциалов кулоновского и осцилляторного типов полученное правило квантования точно воспроизводит энергетический спектр. На примере потенциала воронки продемонстрировано, что предложенная версия метода ВКБ не только расширяет возможности аналитического исследования спектра энергий и волновых функций, но и обеспечивает приемлемую точность вычислений даже для состояний с $n_r \sim 1$.

Ключевые слова: уравнение Дирака, лоренц-структура потенциала взаимодействия, метод ВКБ, эффективный потенциал, условие квантования, ширина уровня, потенциальные модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Релятивистские водородоподобные (ВП) атомы и тяжело-легкие кварк-антикварковые ($Q\bar{q}$) системы, являющиеся их КХД-аналогами, представляют собой идеальные объекты для исследований, позволяющие подвергать результаты квантовой теории очень точной экспериментальной проверке. Особую роль в развитии релятивистской теории связанных состояний играет уравнение Дирака. Из этого уравнения следует наличие спина и спинового момента у электрона (позитрона), кварка (антикварка). Оно также позволяет учесть спин-орбитальные и спин-спиновые взаимодействия в ВП-атомах и $Q\bar{q}$ -системах и, соответственно, предсказать тонкую и сверхтонкую структуру уравнений энергии. Уравнение Дирака с радиационными поправками [1], [2], предложенное Швингером, позволяет учитывать многократное взаимодействие частицы с собственным и внешними полями.

*Ужгородский национальный университет, Ужгород, Украина. E-mail: lazur@univ.uzhgorod.ua

Важное место в современной релятивистской теории связанных состояний занимает метод эффективного уравнения Дирака. В этом методе возможен последовательный переход от двухчастичной теории к приближению внешнего поля [3]. Как следует из результатов работ [3], [4], такая возможность реализуется и имеет практические преимущества в случае ВП-атомов и $Q\bar{q}$ -систем. Однако в большинстве задач, в которых физически оправданна концепция внешнего поля [4], попытки найти точные решения уравнения Дирака с более или менее реалистичными потенциалами взаимодействия пока наталкиваются на непреодолимые трудности. Для отыскания решений чаще всего применяются либо численные, либо асимптотические методы. Во многих теоретических и прикладных вопросах именно возможность получить асимптотическое решение позволяет провести наиболее полный анализ задачи. Поэтому едва ли есть необходимость подробно объяснять важность создания и развития асимптотических методов решения уравнения Дирака.

Квазиклассическое приближение Вентцеля–Крамера–Бриллюэна (ВКБ) является одним из основных и наиболее универсальных асимптотических методов решения задач квантовой механики и математической физики (см., например, [5]–[9]), для которых неизвестны или слишком громоздки точные решения. В отличие от теории возмущений это приближение не связано с малостью взаимодействия и поэтому имеет более широкую область применимости, позволяя исследовать качественные закономерности в поведении и свойствах квантово-механических систем. В частности, ординарный метод ВКБ [5]–[9] (для уравнения Шредингера) успешно использовался для атома водорода в постоянных электрическом и магнитном внешних полях (см., например, [5], [10] и указанные там ссылки), для ряда модельных потенциалов [11], в квантово-механической задаче двух кулоновских центров [12] и др. Обсуждение современного состояния этого метода, различных его вариантов и приложений в нерелятивистской теории атомов и молекул, квантовой химии, в задачах теории столкновений и т.д. можно найти в [13], [14].

Успешное применение приближения ВКБ к различным задачам нерелятивистской физики стимулировало распространение данного метода и на релятивистские системы, описываемые уравнением Дирака. В порядке исторической справки укажем, что предельный переход от уравнения Дирака во внешнем поле к уравнению Гамильтона–Якоби для классической релятивистской частицы впервые рассмотрел Паули [15] и затем более подробно ряд авторов [16]. Задача построения квазиклассических решений уравнения Дирака в общем многомерном случае была решена Масловым в рамках метода канонического оператора [17].

Теория квазиклассического приближения для уравнения Дирака в сильном ($E_0 > 2m_e c^2$, где E_0 – энергия связи электрона) внешнем поле начала систематически разрабатываться в тесной связи с проблемой глубоких уровней [18]–[21], имеющей фундаментальное значение для квантовой электродинамики (критический заряд ядра Z_c и спонтанное рождение позитронов из вакуума при $Z > Z_c$, см. [22]–[25]). Применение метода ВКБ к релятивистской кулоновской задаче с зарядом $Z > 137$ базировалось в ранних работах [18]–[21] на квадрировании уравнения Дирака (метод эффективного потенциала [22], [23]). Такой подход весьма близок к обычной схеме получения разложений

ВКБ [5]–[9] и хорошо работает в докритической области $Z \leq Z_c$, $E_0 \geq -m_e c^2$ (т.е. там, где спонтанное рождение позитронов еще невозможно). Однако для состояний с энергией $E < -m_e c^2$ подстановка $\chi(r) = (m c^2 + E - V)^{-1/2} F(r)$, используемая в данном методе, становится сингулярной в точке $r = r_g$ такой, что $V(r_g) = m c^2 + E$ (рассматривается потенциал притяжения: $V(r) < 0$, $0 < r < \infty$). Вследствие этого обычные квазиклассические формулы [5]–[9] теряют смысл вблизи точки $r = r_g$ из-за расходимости фазовых интегралов. Разные авторы [18]–[21] преодолевали эту трудность по-разному, иногда весьма остроумно [19], [21], но окончательное и полное решение дано только в [26], [27]. Выяснилось, что указанная трудность носит чисто формальный характер, так как исходное уравнение Дирака не является сингулярным в точке $r = r_g$. Более того, сингулярность при $r = r_g$ вообще не возникает, если применять приближение ВКБ не к уравнению второго порядка для $\chi(r)$, а непосредственно к исходной системе Дирака для радиальных волновых функций F и G . Полученные на этом пути квазиклассические формулы для решений уравнения Дирака в сильном внешнем поле имеют многочисленные приложения в теории тяжелых и сверхтяжелых атомов [28].

Однако в последние годы возник значительный интерес к изучению поведения квантовых систем фермионов в присутствии вместе взятых электромагнитного (векторного) и скалярного внешних полей. Такие системы обладают рядом необычных черт, существенно отличных от тех, которые свойственны фермионам в присутствии одного лишь электромагнитного поля. Так, например, в отличие от электромагнитного, скалярное поле действует одинаково как на частицы, так и на античастицы. Поэтому картина уровней энергии фермионов, взаимодействующих со скалярным и векторным (например, кулоновским) полем одновременно, может существенно отличаться от привычной нам картины спектра релятивистской кулоновской задачи.

Дополнительные стимулы к изучению подобных задач появились недавно в физике элементарных частиц. Речь идет о моделях строения смешанных мезонов (КХД-аналогов ВП-атомов), состоящих, например, из одного легкого антикварка $\bar{q}$ и одного тяжелого кварка Q ($Q\bar{q}$ -мезоны; см. [29], [30]). Рассматривая в пределе бесконечно тяжелого кварка Q уравнение Дирака как уравнение для одного легкого антикварка $\bar{q}$, можно изучить (подобно картине ВП-атомов) ряд таких важных аспектов теории тяжело-легких кварк-антикварковых систем, как релятивистскую динамику легкого антикварка $\bar{q}$ во внешнем поле тяжелого кварка Q , лоренц-структуру дальнодействующей (запирающей) части $Q\bar{q}$ -взаимодействия, тонкую структуру спектра смешанных мезонов, влияние на спектр спонтанного нарушения киральной симметрии и т.д. Как известно из КХД [29], [30], на малых расстояниях в силу свойства асимптотической свободы основной вклад в $Q\bar{q}$ -взаимодействие дает обычный кулоновский потенциал одноглюонного обмена $V(r) = -4\alpha_V/3r$, где α_V – константа сильного взаимодействия. С ростом расстояния основным становится скалярное запирающее взаимодействие (конфайнмент), “точный” вид которого пока не установлен. Основанные на первых принципах КХД расчеты на решетках [31] выделяют на больших расстояниях линейный (скалярный) конфайнмент $S(r) = \sigma r$, где σ – натяжение струны. Все прочие взаимодействия, разумеется, важны при более тонком описании свойств мезонов, но они являются малы-

ми взаимодействиями по сравнению со скалярным потенциалом, который обеспечивает конфайнмент кварков внутри мезонов (см. более подробно [31]).

Заметим, наконец, что уравнение Дирака со смешанной (скалярно-векторной) лоренц-структурой потенциалов взаимодействия интересно также с точки зрения его возможных приложений в теории адронных атомов [32]. В принципе не исключено, что это же уравнение может оказаться полезным и для описания эффектов в физике твердого тела (например, в двухзонных полупроводниках [33]).

Учитывая, что в будущем интерес к подобным исследованиям несомненно будет расти, представляется актуальным распространение предложенной Масловым [17] и развитой в работах [26], [27] техники построения решений ВКБ уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле на случай спинорного уравнения со смешанной скалярно-векторной связью. Можно ожидать, что такой подход окажется плодотворным и при описании поведения квантовых систем фермионов во внешних полях со смешанной лоренц-структурой потенциалов взаимодействия, для которых точные решения уравнения Дирака либо не существуют, либо слишком громоздки.

Настоящая статья построена следующим образом. В разделе 2 с помощью известной техники левых и правых собственных векторов соответствующей однородной системы построена рекуррентная схема поиска разложений ВКБ для решений уравнения Дирака во внешнем центрально-симметричном поле со смешанной скалярно-векторной лоренц-структурой потенциалов взаимодействия. На этой основе в разделе 3 получены квазиклассические формулы для радиальных функций F и G в классически разрешенной и запрещенной областях, найдены условия их сшивания при переходе через точки поворота. Там же проведено обобщение правила квантования Бора–Зоммерфельда на релятивистский случай, когда частица спина $1/2$ взаимодействует со скалярным и электростатическим внешними полями одновременно. В квазиклассическом приближении получено общее выражение для ширины квазистационарных уровней, известное ранее лишь для электростатических потенциалов барьерного типа. В разделе 4 показано, что для некоторых модельных потенциалов (кулоноподобного и осцилляторного) со скалярно-векторной структурой полученное нами правило квантования точно воспроизводит энергетический спектр. На примере потенциала воронки показано, что используемая версия метода ВКБ не только расширяет возможности аналитического исследования спектра энергий и волновых функций, но и обеспечивает вполне приемлемую точность вычислений даже для состояний с радиальным квантовым числом $n_r \sim 1$.

2. РЕКУРРЕНТНАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВКБ-РАЗЛОЖЕНИЙ

Задача описания движения релятивистской частицы спина $1/2$ в эффективном поле, состоящем из статического скалярного и электрического внешних полей, сводится в нашей постановке к решению уравнения Дирака со смешанной скалярно-векторной связью ($c = \hbar = 1$)

$$[\alpha \hat{\mathbf{p}} + \beta(m + S(\mathbf{r})) + V(\mathbf{r})]\Psi = E\Psi. \quad (1)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и β – стандартные матрицы Дирака, $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla_{\mathbf{r}}$ – оператор импульса, E и m – полная энергия и масса покоя частицы, $S(r)$ – скалярный лоренц-по-

тенциал, а потенциал $V(r)$ является нулевой (временной) компонентой 4-вектора A_μ : $\mathbf{A} = 0$, $V(r) = -eA_0(r)$, $e > 0$.

Получим формулы квазиклассического приближения для уравнения Дирака (1), ограничившись классом потенциалов с центральной симметрией: $S(\mathbf{r}) = S(r)$, $V(\mathbf{r}) = V(r)$. В соответствии с этим будем искать волновую функцию Ψ стационарных состояний (в стандартном представлении) в виде

$$\Psi = r^{-1} \begin{pmatrix} F(r)\Omega_{j l M}(\mathbf{n}) \\ iG(r)\Omega_{j l' M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\Omega_{j l M}$ – шаровой спинор [2], j и M – полный угловой момент и его проекция, соответственно ($j = l \pm 1/2$), l – орбитальный момент ($l + l' = 2j$), $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. После отделения угловых переменных вектора $\mathbf{n}$ в уравнении (1) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для радиальных волновых функций F и G

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dr} + \frac{\tilde{k}}{r}F - \frac{1}{\hbar}[(E - V(r)) + (m + S(r))]G &= 0, \\ \frac{dG}{dr} - \frac{\tilde{k}}{r}G + \frac{1}{\hbar}[(E - V(r)) - (m + S(r))]F &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь в явном виде восстановлена зависимость от постоянной Планка $\hbar$ и использованы следующие новые обозначения:

$$\tilde{k} = \hbar k, \quad k = \begin{cases} -(l+1) & \text{для } j = l + 1/2 \quad (l = 0, 1, \dots) \\ l & \text{для } j = l - 1/2 \quad (l = 1, 2, \dots) \end{cases}, \quad (4)$$

так что $|k| = j + 1/2 = 1, 2, \dots$. Знак k , наряду с $\hbar j$, $\hbar M$ и энергией E , является интегралом движения для дираковской частицы в произвольном центральном поле.

Систему (3) можно свести к уравнению второго порядка, исключив одну из неизвестных радиальных функций, но при построении формальных асимптотических решений удобнее оперировать непосредственно с самой системой. Запишем ее в матричной форме (штрих означает производную по r)

$$\chi' = \frac{1}{\hbar} D \chi, \quad \chi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\tilde{k}/r & m + S(r) + E - V(r) \\ m + S(r) - E + V(r) & \tilde{k}/r \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Эта система содержит естественный малый параметр $\hbar$, и задача заключается в асимптотическом интегрировании этой системы при $\hbar \rightarrow 0$.

Приведем алгоритм построения формальных асимптотических решений. Следуя стандартной схеме асимптотической теории систем линейных дифференциальных уравнений [34], будем искать решение системы (5) в виде асимптотического ряда по степеням $\hbar$:

$$\chi(r) = \exp\left\{\int^r y(r') dr'\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \varphi^{(n)}(r), \quad (6)$$

$$y(r) = \hbar^{-1} y_{-1}(r) + y_0(r) + \hbar y_1(r) + \dots, \quad \varphi^{(n)}(r) = \begin{pmatrix} \varphi_F^{(n)}(r) \\ \varphi_G^{(n)}(r) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где верхняя (нижняя) компонента $\varphi_F^{(n)}$ ($\varphi_G^{(n)}$) вектора $\varphi^{(n)}$ отвечает радиальной функции F (G). Подставляя разложение (6) в (5) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\hbar$, получим бесконечную систему рекуррентных уравнений для неизвестных скалярных $y_n(r)$ и векторных $\varphi^{(n)}(r)$ функций

$$(D - y_{-1}I)\varphi^{(0)} = 0, \quad (8)$$

$$(D - y_{-1}I)\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)'} + \sum_{k=0}^n y_{n-k}\varphi^{(k)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Здесь $0, I$ — нулевая и единичная (2×2) -матрицы. Из уравнения (8) следует, что $y_{-1}(r)$ должно быть собственным значением, а $\varphi^{(0)} \equiv \varphi_i$ — одним из собственных (правых) векторов матрицы $D(r)$. Собственные значения $y_{-1} \equiv \lambda_i$ являются корнями характеристического уравнения $\det(D - y_{-1}I) = 0$:

$$y_{-1} \equiv \lambda_i = \pm q, \quad q = \sqrt{(m + S(r))^2 - (E - V(r))^2 + \left(\frac{k}{r}\right)^2}. \quad (10)$$

Тогда соответствующие правые собственные векторы φ_i в покомпонентной форме записи равны

$$\varphi_i = A_1 \begin{pmatrix} m + S + E - V \\ \lambda_i + kr^{-1} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} \lambda_i - kr^{-1} \\ m + S - E + V \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь и в дальнейшем $\hbar = c = 1$; индекс i принимает два значения $\pm$, ассоциированные с двумя значениями функции $\lambda_i(r) = \pm q(r)$; $A_1(r)$ и $A_2(r)$ — нормировочные множители, которые фиксируем позже по соглашению.

Поскольку матрица $D(r)$ не является симметричной, то наряду с правыми собственными векторами мы должны ввести также левые собственные векторы $\check{\varphi}_i$. Последние определяются условиями

$$\check{\varphi}_i(D - \lambda_i I) = 0, \quad (12)$$

$$\check{\varphi}_i = B_1(m + S - E + V, \lambda_i + kr^{-1}) = B_2(\lambda_i - kr^{-1}, m + S + E - V). \quad (13)$$

К этому нужно добавить, что $\check{\varphi}_i$ не совпадает с φ_i^T ; при этом левые и правые собственные векторы матрицы $D(r)$ ортогональны:

$$(\check{\varphi}_i, \varphi_j) = \sum_{\alpha=1}^2 (\check{\varphi}_i)_\alpha (\varphi_j)_\alpha = \text{const } \delta_{ij}. \quad (14)$$

Как обычно, δ_{ij} есть символ Кронекера.

Для определения функции $y_0(r)$ используем уравнение (9) при $n = 0$, положим в нем $\varphi^{(0)} = \varphi_i$ и умножим обе части слева на вектор-строку $\check{\varphi}_i$. Тогда в силу (12) левая часть итогового равенства обратится в нуль, и мы получим уравнение для $y_0(r)$, из которого следует, что

$$y_0(r) = -\frac{(\check{\varphi}_i, \varphi_i')}{(\check{\varphi}_i, \varphi_i)}. \quad (15)$$

Как мы видели выше (см. (11), (13)), собственные векторы φ_i , $\check{\varphi}_i$ определяются с точностью до произвольных множителей $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$. Этот произвол можно устранить, наложив на φ_i , $\check{\varphi}_i$ естественное условие

$$(\check{\varphi}_i, \varphi'_i) = (\check{\varphi}'_i, \varphi_i). \quad (16)$$

В этом случае интеграл в (6) вычисляется в замкнутом виде:

$$\int^r y_0(r') dr' = \ln[(\check{\varphi}_i, \varphi_i)^{-1/2}]. \quad (17)$$

Тогда искомое квазиклассическое решение системы (5) таково:

$$\chi_i = (\check{\varphi}_i, \varphi_i)^{-1/2} \exp\left\{\int^r \lambda_i(r') dr'\right\} \varphi_i. \quad (18)$$

Продолжив эти построения, можно последовательно найти и все остальные члены $y_1, y_2, \dots$, $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots$ в разложении (6). Но формулы для них оказываются громоздкими, поэтому в приложениях используется, как правило, только главный член (18) разложения (6), соответствующий известному выражению $\psi \sim p^{-1/2} \exp\{i \int^r p(r') dr'\}$ обычной нерелятивистской квазиклассики [5]. На самом деле, здесь существенным моментом является тот факт, что формальное разложение (6) по степеням $\hbar$ в общем случае не сходится, а представляет собой так называемый асимптотический ряд, несколько первых членов которого дают хорошее приближение к точному решению, если только параметр разложения $\hbar$ достаточно мал.

Наконец, нам осталось показать, что условие (16) всегда можно удовлетворить надлежащим выбором нормировочных множителей $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ в формулах (11), (13). Так, подстановка (11), (13) в (16) приводит к уравнению

$$\frac{A_1 B'_1 - A'_1 B_1}{A_1 B_1} = -\frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{q(q \pm kr^{-1})}, \quad (19)$$

откуда и из представления (18) приходим к следующему результату для главного члена асимптотики радиальных функций χ_i в подбарьерной области:

$$\begin{aligned} \chi_{\pm} = & \left[2q\left(q \pm \frac{k}{r}\right)\right]^{-1/2} \times \\ & \times \exp\left\{\pm \int^r q dr + \frac{1}{2} \int^r \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{q(q \pm kr^{-1})} dr\right\} \begin{pmatrix} m+S+E-V \\ kr^{-1} \pm q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Если исходить из второй формы записи собственных векторов φ_i и $\check{\varphi}_i$ (с нормировочными множителями A_2 и B_2 в формулах (11) и (13)), то после аналогичных построений придем к следующему представлению ВКБ:

$$\begin{aligned} \chi_{\pm} = & \left[2q\left(q \mp \frac{k}{r}\right)\right]^{-1/2} \times \\ & \times \exp\left\{\pm \int^r q dr - \frac{1}{2} \int^r \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{q(q \mp kr^{-1})} dr\right\} \begin{pmatrix} \pm q - kr^{-1} \\ m+S-E+V \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Прежде чем обсуждать смысл полученных формул, следует отметить, что в классически запрещенных областях, где $q(r) > 0$, функции $y_{-1}(r)$ и $y_0(r)$ вещественнозначны. Знаки плюс (минус) в (20) и (21) соответствуют решению, экспоненциально возрастающему (убывающему) с ростом r . Для убывающего решения (знак минус) следует использовать формулу (20) при $k < 0$ и формулу (21) при $k > 0$; для возрастающего решения – наоборот. Простой и часто эффективный способ выбора удобной формы записи решений основан на требовании положительности величины $Q_{\pm} = q \pm k/r$ в классически запрещенной области. При другом выборе решения не исключена возможность появления в выражениях для F и G неопределенности типа $0/0$ в точке $r = r_g$, где величина $Q_{\pm}$ обращается в нуль. Эта фиктивная сингулярность делает невозможным прямое использование формул (20) и (21) в окрестности точки r_g . В связи с этим получение квазиклассических формул для F и G , свободных от сингулярностей, потребовало бы раскрытия указанной неопределенности в точке r_g , что, в свою очередь, требует дополнительных довольно громоздких вычислений.

Перейдем теперь к приложениям предложенного выше варианта метода ВКБ к конкретным физическим задачам. Обычно квазиклассическое приближение используется в случае дискретного спектра и несколько реже – для вычисления волновых функций непрерывного спектра и в теории рассеяния [5]–[9], [13]. Однако во многих областях физики встречаются потенциалы с барьером, для которых вместо дискретных уровней возникают квазистационарные состояния (резонансы) с комплексной энергией $E = E_r - i\Gamma/2$. В следующем разделе мы рассмотрим эту задачу в квазиклассическом приближении, которое позволяет найти для положения резонанса E_r и его ширины Γ общие выражения, справедливые для произвольных гладких потенциалов $V(r)$ и $S(r)$ барьерного типа.

3. МЕТОД ВКБ ДЛЯ ПОДБАРЬЕРНЫХ РЕЗОНАНСОВ

В этом разделе мы вкратце рассмотрим применение метода ВКБ к одной важной проблеме, связанной с изучением распадающихся (квазистационарных) состояний квантовых объектов [35]. Такие состояния вводятся, как известно, по аналогии с обычными стационарными состояниями дискретной части спектра собственных значений дираковского гамильтониана $\hat{H}$. На комплексной плоскости энергий E им отвечают полюсы стационарной функции Грина [35] $G(E) = (E - \hat{H} + i\eta)^{-1}$.

Введение комплексных уровней энергии нарушает, однако, один из основных постулатов квантовой теории, согласно которому спектр собственных значений любого эрмитового оператора должен быть действительным, а соответствующие собственные функции – нормированными. Аналитические продолжения стационарных решений в комплексную плоскость энергий имеют, следовательно, принципиально новый смысл. Они дают простейшую и наиболее удобную аппроксимацию нестационарных решений в основной области изменения переменных, т.е. там, где точные волновые функции $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ наиболее близки к функциям стационарных связанных состояний, $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) \approx \Psi_n(\mathbf{r}) \times \exp(-iE_n t)$, $\text{Im } E_n \ll \text{Re } E_n$.

Уточнение области применимости исходных представлений теории квазистационар-

ных состояний и совершенствование расчетных методов длительное время составляли основную задачу исследований этого направления. Эта задача остается актуальной и сейчас, особенно в приложениях к конкретным системам. В качестве примеров здесь можно привести такие фундаментальные задачи атомной и ядерной физики, как ионизация атомных систем под действием внешнего электромагнитного поля [10], [36], распад радиоактивных ядер или нестабильных частиц [37], реакции отрыва электрона при низкоэнергетических соударениях атомных частиц [38] и т.д. Вместе с тем сама логика развития теории распадных состояний диктует, очевидно, постановку целого ряда качественно новых задач, аналогичных тем, которые ранее решались только в нерелятивистском приближении. Естественным путем возникают вопросы о влиянии на свойства распадающихся квазистационарных состояний самых различных физических факторов – релятивизма и спин-орбитального взаимодействия, внешних полей со смешанной лоренц-структурой потенциалов взаимодействия, адиабатически медленного изменения параметров и т.д. Результаты, полученные при решении подобных задач, представляют интерес для квантовой механики неабелевой частицы во внешнем калибровочном поле Янга–Милса [39], при рассмотрении вакуумной оболочки сверхкритических атомов [18]–[24], для описания эффектов спонтанного рождения позитронов при медленных столкновениях тяжелых ядер [23]–[28], а также с точки зрения исследования решений уравнения Дирака в сильных внешних полях.

3.1. Структура решений ВКБ. Возвращаясь к асимптотикам ВКБ (20) и (21), видим, что фигурирующая там величина $q(r)$ совпадает (с точностью до множителя $i = \sqrt{-1}$) с радиальным импульсом классической релятивистской частицы. Если записать эту величину в виде $q = \sqrt{2m(U - \bar{E})}$, то выражению (10) отвечает эффективная энергия $\bar{E} = (E^2 - m^2)/(2m)$ и эффективный потенциал (ЭП) для радиального движения

$$U(r, E) = \frac{E}{m}V + S + \frac{S^2 - V^2}{2m} + \frac{k^2}{2mr^2}. \quad (22)$$

Дальнейший анализ существенно зависит от вида ЭП $U(r, E)$ и расположения точек поворота (нулей функции $q(r)$ на полуоси $0 < r < \infty$). Для описания явлений, связанных с образованием и распадом квазистационарных состояний, выделим класс потенциалов $V(r)$ и $S(r)$, для которых ЭП $U(r, E)$ имеет вид ямы, отделенной от внешней области потенциальным барьером. Ниже мы будем считать, что $V(r)$ и $S(r)$ не имеют особенностей при $0 < r < \infty$ и подчиняются следующим условиям (в предельной точке $r = 0$):

$$\lim r^{1+\delta}V(r) = 0, \quad \lim r^{1+\delta}S(r) = 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0 \text{ и } \delta > 0. \quad (23)$$

Для потенциалов со степенным поведением на малых расстояниях

$$V(r) \sim r^{-\beta_1}, \quad S(r) \sim r^{-\beta_2}, \quad \beta_i \leq 1, \quad r \rightarrow 0, \quad (24)$$

эти условия исключают “падение на центр” [2], [23]. Для скалярных потенциалов $S(r)$, более сингулярных, чем r^{-1} , слагаемое с центробежным потенциалом в выражении (22) не играет существенной роли, и асимптотика решений F и G при $r \rightarrow 0$ не зависит от k .

Вид эффективного потенциала $U(r, E)$ барьерного типа; r_0, r_1, r_2 – корни квазимпульса (10)

Если $V(r)$ и $S(r)$ удовлетворяют условиям (23), то ЭП $U(r, E)$ имеет при $r = 0$ полюс второго порядка. Качественный ход ЭП $U(r, E)$ барьерного типа и положение точек поворота r_j при $\bar{E} < U_m$ (U_m – вершина потенциального барьера) представлены на рисунке.

В квазиклассическом приближении волновая функция квазистационарного состояния имеет разную асимптотическую форму в следующих областях: I) потенциальная яма $r_0 < r < r_1$; II) подбарьерная область $r_1 < r < r_2$; III) классически разрешенная область $r > r_2$ с квазидискретным энергетическим спектром [5]. Границами между разными областями – точками поворота r_j ($j = 0, 1, 2$) – здесь служат корни уравнения $\bar{E} = U(r, E)$. Не входя в детали вычислений, выпишем главные члены асимптотики решений системы Дирака (3) в каждой из трех указанных областей.

I. В классически разрешенной области $r_0 < r < r_1$ асимптотики ВКБ радиальных функций F и G имеют осциллирующий характер:

$$\begin{aligned} F(r) &= C_1^\pm \left[\frac{E - V + m + S}{p(r)} \right]^{1/2} \cos \Theta_1, \\ G(r) &= C_1^\pm \operatorname{sgn} k \left[\frac{E - V - m - S}{p(r)} \right]^{1/2} \cos \Theta_2, \end{aligned} \quad (25)$$

при этом согласно (10)

$$p(r) = \left[(E - V(r))^2 - (m + S(r))^2 - \left(\frac{k}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (26)$$

— квазиклассический импульс для радиального движения частицы, $\text{sgn } k$ — знак k , а фазы Θ_1 и Θ_2 задаются равенствами

$$\Theta_1(r) = \int_{r_1}^r \left(p + \frac{k w}{p r} \right) dr + \frac{\pi}{4}, \quad \Theta_2(r) = \int_{r_1}^r \left(p + \frac{k \tilde{w}}{p r} \right) dr + \frac{\pi}{4}, \quad (27)$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{V' - S'}{m + S + E - V} - \frac{1}{r} \right), \quad \tilde{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{V' + S'}{m + S - E + V} + \frac{1}{r} \right). \quad (28)$$

Кроме того, мы обозначаем (в формулах (25) и во всех приводимых ниже представлениях решений ВКБ) константы нормировки C_j , относящиеся к состояниям с $k > 0$, верхним индексом $+$, а относящиеся к состояниям с $k < 0$ — индексом $-$.

В естественном предположении достаточно малой ширины уровня Γ волновую функцию квазистационарного состояния можно нормировать на одну частицу, локализованную в области потенциальной ямы I (см. по этому поводу [5]–[7]):

$$\int_{r_0}^{r_1} (F^2 + G^2) dr = 1.$$

При этом быстро осциллирующие функции $\cos^2 \Theta_1(r)$ и $\cos^2 \Theta_2(r)$ следует заменить их средним значением, равным $1/2$; тогда для нормировочных констант $C_1^\pm$ в (25) получаем

$$|C_1^\pm| = \left\{ \int_{r_0}^{r_1} \frac{E - V(r)}{p(r)} dr \right\}^{-1/2} = \left(\frac{2}{T} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

В этом выражении величина T совпадает с периодом радиальных колебаний классической релятивистской частицы с энергией E в потенциальной яме I. Отметим, что в точке поворота $r = r_1$ выполняется равенство $E - V(r_1) = [(m + S(r_1))^2 + k^2/r_1^2]^{1/2}$, поэтому величина $E - V$ положительна в области I.

II. В подбарьерной области $r_1 < r < r_2$ величина p принимает чисто мнимые значения, $p = iq$, $p^2(r) < 0$, а функции $q(r)$ и $y_0(r)$ — вещественные. При этом решение ВКБ осциллирующего типа (25) продолжается здесь решением, экспоненциально убывающим с расстоянием в глубь классически запрещенной области II. Для состояний с $k > 0$ (на достаточном удалении от точек поворота r_1 и r_2) имеем

$$\begin{aligned} \chi &= \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \\ &= \frac{C_2^+}{\sqrt{qQ}} \exp \left\{ - \int_{r_2}^r \left[q + \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2qQ} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} -Q \\ m + S - E + V \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Такое же решение для состояний с $k < 0$ записывается в виде

$$\chi = \frac{C_2^-}{\sqrt{qQ}} \exp \left\{ - \int_{r_2}^r \left[q - \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2qQ} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} m + S + E - V \\ -Q \end{pmatrix}. \quad (31)$$

В двух последних формулах $Q = q + |k|r^{-1}$, а функция $q(r)$ дается формулой (10).

III. Во “внешней” классически разрешенной области $r > r_2$ квазистационарному состоянию отвечает расходящаяся волна:

$$\chi = \frac{C_3^+}{\sqrt{pP}} \exp \left\{ \int_{r_2}^r \left[ip + \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2pP} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} iP \\ m+S-E+V \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Это выражение следует использовать при рассмотрении состояний с $k > 0$, при этом $P = p + i|k|r^{-1}$, а радиальный импульс $p(r)$ снова положителен. Аналогичное выражение для состояний с $k < 0$ выглядит следующим образом:

$$\chi = \frac{C_3^-}{\sqrt{pP}} \exp \left\{ \int_{r_2}^r \left[ip - \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2pP} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} m+S+E-V \\ iP \end{pmatrix}. \quad (33)$$

3.2. Формулы связи решений ВКБ. Полученные в п. 3.1 квазиклассические формулы аппроксимируют искомое решение системы Дирака (3) при всех r , за исключением малых окрестностей точек поворота r_j , $j = 0, 1, 2$. Единое решение системы (3) на всем интервале значений r можно получить путем обхода (в плоскости комплексной переменной r) точек поворота r_j и установления связи между коэффициентами $C_j^\pm$ квазиклассических решений (25)–(33), построенных в разных областях. Строгое математическое рассмотрение проблемы связи решений ВКБ требует, вообще говоря, учета возможности сближения полюса второго порядка в точке $r = 0$ и точки поворота r_0 , точек поворота r_0 и r_1 (узкая яма, глубокие подбарьерные резонансы с энергией вблизи дна потенциальной ямы) и наличия точек перегиба эффективной потенциальной энергии $U(r, E)$. В задачах, связанных с описанием квазистационарных состояний с большими квантовыми числами, появляются дополнительные трудности, возникающие каждый раз, когда приходится учитывать сближение (друг с другом) точек поворота r_1 и r_2 (узкий барьер, ридберговские состояния атомов с энергией, близкой к вершине барьера: $E_r \rightarrow U_m$) и смещение точек поворота r_1, r_2 в комплексную плоскость (комплексные потенциалы, надбарьерные резонансы, лежащие выше классического порога ионизации: $E_r > U_m$). Мы не будем, однако, касаться этого круга значительно более сложных, но одновременно и более интересных задач; их рассмотрение выходит за рамки настоящей работы и может явиться предметом специального исследования. Здесь будет разобран только наиболее типичный случай, когда все три точки поворота r_j , $j = 0, 1, 2$, сильно разделены и их можно исследовать независимо друг от друга. Более точно, будем предполагать выполненными условия $|\int_{r_j}^{r_j+1} p(r) dr| \gg 1$, $j = 0, 1$. (Как правило, именно с такой ситуацией мы будем иметь дело в рассматриваемых в следующем разделе физических задачах.) Тогда для обхода таких точек и сшивания решений ВКБ можно пользоваться стандартными приемами [5]–[8]. Один из них, предложенный Цваном и Штюкельбергом и развиваемый впоследствии в целом ряде работ, использует факт скачкообразного изменения коэффициентов $C_j^\pm$ (явление Стокса) асимптотического представления решения в окрестности точки поворота r_j при переходе через линию Стокса $\text{Re} \int_{r_j}^r p(r') dr' = 0$ и требование однозначности точного решения при обходе по замкнутому контуру вокруг рассматриваемой точки поворота.

Другой возможный прием состоит в том, что вблизи точек поворота r_j , $j = 1, 2$, система Дирака (3) сводится к уравнению второго порядка (типа нерелятивистского уравнения Шредингера) с потенциалом, линейно зависящим от $r - r_j$, решение которого описывается так называемой функцией Эйри. Затем указанное точное решение сшивается с квазиклассическим по обе стороны от точки поворота r_j . Поскольку детали обоих методов достаточно полно изложены во многих литературных источниках, мы ограничимся здесь лишь указанием рецепта решения проблемы сшивания разложений ВКБ и в качестве заключительного результата приведем итоговые формулы связи между коэффициентами $C_j^\pm$ квазиклассических решений уравнения Дирака для рассматриваемой нами задачи с тремя изолированными точками поворота. Итак,

- 1) сохраняют силу обычные [5]–[8] формулы связи решений ВКБ слева и справа от точки поворота r_j , если в асимптотических формах вида (30), (31) и (32), (33) следить за поведением в окрестности рассматриваемой точки поворота только главных множителей $p^{-1/2} \exp\{\pm \int_{r_j}^r p dr\}$, сингулярных при $r \rightarrow r_j$;
- 2) построенные согласно этому рецепту формулы связи между коэффициентами $C_j^\pm$ квазиклассических решений (25)–(33) в областях I–III имеют вид

$$C_2^\pm = -iC_3^\pm = \mp \frac{C_1^\pm}{2} \left[\frac{E - V(r_1) + m + S(r_1)}{|k|r_1^{-1}} \right]^{\pm \frac{1}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \int_{r_1}^{r_2} \left[q \pm \frac{(m + S)V' + (E - V)S'}{2qQ} \right] dr \right\}. \quad (34)$$

Хотя полученные квазиклассические формулы (25)–(34) имеют весьма сложную аналитическую структуру, их применение к конкретным задачам не вызывает принципиальных затруднений, так как все величины, входящие в F и G , определены через одномерные квадратуры.

3.3. Уравнения для энергии квазистационарных уровней. Как уже отмечалось в п. 3.1, при определении квазистационарных состояний обычно требуют, чтобы решение уравнения Дирака на бесконечности представляло собой расходящуюся волну (2), (32), (33); это соответствует частице, вылетающей в конце концов из системы при ее распаде [5]. Условие отсутствия сходящейся компоненты в асимптотическом выражении для волновой функции квазистационарного состояния отбирает комплексные собственные значения энергии $E = E_r - i\Gamma/2$, где E_r – положение, а Γ – ширина резонанса, соответствующего квазистационарному состоянию. Величина Γ положительна и определяет вероятность распада в единицу времени: $W = \Gamma/\hbar$.

Выведем условие, определяющее положение квазистационарных уровней в квазиклассическом случае. Пренебрегая проницаемостью барьера в области $r_1 < r < r_2$ и полагая, что слева и справа от потенциальной ямы $r_0 < r < r_1$ остаются только экспоненциально убывающие решения ВКБ, находим из (25) условие квантования

$$\int_{r_0}^{r_1} \left(p + \frac{k w}{p r} \right) dr = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad (35)$$

где через n_r обозначено радиальное квантовое число. Это уравнение определяет вещественную часть энергии уровня E_r . Оно отличается от обычного квазиклассического условия квантования Бора–Зоммерфельда [5] релятивистским выражением для импульса $p(r)$ и включением поправки $\sim w(r)$, учитывающей спин-орбитальное взаимодействие и приводящей к расщеплению уровней с разным знаком квантового числа k .

Как следует из выражения (28) для $w(r)$, за тонкое расщепление уровней целиком ответственна разность $V' - S'$, в которой аддитивные вклады за счет скалярного ($-S'$) и векторного (V') вариантов взаимодействия имеют противоположные знаки. Причина этого состоит, конечно, в том, что знак спин-орбитального взаимодействия зависит от лоренцевой структуры потенциалов взаимодействия. Это, кстати, можно рассматривать как отражение того обстоятельства, что в векторном поле спины частиц ориентируются в направлении $[\mathbf{F}_v \mathbf{p}]$ где $\mathbf{F}_v = -\mathbf{n} dV/dr$ – сила, действующая на частицу, $\mathbf{p}$ – ее импульс, $\mathbf{n}$ – единичный вектор по направлению вектора $\mathbf{r}$. В скалярном поле спины частиц ориентируются в направлении $-\mathbf{F}_s \mathbf{p}$, где $\mathbf{F}_s = -\mathbf{n} dS/dr$. Это рассуждение дает наглядное объяснение того факта, что в скалярном поле уровень $j = 3/2$, $l = 1$ лежит ниже уровня $j = 1/2$, $l = 1$, а в векторном поле – наоборот.

Мы увидим в дальнейшем (раздел 4), что в более общем случае взаимодействия частицы со скалярным и векторным полем одновременно величина и характер спин-орбитального расщепления уровней существенно зависит от относительной роли указанных взаимодействий. Таким образом, сведения о положении и тонком расщеплении уровней, в совокупности, могут уже выявить роль $S(r)$ и $V(r)$ по отдельности.

В связи с учетом в условии квантования (35) лишь спин-орбитальной поправки и пренебрежением поправкой за счет спин-спиновой связи необходимо сделать следующее пояснение. Разумеется, если действовать формально, то с помощью развитой в предыдущем разделе рекуррентной техники можно было бы получить для энергии уровня E_r и более точное уравнение, которое наряду со спин-орбитальной учитывает еще и поправку на спин-спиновое взаимодействие. Напомним, что для включения такой поправки в (35) нам пришлось бы вычислять функции $y_1(r)$ и $\varphi^{(1)}(r)$, т.е. члены порядка $\hbar$ в квазиклассическом разложении (6). Однако такое уточнение условия квантования (35) вряд ли имеет смысл, так как учет спин-спинового взаимодействия (в отличие от спин-орбитального) явился бы превышением точности квазиклассического расчета. Ниже (раздел 4) мы покажем это на примере кулоновского и осцилляторного потенциалов; для этих потенциалов формула квантования (35) точно воспроизводит энергетический спектр.

Перейдем к вычислению ширины уровня $\Gamma = 2 \operatorname{Im} E$. Для этого умножим первое уравнение системы (3) на G^* , второе (после предварительного перехода к комплексно-сопряженным величинам G^* , F^* и $E^* = E_r + i\Gamma/2$) – на F , сложим их и проинтегрируем по переменной r от 0 до ∞ . Интеграл по r от $G^* F' + G^{*'} F = (G^* F)'$ легко вычисляется в общем виде; при этом следует учесть, что на нижнем пределе интегрирования (при $r = 0$) произведение $G^* F$ обращается в нуль и нетривиальный вклад дает только верхний предел интегрирования ($r = \infty$). В итоговом равенстве большинство полученных членов вещественны, и, взяв всюду мнимые части, мы сразу же придем к искомому ре-

зультату:

$$\Gamma = -2 \operatorname{Im} [G^*(r)F(r)] \big|_{r \rightarrow \infty}. \quad (36)$$

Этот результат для ширины резонанса Γ можно получить также и прямым вычислением потока частиц, уходящих на бесконечность, при нормировке на одну частицу в области $r_0 < r < r_1$. Используя теперь асимптотические представления (32), (33) радиальных функций F и G правее точки поворота r_2 , а также формулы связи (34) между константами нормировки $C_j^\pm$ в областях I–III, находим в главном приближении ВКБ для ширины уровня Γ следующее выражение:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{T} \exp \left\{ -2 \int_{r_1}^{r_2} q(r) dr \right\}, \quad (37)$$

где

$$\Gamma_0 = \exp \left\{ 2k \int_{r_1}^{r_2} \frac{w}{rq} dr \right\}, \quad (38)$$

а период радиальных колебаний T определен в (29).

Отметим, что полученная квазиклассическая формула (37) является релятивистским обобщением хорошо известной формулы Гамова для ширины квазистационарного уровня. Нетривиальным моментом такого обобщения является изменение выражения для периода колебаний T и появление в предэкспоненте выражения (37) дополнительного множителя Γ_0 , который зависит от знака квантового числа k и обязан своим происхождением спин-орбитальной связи в смеси скалярного $S(r)$ и векторного $V(r)$ потенциалов взаимодействия. В нерелятивистском случае этот множитель практически не отличается от единицы и формула (37) допускает наглядную интерпретацию. Именно, $1/T$ есть число ударов в единицу времени частицы (локализованной внутри области I) о внутреннюю стенку ($r = r_1$) потенциального барьера $r_1 < r < r_2$, а экспоненциальный множитель $\exp \left\{ -2 \int_{r_1}^{r_2} q dr \right\}$ соответствует вероятности прохождения через этот барьер при каждом ударе.

Итак, формулы (35), (37) представляют собой основной итог проведенного исследования: они определяют спектр квазистационарных состояний спинорной частицы ($s = 1/2$) в ЭП $U(r, E)$ барьерного типа.

Во избежание недоразумений здесь важно подчеркнуть, что когда мы говорим о потенциале барьерного типа (или, эквивалентно, потенциале с барьером), то имеем в виду не исходные потенциалы $V(r)$ и $S(r)$, непосредственно входящие в систему уравнений Дирака (3), а порождаемый ими (согласно выражению (22)) энергозависимый ЭП $U(r, E)$. В несколько более общей (чем при определении (22)) постановке ЭП возникает при квадрировании уравнения Дирака, т.е. при сведении системы уравнений (3) к (одному) математически эквивалентному уравнению второго порядка (шредингеровского типа); при этом к выражению (22) для $U(r, E)$ добавляются небольшие спиновые поправки, содержащие функцию $w(r)$. В нерелятивистском случае $U(r, E) \approx S(r) + V(r)$; если же энергия связи уровня $E_b = m - E_r$ сравнима с энергией покоя m , различие между потенциалами U и $S + V$ становится весьма существенным.

В заключение данного раздела отметим, что при выключенном скалярном поле ($S = 0$) полученные здесь квазиклассические формулы для E_r и Γ полностью согласуются с известными результатами [26], [27] для этих же характеристик резонансов в чисто векторном поле $V(r) = -eA_0(r)$.

Переходя к конкретным приложениям рассмотренного метода, апробируем сначала правило квантования (35) на модельных потенциалах, для которых все вычисления проводятся аналитически.

4. СРАВНЕНИЕ С ТОЧНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Рассмотрим несколько примеров потенциалов $V(r)$ и $S(r)$, для которых квазиклассическое условие квантования (35) дает точные значения всех уровней энергии, включая и основное состояние.

ПРИМЕР 1. Начнем с одной из простейших задач – вычисления спектра релятивистских связанных состояний в смеси скалярного $S(r)$ и векторного $V(r)$ потенциалов притяжения кулоновского вида:

$$V(r) = -\frac{\xi}{r}, \quad S(r) = -\frac{\xi'}{r}. \quad (39)$$

Здесь ξ и ξ' – электростатическая и скалярная константы связи, соответственно. Эта задача часто используется в качестве модельного приближения при релятивистском описании спектров “экзотических” ВП-систем, например, лептоатомов, взаимодействия между составными частями которых осуществляется путем обмена квантами двух типов полей [40], [41]. Именно, если кулоновское взаимодействие $V(r) = -\xi/r$ обусловлено обменом виртуальным фотоном (квантом электромагнитного поля), то ответственное за скалярную связь взаимодействие лептона с ядром $S(r) = -\xi'/r$ может быть вызвано обменом виртуальной нейтральной частицей со спином 0. Главным кандидатом на эту роль является скалярный σ -мезон, в пользу существования которого в теории есть серьезные аргументы (см., например, [42] и имеющиеся там ссылки). К тому же сравнительно недавно появились сообщения [43] двух экспериментальных групп о наблюдении аномально широкого скалярного резонанса в каскадах нелептонных распадов тяжелых (D , B и J/Ψ) мезонов. Обратим еще внимание на то, что обнаруженный скалярный мезон обладает сравнительно большой массой ($M_\sigma = 390$ МэВ [43], [44]), поэтому отвечающий обмену такой частицей скалярный потенциал $S(r)$ на самом деле является короткодействующим (типа потенциала Юкавы). Тем не менее, как было отмечено в [40], [41], уже в рамках такой сравнительно простой модели со скалярно-векторным вариантом взаимодействия, как рассматриваемая модель (39), можно выявить многие интересные особенности энергетического спектра лептоатомов, которые сохраняются и при рассмотрении более реалистичной модели. Дальнейшие физические детали рассматриваемой модели (39) можно найти в [40], [41].

С помощью обозначений

$$\lambda = (m^2 - E^2)^{1/2}, \quad \gamma = (k^2 - \xi^2 + \xi'^2)^{1/2} \quad (40)$$

выражения (26), (28) для $p(r)$ и $w(r)$ можно записать в виде

$$p(r) = \frac{\lambda}{r} \sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}, \quad w(r) = -\frac{m+E}{2[\xi-\xi'+(m+E)r]}, \quad (41)$$

где точки поворота r_0 и r_1 определяются формулами

$$r_{0,1} = \frac{1}{\lambda^2} \left[\xi E + \xi' m \mp \sqrt{(\xi E + \xi' m)^2 - \lambda^2 \gamma^2} \right]. \quad (42)$$

В этих обозначениях условие квантования (35) приобретает вид

$$\begin{aligned} \lambda \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{(r-r_0)(r_1-r)} \frac{dr}{r} - \frac{k(m+E)}{2\lambda} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{[\xi-\xi'+(m+E)r] \sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}} = \\ = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Нам будет удобно обозначить посредством I_1 и I_2 первый и второй интегралы в этой формуле, соответственно. Вычисление каждого из них можно произвести в три этапа. Сначала с помощью замены переменной интегрирования $r = [(r_1 - r_0)x + (r_1 + r_0)]/2$ квадратичные формы под знаком радикалов в I_1 и I_2 приводятся к диагональному виду. Затем с помощью второй подстановки $y = [(1-x)/(1+x)]^{1/2}$ подынтегральные выражения в I_1 и I_2 приводятся к рациональному виду, при этом

$$I_1 = \lambda \frac{(r_1 - r_0)^2}{r_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2(y^2+a^2)} dy, \quad (44)$$

$$I_2 = -\frac{k}{2} \sqrt{\frac{m+E}{m-E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{[\xi-\xi'+r_1(m+E)][\xi-\xi'+r_0(m+E)]}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1}, \quad (45)$$

где $a^2 = r_1/r_0$. Данные интегралы можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. Для этого путь интегрирования в обоих интегралах (44), (45) следует замкнуть полуокружностью бесконечно большого радиуса, расположенной в верхней полуплоскости комплексной переменной y , и учесть, что полюсы подынтегрального выражения в (44) находятся в точках $y = ia$ и $y = i$, причем последний является полюсом второго порядка. В свою очередь функция под знаком интеграла (45) имеет в верхней полуплоскости единственный простой полюс в точке $y = i$. Вычислив в (44), (45) интегралы по вычетам подынтегральных функций, окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \left\{ \lambda r_0 \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_0}} - 1 \right)^2 - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{m+E}{m-E}} \frac{k}{\sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\xi-\xi')(m+E)(r_0+r_1) + r_0 r_1 (m+E)^2}} \right\} = \\ = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi. \end{aligned}$$

После упрощения это дает уравнение для определения собственных значений энергии:

$$\frac{\xi E + \xi' m}{\sqrt{m^2 - E^2}} - \gamma - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} k = n_r + \frac{1}{2}. \quad (46)$$

Решая это уравнение относительно E , находим

$$E = m \left\{ \frac{-\xi \xi'}{\xi^2 + (N + \gamma)^2} \mp \left[\left(\frac{\xi \xi'}{\xi^2 + (N + \gamma)^2} \right)^2 - \frac{\xi'^2 - (N + \gamma)^2}{\xi^2 + (N + \gamma)^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (47)$$

причем $N = n_r + (1 + \operatorname{sgn} k)/2 = n - |k|$, $k = \mp(j + 1/2)$ для состояний с $j = l \pm 1/2$, а $n = 1, 2, \dots$ — главное квантовое число. Эта формула совпадает (при всех значениях n_r и k) с известным точным выражением (см. [40, с. 186]) для спектра спинорного уравнения (1) со скалярным и электростатическим потенциалами кулоновского типа (39), хотя по квазиклассическому способу получения этой формулы она формально применима лишь для $n_r \gg 1$.

Проанализируем вкратце результаты, следующие из (47) в некоторых наиболее важных случаях.

А. Рассмотрим сначала положение, когда внешнее электростатическое поле выключено ($\xi = 0$) и, таким образом, выражение для дискретных уровней энергии (47) принимает вид

$$E_{\pm} = \pm m \sqrt{1 - \frac{\xi'^2}{(n - |k| + \gamma)^2}}, \quad (48)$$

где теперь $\gamma = \sqrt{k^2 + \xi'^2}$. Эта формула показывает, что уравнение Дирака со скалярной связью при $S(r) = -\xi'/r$ имеет две симметрично расположенные (относительно нулевого уровня $E = 0$) ветви энергетического спектра массивных фермионов в соответствии с двумя возможными значениями квадратного корня (48). Более определенно, положительный знак корня в формуле (48) соответствует спектру энергии частицы, а отрицательный — спектру энергии античастицы, взятой со знаком минус. Мы видим, таким образом, что специфика рассматриваемого спинорного уравнения (1) со скалярной связью проявляется в том, что оно описывает одновременно поведение частиц и античастиц. При этом внутри каждой ветви спектра порядок следования уровней энергии, начиная от основного состояния, таков: $1S_{1/2}$, $2P_{3/2}$, $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$, $3S_{1/2}$ и т. д.

Отметим еще, что с ростом константы скалярной связи ξ' энергетическая щель между спектрами частиц и античастиц уменьшается, причем в пределе $\xi' \rightarrow \infty$ уровни энергии асимптотически стремятся к нулевому значению ($E_{\pm} \rightarrow \pm 0$), никогда не достигая его. Поэтому ни рождения пар, ни столкновения уровней частиц и античастиц здесь не происходит, т. е. дираковский вакуум при скалярной связи устойчив.

Б. Рассмотрим теперь, что происходит, когда выключено внешнее скалярное поле. Полагая в (47) $\xi' = 0$, получаем известную формулу Зоммерфельда [2] для тонкой структуры уровней водородоподобного атома

$$E_{nj} = m \left[1 + \frac{\xi^2}{(n - |k| + \gamma)^2} \right]^{-1/2}. \quad (49)$$

Здесь $\gamma = \sqrt{k^2 - \xi^2}$, $\xi = Z\alpha = Z/137$, Z – заряд ядра, а α – постоянная тонкой структуры. Вторая ветвь спектра энергии, отвечающая отрицательному знаку перед корнем (47), отброшена, так как в рассматриваемом частном случае $\xi' = 0$ она приводит к посторонним решениям исходного уравнения (46): при $E < 0$ и $\xi' = 0$ левая часть (46) отрицательна, а правая положительна. С этим математическим обстоятельством связан тот хорошо известный факт, что в дискретном спектре уравнения Дирака с векторной связью нет связанных состояний для античастиц при заданном условии $V(r) < 0$, несмотря на эффективное притяжение $U(r, E) \sim -V^2/(2m)$ на малых расстояниях, которое имеет место как для частиц, так и для античастиц. Как вытекает из (49), всякий уровень дискретного спектра в кулоновском поле ядра Z возникает только из верхнего континуума и монотонно опускается с ростом Z до нуля. При $\xi = |k|$ параметр γ в (49) имеет корневую особенность, приводящую к комплексным значениям энергии E_{nj} при дальнейшем продолжении (49) на область $\xi > |k| = j + 1/2$. Подробное обсуждение вопросов, связанных с указанной особенностью, содержится в обзорах [23], [24] и монографиях [18], [25], [40], [41]. Известно, что при учете конечных размеров ядра отмеченная аномалия исчезает, и связанные состояния электрона в сильном поле обрезанного (на малых расстояниях $r \leq 10^{-12}$ см.) кулоновского потенциала существуют вплоть до Z_c , где Z_c – значение заряда Z , при котором энергия рассматриваемого состояния достигает границы нижнего (позитронного) континуума $-m$. Для первых четырех уровней $1S_{1/2}$, $2P_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $2P_{3/2}$ расчеты дают следующие значения величины критического заряда Z_c : 172, 185, 245 и 255, соответственно [24]. Существенно, что при $Z < Z_c$ ($1S_{1/2}$) электронные и позитронные состояния не перепутываются; для уравнения Дирака с векторной связью нет “позитронных уровней”, которые возникали бы из нижнего континуума. Таким образом, при $Z < Z_c$ спектр уравнения Дирака в поле ядра полностью определен. Очевидно, что явления, возникающие при $Z > Z_c$, имеют существенно многочастичный характер, и их следует описывать в рамках теоретико-полевого формализма [25], [45].

Итак, на основании всего сказанного выше заключаем следующее: так как рассматриваемое здесь кулоновское поле ядра по-разному действует на частицы и античастицы (притягивает электроны и отталкивает позитроны), то спектры энергий для частиц (электронов) и античастиц (позитронов) несимметричны. Именно в этом заключается принципиальное отличие этого случая от предыдущего – взаимодействия массивных фермионов со скалярным внешним полем кулоновского типа (39); влияние последнего сводится к тому, что изменяется только масса (которая одинакова для обоих типов ферми-частиц – электронов и позитронов). Это означает, что, в отличие от электростатического, скалярное поле действует одинаково как на частицы, так и на соответствующие им античастицы (и именно поэтому дискретные спектры электронов и позитронов симметричны для уравнения Дирака со скалярной связью).

В. Остановимся еще на одном важном частном случае, реализующемся при $\xi = \xi'$. В этой ситуации $\gamma = |k|$, $n - |k| + \gamma = n$ и выражение (47) заметно упрощается:

$$E_{\pm} = m \left[\frac{-\xi^2}{\xi^2 + n^2} \pm \frac{n^2}{\xi^2 + n^2} \right]. \quad (50)$$

В этом выражении ветвь спектра $E_- = -m$, отвечающую нижнему знаку (минус), следует отбросить, так как в рассматриваемом частном случае $\xi = \xi'$ она приводит к нарушению равенства (46). Тогда оставшаяся в (50) ветвь спектра дает энергию частицы

$$E_+ = m \left[1 - \frac{2\xi^2}{\xi^2 + n^2} \right]. \quad (51)$$

Отсюда следует, что при увеличении константы связи ξ энергетическая щель $\Delta = m + E_+$ между связанным состоянием и нижним континуумом уменьшается. Тем не менее в пределе $\xi \rightarrow \infty$ уровни энергии не входят в нижний континуум, а лишь асимптотически приближаются к его границе, никогда не достигая значения $E = -m$. При частном значении $\xi = 1$ энергия нижнего уровня $n = 1$ становится равной нулю.

Рассмотрим вопрос о применимости квазиклассического приближения к рассматриваемому здесь составному полю кулоновского типа (39). Чтобы получить количественную оценку, преобразуем выражение (41) для квазиклассического импульса $p(r)$ к виду

$$p(r) = \frac{\gamma}{r} \sqrt{\left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{r}{r_1} \right)}, \quad (52)$$

где γ определяется прежним выражением (40). Тогда условие применимости квазиклассического рассмотрения принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{p} \right) = \gamma^{-1} \left(\frac{r}{r_{\min}} - 1 \right) \left[\left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{r}{r_1} \right) \right]^{-3/2} \ll 1 \quad (53)$$

и выполняется тем лучше, чем больше γ . Здесь $r_{\min} = 2/(r_0^{-1} + r_1^{-1})$ — та точка, в которой эффективный потенциал (22) достигает минимума. При выполнении условия $\xi' > \xi$ (что соответствует случаю сильного скалярного поля) решение системы Дирака (3) для рассматриваемых потенциалов (39) имеет квазиклассический вид во всей области изменения переменной r , за исключением узких интервалов, непосредственно примыкающих к точкам поворота r_0 и r_1 . Если же $\xi \gg \xi'$, то ситуация аналогична случаю сильного кулоновского поля в теории сверхкритических атомов [26], [27].

При $\gamma \gg 1$ в области $r < r_1$ в эффективном потенциале (22) важную роль (доминирующую при $r \rightarrow 0$) играет центробежный потенциал $\gamma^2/(2mr^2)$. В этой области импульс $p(r) \sim \gamma/r$, а отношение двух слагаемых под знаком интеграла в (35) имеет порядок $k\gamma^{-2}rw(r) \sim (\xi' - \xi)^{-1}$. Поскольку квазиклассическое приближение для волновой функции имеет при $\xi' \gg \xi \sim 1$ точность порядка $(\xi' - \xi)^{-2}$ (см. [18]), то спин-орбитальные члены (как поправки порядка $(\xi' - \xi)^{-1}$) должны быть удержаны.

ПРИМЕР 2. Найдем спектр энергий релятивистской частицы массы m и спина $1/2$ в смеси скалярного и векторного потенциалов осцилляторного вида

$$S(r) = V(r) = \omega \frac{r^2}{4}, \quad \omega > 0. \quad (54)$$

Решение спектральной задачи для уравнения Дирака с указанными потенциалами представляет определенный теоретический интерес для спектроскопии адронов [31], [46].

Ясно, что составленная только из потенциалов осцилляторного типа (54) модель межкваркового $Q\bar{q}$ -взаимодействия не учитывает кулоновское притяжение на малых расстояниях, отвечающее взаимодействию свободных кварков. Однако в области больших r она учитывает эффективное натяжение струны, обеспечивающее конфайнмент кварков внутри адронов. Кроме того, для этой простой модели $Q\bar{q}$ -взаимодействия уравнение Дирака допускает точное решение, что само по себе представляет определенный интерес.

Для потенциалов (54) получаем

$$p(r) = \frac{\beta}{\sqrt{2}r} [(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)]^{1/2}, \quad w(r) = -\frac{1}{2r}, \quad (55)$$

$\beta = \sqrt{\omega(E + m)}$, а точки поворота r_0 и r_1 определяются формулами

$$r_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[E - m \mp \sqrt{(E - m)^2 - 2k^2\omega^2\beta^{-2}} \right]^{1/2}. \quad (56)$$

Заменяем в (35) импульс $p(r)$ и функцию $w(r)$ их явными выражениями (55) и перейдем к интегрированию по новой переменной $x = r^2$. В результате указанных преобразований правило квантования (35) приобретает вид

$$\frac{\beta}{2^{3/2}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(x - x_0)(x_1 - x)} \frac{dx}{x} - \frac{k}{2^{3/2}\beta} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x\sqrt{(x - x_0)(x_1 - x)}} = \left(n_r + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (57)$$

где $n_r = 0, 1, 2, \dots$, а новые границы области интегрирования определяются по формулам $x_0 = r_0^2$, $x_1 = r_1^2$.

Вычисление интегралов квантования может быть проведено с помощью теории вычетов аналогично случаю интегралов I_1, I_2 в формуле (43). Поскольку все необходимые для такого вычисления технические детали мы уже и так достаточно подробно описали выше, приведем здесь только окончательный результат:

$$\frac{\beta(E - m)}{2^{3/2}\omega} - \frac{|k|}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sgn} k = n_r + \frac{1}{2}. \quad (58)$$

Если ввести обозначение $\mathcal{K} = |k| + (1 + \operatorname{sgn} k)/2$ и заменить параметр β его явным выражением, то последнее равенство можно переписать в виде

$$(E - m)\sqrt{2(E + m)} - (4n_r + 2\mathcal{K} + 1)\sqrt{\omega} = 0. \quad (59)$$

Решая это уравнение относительно E , мы найдем собственные значения энергии как функции от квантовых чисел n_r и $\mathcal{K}$:

$$E_{n_r, \mathcal{K}} = \frac{2m + 8 \cdot 2^{2/3} m^2 A^{-1/3} + 2^{1/3} A^{1/3}}{6}, \quad (60)$$

где введены обозначения

$$A = -B + \sqrt{B^2 - 1024m^6}, \quad B = 32m^3 - 27\omega(1 + 2\mathcal{K} + 4n_r)^2.$$

Условие применимости полученного квазиклассического выражения (60) есть $n_r \gg 1$. Как будет показано в приложении, при точном решении уравнения Дирака со скалярным $S(r)$ и векторным $V(r)$ потенциалами осцилляторного типа (54) энергия стационарных состояний выражается формулой (60) для всех значений n_r .

Как видно из (60), каждое из состояний характеризуется двумя квантовыми числами n_r и $\mathcal{K}$. Энергия зависит только от комбинации $2n_r + \mathcal{K} = \Lambda$ квантовых чисел, поэтому $\Lambda = 1, 2, 3, \dots$ можно назвать главным квантовым числом. Каждое значение $\Lambda \geq 3$ может осуществляться несколькими комбинациями значений n_r и $\mathcal{K}$, следовательно, энергетические уровни (60) со значением $\Lambda \geq 3$ являются вырожденными.

ПРИМЕР 3. Получим спектр энергий уравнения Дирака для безмассового фермиона во внешнем скалярном поле с комбинированным потенциалом типа “воронки”

$$S(r) = -\frac{\xi'}{r} + \sigma r, \quad \sigma > 0; \quad V(r) = 0. \quad (61)$$

Специфика рассматриваемой модели с таким скалярным взаимодействием проявляется, в частности, в спонтанно нарушенной киральной симметрии в первоначально симметричной системе. Дело в том, что для безмассовой частицы ($m = 0$) уравнение Дирака (1) с чисто векторной связью (при $S(r) = 0$) инвариантно по отношению к глобальному преобразованию волновой функции $\Psi \rightarrow \exp(i\alpha'\gamma_5)\Psi$, $\tilde{\Psi} \rightarrow \tilde{\Psi}\exp(i\alpha'\gamma_5)$. С точки зрения спектра киральная симметрия проявляется в вырождении всех состояний по четности; более определенно, массы состояний 0^+ и 0^- (или 1^+ и 1^-) одинаковы.

Инвариантность относительно глобальных преобразований не исчерпывает всех свойств симметрии безмассового уравнения Дирака. Легко проверить, что в киральном пределе ($m = 0$) система уравнений (3) инвариантна относительно более общих преобразований вида [29]

$$E \rightarrow E, \quad k \rightarrow -k, \quad S \rightarrow -S, \quad V \rightarrow V, \quad G(r) \rightarrow -F(r), \quad F(r) \rightarrow G(r), \quad (62)$$

которые не связаны с геометрической симметрией пространства-времени. Отсюда следует, что в отсутствие внешнего скалярного поля ($S(r) = 0$) спектр является вырожденным по отношению к знаку дираковского квантового числа k ; т.е. спектр зависит только от полного момента j , но не по отдельности от составляющих его орбитального l и спинного $s = 1/2$ моментов (киральное вырождение).

Как легко убедиться непосредственной проверкой, безмассовое уравнение Дирака инвариантно также относительно преобразований зарядового сопряжения

$$E \rightarrow -E, \quad k \rightarrow -k, \quad S \rightarrow S, \quad V \rightarrow -V, \quad G(r) \leftrightarrow F(r). \quad (63)$$

Мы видим, что эти преобразования симметрии контрастируют с предыдущими (62), поскольку связывают состояния с положительными и отрицательными значениями энергии. В частности, при отсутствии внешнего электростатического поля (чисто скалярное взаимодействие) имеет место удвоение состояний с заданным значением $|E_n|$, но противоположными знаками самой энергии $E_n = \pm|E_n|$. Данное обстоятельство позволяет ограничиться детальным исследованием лишь одной (положительной) ветви спектра $E_n > 0$, что делает более простой задачу нахождения собственных значений энергии E_n системы Дирака (3) со скалярным вариантом взаимодействия (61). Эта последняя задача может быть решена либо численно, либо в квазиклассическом приближении, которое формально применимо для высоких возбужденных состояний, но (как будет показано ниже) дает результаты с хорошей точностью даже для основного и первого возбужденного состояний.

Для потенциала (61) и частицы с нулевой массой выражения (26), (28) для $p(r)$ и $w(r)$ принимают вид

$$p(r) = \frac{\sigma}{r} [(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)]^{1/2}, \quad w(r) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r - P_+} + \frac{1}{r - P_-} \right), \quad (64)$$

где

$$P_{\pm} = \frac{1}{2\sigma} (-E \pm \sqrt{E^2 + 4\xi'\sigma}), \quad \gamma = \sqrt{k^2 + \xi'^2}, \quad (65)$$

а положение точек поворота r_0 и r_1 задается равенством

$$r_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{E^2 + 2\xi'\sigma \mp \sqrt{(E^2 + 2\xi'\sigma)^2 - 4\sigma^2\gamma^2}}. \quad (66)$$

В этих обозначениях квазиклассическое условие квантования можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sigma \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)} \frac{dr}{r} - \\ & - \frac{k}{2\sigma} \sum_{i=\pm} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{(r - P_i) \sqrt{(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)}} = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (67)$$

Вычисление первого интеграла в левой части (67) сводится с помощью подходящих замен переменных интегрирования к вычислению по вычетам соответствующего контурного интеграла. Второй интеграл в (67) (входящий под знак суммы) выражается через полные эллиптические интегралы первого $K(\nu)$ и третьего $\Pi(\alpha^2, \nu)$ рода [47],

$$K(\nu) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \Pi(\alpha^2, \nu) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (68)$$

В результате указанных вычислений квазиклассическое условие квантования (67) принимает вид трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{E^2 + 2\sigma(\xi' - \gamma)}{4\sigma} - \frac{k}{\sigma(r_0 + r_1)\pi} \left[2r_0 \left(\frac{\Pi(\alpha_+^2, \nu)}{r_0^2 - P_+^2} + \frac{\Pi(\alpha_-^2, \nu)}{r_0^2 - P_-^2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{r_0 + P_+} + \frac{1}{r_0 + P_-} \right) K(\nu) \right] = n_r + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (69)$$

Здесь использованы новые обозначения

$$\nu = \sqrt{\frac{E^2 + 2\sigma(\xi' - \gamma)}{E^2 + 2\sigma(\xi' + \gamma)}}, \quad \alpha_{\pm}^2 = \nu \frac{P_{\pm} + r_0}{P_{\pm} - r_0}.$$

Уравнение (69) может быть решено в явном виде в двух предельных случаях $\sigma \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow \infty$. Ниже мы ограничимся рассмотрением практически важного случая слабой связи, когда при малых значениях параметра σ (а именно, при $\sigma \lesssim 0.2 \text{ ГэВ}^2$) хорошо выполняется условие $E_{n_r, k}^2 \gg 2\sigma\gamma$ для всех возможных значений энергии уровней $E_{n_r, k}$. В этом случае приведенные выше формулы заметно упрощаются и уравнение (69) для квазиклассического спектра принимает довольно простой окончательный вид

$$E_{n_r, k}^2 = 4\sigma \left[n_r + \frac{1}{2} + \frac{\gamma - \xi'}{2} + \frac{k}{4\gamma} + \frac{\sigma k}{2E_{n_r, k}^2} R(E_{n_r, k}) \right] + O\left(\left(\frac{\sigma\gamma}{E_{n_r, k}^2}\right)^2\right), \quad (70)$$

где $\sigma > 0$ и введено следующее обозначение:

$$R(E_{n_r, k}) = \frac{1}{\pi} \left(0.38 + \ln \frac{E_{n_r, k}^2}{\sigma\gamma} \right).$$

В том случае, когда кулоноподобный член в потенциале (61) отсутствует (т. е. при $\xi' = 0$), уравнение (70) в точности совпадает с предложенным в работе [30] квазиклассическим условием квантования уровней энергии в скалярной яме $U(r, E)$, порождаемой линейным запирающим взаимодействием, $S(r) = \sigma r$, $V(r) = 0$.

Уравнение (70) для $E_{n_r, k}$ нетрудно решить численно. Сравнение результатов таких расчетов $E_{n_r, k}$ с точными значениями [29], полученными путем численного интегрирования системы Дирака (3), показывает, что квазиклассическое уравнение (70) обеспечивает вполне приемлемую точность вычисления энергетического спектра: даже для нижних состояний с $n_r \sim 1$ погрешность в определении $E_{n_r, k}$ не превышает 5 % и быстро уменьшается с ростом n_r .

Наряду с прямым численным решением трансцендентных уравнений (69) и (70) представляется целесообразным ценой некоторых упрощений или аппроксимаций сформировать приближенные аналитические выражения для энергетических уровней, которые позволили бы без особого труда проследить зависимость $E_{n_r, k}$ от квантовых чисел n_r , k и параметров модели взаимодействия (61). Для этого заметим, что для нижних состояний с радиальным квантовым числом $n_r \sim 1$ величина $R(E_{n_r, k}) \cong 0.6 \div 0.8$. Однако с увеличением n_r эта величина быстро выходит на единицу и, как показывают численные расчеты, существует достаточно протяженная область энергетического спектра (см. таблицу), в которой можно положить $R(E_{n_r, k}) = 1$. В этом приближении уравнение (70) имеет аналитическое решение

$$\varepsilon_{n_r, k} = \frac{E_{n_r, k}}{\sqrt{\sigma}} = \pm \sqrt{N' - \xi' + [(N' - \xi')^2 + 2k]^{1/2}}, \quad (71)$$

ТАБЛИЦА. Собственные значения $E_{n_r, k}$ и $\varepsilon_{n_r, k}$ безмассового уравнения Дирака со скалярным взаимодействием (61) для двух значений кулоновского параметра ξ' ; $\varepsilon_{n_r, k}$ – результат численного расчета [29]; $\varepsilon_{n_r, k}^{\text{ВКБ}}$ и $E_{n_r, k}^{\text{ВКБ}}$ – результаты численного решения трансцендентного уравнения (69); $\varepsilon_{n_r, k}^{(\text{ас})}$ и $E_{n_r, k}^{(\text{ас})}$ – асимптотика (70), $|\sigma| = 0.18 \text{ ГэВ}^2$

Состояния		$\xi' = 0$			$\xi' = 0.4$	
n_r	k	$\varepsilon_{n_r, k} [29]$	$\varepsilon_{n_r, k}^{\text{ВКБ}}$	$\varepsilon_{n_r, k}^{(\text{ас})}$	$E_{n_r, k}^{\text{ВКБ}}, \text{ГэВ}$	$E_{n_r, k}^{(\text{ас})}, \text{ГэВ}$
0	-1	1.61944	1.62292	1.4142	0.55809	
1	-1	2.60263	2.60381	2.5887	1.02972	1.04765
2	-1	3.29118	3.29182	3.2886	1.33819	1.35699
3	-1	3.85541	3.85581	3.8555	1.58633	1.60356
0	-2	2.14652	2.14721	2.0009	0.82198	0.72702
1	-2	2.95197	2.95230	2.9208	1.18994	1.18375
2	-2	3.57353	3.57371	3.5616	1.46502	1.46751
3	-2	4.09947	4.09961	4.0941	1.69492	1.69967
0	-3	2.56927	2.56951	2.4495	1.01854	0.95639
1	-3	3.26852	3.26871	3.2287	1.33151	1.31723
0	-4	2.93218	2.93231	2.8284	1.18253	1.15227
0	1	2.29403	2.29251	2.3178	0.93348	0.92051
1	1	3.03103	3.03038	3.0359	1.25659	1.23879
2	1	3.62598	3.62557	3.6265	1.51411	1.49669
0	2	2.70440	2.70391	2.7443	1.09944	1.10954
1	2	3.35376	3.35350	3.3693	1.38451	1.38364
0	3	3.05967	3.05589	3.1021	1.24973	1.26591
0	4	3.40866	3.36945	3.4183	1.38513	1.40086

где $N' = 2n_r + 1 + \gamma + k/(2\gamma)$. Положительный знак корня соответствует энергии частицы, а отрицательный – энергии античастицы, взятой со знаком минус. По поводу формулы (70) и некоторых особенностей релятивистского спектра рассматриваемой модели (61) сделаем несколько замечаний.

1. Зависимость $E_{n_r, k}(\sigma) \propto \sigma^{1/2}$ следует уже из соображений скейлинга; замена $r \rightarrow \mu r$ в системе уравнений (3) с массой $m = 0$ и комбинированным потенциалом (61) при надлежащем выборе масштабного множителя μ ($r \rightarrow r/\sqrt{\sigma}$) приводит к $E_{n_r, k} = \sqrt{\sigma} \varepsilon_{n_r, k}$.

2. В безмассовом уравнении Дирака во внешнем скалярном поле (61) при любых ξ' и $\sigma \neq 0$ имеется только дискретный спектр уровней энергии. Это обстоятельство имеет простое объяснение. На малых расстояниях в ЭП $U(r, E)$ модели (61) превалирует слагаемое γ^2/r^2 , соответствующее отталкиванию и исключающее “падение на центр” при всяком значении параметра ξ' . С другой стороны, на больших расстояниях (где как раз и формируется энергетический спектр) в ЭП $U(r, E)$ доминирует релятивист-

ский член $S^2/(2m)$, приводящий к квадратичному запиранию $(\sigma r)^2/(2m)$ (независимо от знака параметра σ). Таким образом, ЭП $U(r, E)$ модели (20) всегда (как при положительных, так и при отрицательных значениях σ и ξ') имеет вид осцилляторной потенциальной ямы. В этом существенное отличие от нерелятивистской потенциальной модели, в которой при отрицательных значениях σ эффективный потенциал в радиальном уравнении Шредингера обладает барьером, вследствие чего вместо дискретных уровней возникают квазистационарные состояния с комплексной энергией.

3. Спектр собственных значений $E_{n_r, k}$ безмассового уравнения (1) со скалярным взаимодействием линейного вида $S(r) = \sigma r$ ($V(r) \equiv 0$) был рассчитан с высокой точностью в работе [29] прямым численным интегрированием этого уравнения. Сравнение квазиклассического выражения (70) с полученными в работе [29] точными значениями $\varepsilon_{n_r, k}$ и с результатами решения трансцендентного уравнения (69) на ЭВМ методом минимизации дано в таблице для двух значений кулоновского параметра ξ' : $\xi' = 0$ и 0.4 . Видно, что область применимости квазиклассической асимптотики (70), формально справедливой при условии $E_{n_r, k}^2 \gg 2\sigma\gamma$ (для возбужденных состояний с $n_r \gg 1$), “затягивается” вплоть до общепринятого натяжения струны $\sigma \cong 0.18 \text{ ГэВ}^2$ даже для основного ($n_r = 0$) состояния. Это показывает, что асимптотики квазиклассического типа могут быть полезны для качественного анализа спектра исходного уравнения (1).

4. Численный расчет $E_{n_r, k}$ с использованием трансцендентного уравнения (69) показывает, что общие черты спектра слабо зависят от величины и даже знака параметра σ , если $|\sigma| \lesssim 0.18 \text{ ГэВ}^2$. Однако это утверждение несправедливо для тонкой структуры P -уровней. Например, $P_{1/2}$ -уровень лежит выше $P_{3/2}$ -уровня для $\sigma > 0$ и ниже $P_{3/2}$ -уровня, если $\sigma < 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем точные решения и спектр энергий уравнения Дирака (1) во внешних центрально-симметричных полях, задаваемых скалярным $S(r)$ и векторным $V(r)$ потенциалами осцилляторного типа (54). Исключая из системы (3) функцию $G(r)$, получим уравнение второго порядка для определения $F(r)$

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left[(E + m) \left(E - m - \frac{\omega r^2}{2} \right) - \frac{k(k+1)}{r^2} \right] F(r) = 0. \quad (\text{П.1})$$

В соответствии с характером асимптотического поведения радиальных функций $F(r)$ и $G(r)$ при больших и малых r будем искать решение уравнения (П.1) в виде

$$F(r) = e^{-\frac{\beta}{2^{3/2}} r^2} r^{\mathcal{K}} f(\rho), \quad (\text{П.2})$$

где $\rho = \beta r^2 / \sqrt{2}$, а параметры β и $\mathcal{K}$ определены в (55) и (59), соответственно. Подстановка этого выражения в (П.1) приводит к следующему уравнению для функции $f(\rho)$:

$$\rho f''(\rho) + (4\alpha - \rho) f'(\rho) - \left[2\alpha - \frac{\beta(E - m)}{2^{3/2}\omega} \right] f(\rho) = 0, \quad (\text{П.3})$$

где $\alpha = (2\mathcal{K} + 1)/8$. Решение этого уравнения, конечное при $\rho = 0$, выражается (с точностью до постоянного множителя C) через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(a, b; z)$ равенством

$$f(\rho) = CF\left(2\alpha - \frac{\beta(E - m)}{2^{3/2}\omega}, 4\alpha; \rho\right). \quad (\text{П.4})$$

Для того чтобы фигурирующая в правой части (П.4) гипергеометрическая функция $F(a, b; \rho)$ сводилась к полиному, параметр a должен быть равен целому отрицательному числу или нулю, что приводит к уравнению (59) для определения дискретных уровней энергии.

Решение для $G(r)$ определяется по формуле

$$G(r) = \frac{1}{m + E} \left(\frac{dF(r)}{dr} + \frac{k}{r} F(r) \right) \quad (\text{П.5})$$

с использованием полученного выше выражения для $F(r)$ и рекуррентных соотношений для вырожденных гипергеометрических функций [47]. Остающийся неопределенным в $F(r)$ и $G(r)$ общий нормировочный коэффициент C можно найти из условия: $\int_0^\infty (F^2 + G^2) dr = 1$.

В заключение приведем окончательные выражения для радиальных волновых функций дискретного спектра:

$$F(r) = C e^{-\frac{\beta}{2^{3/2}} r^2} r^{\mathcal{K}} F\left(-n_r, \frac{2\mathcal{K} + 1}{2}; \frac{\beta}{\sqrt{2}} r^2\right), \quad (\text{П.6})$$

$$G(r) = C \frac{2^{3/2} \beta}{(2\mathcal{K} + 1)(m + E_{n_r, \mathcal{K}})} e^{-\frac{\beta}{2^{3/2}} r^2} r^{\mathcal{K}+1} \times \\ \times \left[n_r F\left(1 - n_r, \frac{2\mathcal{K} + 3}{2}; \frac{\beta}{\sqrt{3}} r^2\right) + \frac{2\mathcal{K} + 1}{4} F\left(-n_r, \frac{2\mathcal{K} + 1}{2}; \frac{\beta}{\sqrt{2}} r^2\right) \right], \quad (\text{П.7})$$

где нормировочный коэффициент

$$C = \frac{\beta^{(2\mathcal{K}+1)/4}}{2^{-1+(2\mathcal{K}+1)/8} \Gamma\left(\frac{2\mathcal{K}+1}{2}\right)} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2\mathcal{K}+1}{2} + n_r\right) (E_{n_r, \mathcal{K}} + m)}{n_r! (3E_{n_r, \mathcal{K}} + m)}}.$$

Точные решения и спектр энергий уравнения Дирака с осцилляторным потенциалом (54) исследовались недавно в статье [48], причем рассматривался только случай состояний с $k < 0$, $\mathcal{K} = |k|$. В этом частном случае наши выражения (60), (П.6) и (П.7) воспроизводят результаты [48].

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
- [2] *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
- [3] *F. Gross.* Phys. Rev. 1969. V. 186. P. 1448; *H. Grotch, D. R. Yennie.* Rev. Mod. Phys. 1969. V. 41. № 2. P. 350.
- [4] *M. I. Eides, H. Grotch, V. A. Shelyuto.* Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 63; hep-ph/0002158.
- [5] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1974.
- [6] *А. Б. Мигдал.* Качественные методы в квантовой теории. М.: Наука, 1975.
- [7] *Дж. Хединг.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
- [8] *Н. Фрёман, П. У. Фрёман.* ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967.
- [9] *N. Fröman, P. O. Fröman.* On the History of the so-called WKB Method from 1817 to 1926. In: Proceedings of the Niels Bohr Centennial Conference. Copenhagen 25-28 March 1985 on Semi-classical Description of Atomic and Nuclear Collision. Eds. J. Bang, J. de Boer. North-Holland, Amsterdam, 1985. P. 1.
- [10] *Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов.* ЖЭТФ. 1965. Т. 49. № 3. С. 841; *А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев.* ЖЭТФ. 1966. Т. 50. № 5. С. 1393; Т. 51. № 1. С. 309; *Ф. И. Никишов, В. И. Ритус.* ЖЭТФ. 1966. Т. 50. № 1. С. 255; *В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур.* ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 5. С. 1579; *В. С. Лисица.* УФН. 1987. Т. 153. № 3. С. 379.
- [11] *В. Д. Мур, В. С. Попов.* ЖЭТФ. 1993. Т. 104. № 7. С. 2293.
- [12] *С. С. Герштейн, Л. И. Пономарев, Т. П. Пузынина.* ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 633; *И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976; *N. Athavan, P. O. Fröman, N. Fröman, M. Lakshmanan.* J. Math. Phys. 2001. V. 42. № 11. P. 5051; P. 5077; P. 5096.
- [13] *Б. М. Карнаков, В. П. Крайнов.* Квазиклассическое приближение в квантовой механике. М.: Изд-во МИФИ, 1992.
- [14] *N. Fröman, P. O. Fröman.* Phase-integral method: Allowing nearlying transition points. (With adjoined papers by A. Dzieciol, N. Fröman, P. O. Fröman et al). In: Tracts in Natural Philosophy. V. 40. Ed. C. Truesdell. Berlin: Springer, 1996.
- [15] *W. Pauli.* Helv. Phys. Acta. 1932. V. 5. P. 179; *В. Паули.* Общие принципы волновой механики. М.: Гостехиздат, 1947.
- [16] *S. I. Rubinov, J. B. Keller.* Phys. Rev. 1963. V. 131. P. 2789; *J. Stachel, J. Plebansky.* J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 2368.
- [17] *В. П. Маслов.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988; *В. П. Маслов, М. В. Федорюк.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
- [18] *Ф. Б. Мигдал.* Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978.
- [19] *М. С. Маринов, В. С. Попов.* ЖЭТФ. 1974. Т. 67. № 4. С. 1250.
- [20] *В. С. Попов, В. Д. Мур.* ЯФ. 1973. Т. 18. № 3. С. 684; *В. П. Крайнов.* Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 359; *А. Б. Мигдал, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский.* ЖЭТФ. 1977. Т. 72. № 3. С. 834; *В. Л. Елецкий, Д. Н. Воскресенский, В. С. Попов.* ЯФ. 1977. Т. 26. № 5. С. 994.
- [21] *В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский.* ЯФ. 1978. Т. 27. № 2. С. 529.
- [22] *В. С. Попов.* ЖЭТФ. 1970. Т. 59. № 9. С. 965.
- [23] *Я. Б. Зельдович, В. С. Попов.* УФН. 1971. Т. 105. № 3. С. 403.
- [24] *В. С. Попов.* Изв. АН СССР. Сер. физ. 1977. Т. 41. № 12. С. 2577.
- [25] *W. Greiner, B. Muller, J. Rafelski.* Quantum Electrodynamics of Strong Fields. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1985; *J. Reinhart, W. Greiner.* Rep. Prog. 1977. V. 40. P. 219.
- [26] *В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский.* Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. № 3. С. 140.

- [27] В. Д. Мур, В. С. Попов. ЯФ. 1978. Т. 28. № 3(9). С. 837.
- [28] В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, В. Л. Елецкий, В. Д. Мур. ЖЭТФ. 1979. Т. 76. № 2. С. 431.
- [29] V. D. Mur, V. S. Popov, Yu. A. Simonov, V. P. Yurov. ЖЭТФ. 1994. Т. 105. № 1. С. 3.
- [30] Ю. А. Симонов. ЯФ. 1997. Т. 60. № 12. С. 2252; 2000. Т. 63. № 1. С. 104.
- [31] Ю. А. Симонов. УФН. 1996. Т. 166. № 4. С. 338; Д. С. Кузьменко, Ю. А. Симонов, В. И. Шевченко. УФН. 2004. Т. 174. № 1. С. 3; В. Г. Борняков, М. И. Поликарпов, Т. Сузуки, М. Н. Чернодуб, Г. Швергольц. УФН. 2004. Т. 174. № 1. С. 19.
- [32] В. С. Попов, А. Е. Кудрявцев, В. И. Лусин, В. Д. Мур. ЖЭТФ. 1981. Т. 80. № 4. С. 1272.
- [33] Я. Б. Зельдович. ФТТ. 1959. Т. 1. № 5. С. 1637.
- [34] М. В. Федорук. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [35] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов. Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
- [36] В. Г. Кадышевский, Г. А. Кравцова, В. Н. Родионов. ТМФ. 2002. Т. 130. № 2. С. 275.
- [37] О. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский. Теория ядра. Киев: Либидь, 2000.
- [38] R. K. Japnev, L. P. Presnyakov, V. P. Shevelko. Physics of Highly Charged Ions. Berlin–Heidelberg: Springer, 1985.
- [39] В. В. Белов, В. П. Маслов. ДАН СССР. 1990. Т. 311. № 4. С. 849.
- [40] W. Greiner. Relativistic Quantum Mechanics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1990.
- [41] W. Greiner, J. Reinhardt. Quantum Electrodynamics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1996.
- [42] A. Faessler et al. Phys. Rev. D. 2003. V. 68. № 1. P. 1.
- [43] E791 Collaboration (E. M. Aitala et al). Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 770; N. Wu. BES R measurements and J/ψ decays; hep-ex/0104050.
- [44] F. E. Close, N. A. Tornqvist. J. Phys. G. 2002. V. 28. P. R249.
- [45] А. А. Груб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [46] D. Ebert, V. O. Galkin, R. N. Faustov. Phys. Rev. D. 1998. V. 57. № 9. P. 5663; D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin. Mod. Phys. Lett. A. 2003. V. 18. P. 1597; DELPHI Collaboration (P. Abreu et al). Phys. Lett. B. 1995. V. 345. P. 598; ALEPH Collaboration (D. Buskulic et al). Z. Phys. C. 1997. V. 73. P. 601; CLEO Collaboration (R. Anastassov et al). Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 4127; hep-ex/9708035; DELPHI Collaboration (M. Feindt, O. Podobrin). First observations of radially excited B -mesons. Contribution to ICHEP'96. P. 01–021. DELPHI 96-93 CONF. V. 22 (JUNE 1996); DELPHI Collaboration (D. Bloch et al). First evidence for a radially excited D^* -meson. DELPHI Note 97-102 CONF. V. 84 (July 1997).
- [47] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967.
- [48] Wen-Chao Qiang. Chinese Physics. 2002. V. 11. P. 757.

Поступила в редакцию 4.VIII.2004 г.,
после доработки 15.X.2004 г.