Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Корепанов, Точные решения и перемешивание в одной алгебраической динамической системе, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 1, 131–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:13:10

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В ОДНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Пусть A – матрица размера $n \times n$ с элементами a_{ij} из поля $\mathbb{C}$. Рассмотрим следующие две инволютивные операции на таких матрицах: матричное обращение $I: A \mapsto A^{-1}$ и поэлементное, или адамарово, обращение $J: a_{ij} \mapsto a_{ij}^{-1}$. Мы изучаем алгебраическую динамическую систему, порожденную итерациями произведения $J \circ I$. При $n \leq 4$ мы строим полное решение этой системы, причем для $n = 4$ оно получается с помощью анзаца в тета-функциях. При $n \geq 5$ тот же анзац дает *частные* решения. Они описываются целочисленным линейным преобразованием произведения двух одинаковых комплексных торов. В результате получается динамическая система с перемешиванием, описываемым явными формулами.

Ключевые слова: алгебраические динамические системы, точные решения, перемешивание, симметрии соотношения “звезда–треугольник”.

1. ВВЕДЕНИЕ

Произведение двух некоммутирующих инволюций, действующих на квадратные матрицы, иногда порождает интересную динамическую систему (более точно, алгебраическую динамическую систему с дискретным временем). Хороший пример может быть найден в работе [1] (см. также литературу к этой работе), где рассматривались блочные матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, в которых A , B , C и D – матрицы размера $n \times n$. Первая инволюция состояла во взятии обычной обратной матрицы для всей блочной матрицы, а вторая – в следующем блочном транспонировании: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$. В [1] было показано, что эта система (рассматривавшаяся с точностью до естественно определяемой “калибровочной свободы”) является типичной солитонной системой, решаемой стандартными алгебро-геометрическими методами. Имеет смысл также упомянуть, что эта динамическая система оказалась связанной со статистической физикой: при специальном выборе матриц A , B , C , D для одной из редукций системы интегралами движения служат статсуммы двумерной неоднородной модели димеров.

Естественно возникает, однако, желание найти решения более общих, чем солитонные, динамических систем. Простейшим примером, иллюстрирующим такую возможность, может служить система, порождаемая следующим преобразованием: $z \mapsto z^2$, где

* Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия. E-mail: kig@susu.ac.ru

z принадлежит единичной окружности на комплексной плоскости. Эта система, очевидно, явно решается: после N шагов z переходит в z^{2^N} . С другой стороны, система обнаруживает хаотическое, а не солитонное поведение: любой интервал на окружности с течением времени заполняет всю окружность. Впрочем, в отличие от остальных динамических систем, обсуждаемых в этой статье, система “ $z \mapsto z^2$ ” не является обратимой.

Цель настоящей статьи – представить явные решения следующей алгебраической динамической системы. Пусть $\mathcal{A}$ – матрица размера $n \times n$ с элементами a_{ij} из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Мы рассматриваем две инволютивные операции на таких матрицах: матричное обращение $I: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{-1}$ и поэлементное, или адамарово, обращение $J: a_{ij} \mapsto a_{ij}^{-1}$. Наша динамическая система порождается итерациями произведения $J \circ I$.

Преобразования I и J естественно возникают при рассмотрении симметрий уравнения “звезда–треугольник” Онзагера – фундаментального уравнения, лежащего в основе интегрируемости многих моделей статистической физики. Они рассматривались группой французских физиков-теоретиков как минимум с 1991 г. [2]. Напомним, кстати, что знаменитое уравнение Янга–Бакстера является прямым обобщением соотношения Онзагера [3], и наши преобразования имеют свои аналоги в теории этого уравнения, также изучавшиеся упомянутой французской группой (удобной ссылкой может служить работа [4], где можно найти дальнейшую библиографию). Наиболее свежие из известных автору результатов французской группы, относящиеся к частным случаям рассматриваемой нами динамической системы, можно найти в статье [5].

Уравнение “звезда–треугольник” Онзагера имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c} i_1 \\ | \\ A_1 \\ / \quad \backslash \\ A_2 \quad i \quad A_3 \\ \backslash \quad / \\ i_2 \quad i_3 \end{array} = \begin{array}{c} i_1 \\ \backslash \quad / \\ B_3 \quad B_2 \\ / \quad \backslash \\ i_2 \quad i_3 \\ B_1 \end{array} . \quad (1)$$

Здесь каждой вершине (белому или черному кружку) соответствует индекс (обозначаемый i_1, i_2, i_3 или i), пробегающий n значений; каждому ребру сопоставляется матрица (они обозначены $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{B}_3$); черный кружок означает суммирование по всем значениям индекса i . Иными словами, (1) есть уравнение

$$\sum_{i=1}^n (\mathcal{A}_1)_{ii_1} (\mathcal{A}_2)_{ii_2} (\mathcal{A}_3)_{ii_3} = (\mathcal{B}_1)_{i_2 i_3} (\mathcal{B}_2)_{i_3 i_1} (\mathcal{B}_3)_{i_1 i_2},$$

которое должно выполняться для всех наборов “свободных” индексов i_1, i_2, i_3 .

Изложим кратко, как возникают симметрии в пространстве решений такого уравнения, т.е. как по одному решению – набору матриц $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{B}_3$ – можно получить другое. Чуть более подробное изложение можно найти в [4]¹⁾.

¹⁾ Именно, авторы работы [4] проводят на каждом ребре стрелку, показывающую, какая из вершин отвечает первому индексу данной матрицы, какая – второму. Для нас это не очень существенно: мы не развиваем теорию симметрий уравнения Онзагера, а лишь показываем, как здесь появляются композиции $J \circ I$ и $I \circ J$ и их степени.

Очевидно, матрицу B_2 можно перенести в левую часть (1), заменив ее на адамарову обратную $J(B_2)$:

$$\begin{array}{c} \circ \\ | \\ A_1 \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ A_2 \quad A_3 \\ \circ \quad \circ \end{array} J(B_2) = \begin{array}{c} \circ \\ / \\ B_3 \\ \backslash \\ \bullet \\ \backslash \quad / \\ B_1 \quad \circ \end{array} .$$

Можно также перенести A_2 в правую часть, заменив ее на $I(A_2) = A_2^{-1}$:

$$\begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ A_1 \quad A_3 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \\ \backslash \quad / \\ A_2 \quad \circ \end{array} J(B_2) = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ B_3 \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ I(A_2) \quad B_1 \\ \circ \quad \circ \end{array} .$$

Прделаем теперь аналогичные преобразования с ребрами (матрицами) A_1 и B_1 . Получим

$$\begin{array}{c} \circ \\ | \\ J(B_2) \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ A_3 \quad I(B_1) \\ \circ \quad \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ J(A_1) \quad B_3 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \\ \backslash \quad / \\ I(A_2) \quad \circ \end{array} .$$

Если теперь снова проделать такие преобразования сначала с парой $I(A_2)$, $J(B_2)$, а затем с парой $I(B_1)$, $J(A_1)$, то мы получим соотношение (1), в котором произведены следующие замены:

$$\begin{aligned} A_1 &\mapsto (I \circ J)(A_1); & A_2 &\mapsto (J \circ I)(A_2); \\ B_1 &\mapsto (J \circ I)(B_1); & B_2 &\mapsto (I \circ J)(B_2); \\ A_3 &\text{ и } B_3 && \text{остаются прежними.} \end{aligned}$$

Ясно, что можно осуществлять длинные цепочки таких преобразований, в которые можно также вовлечь A_3 и B_3 . Эти преобразования действуют на множестве решений уравнения “звезда–треугольник” и могут способствовать изучению этого множества и, более того, построению новых решений.

Вернемся к эволюции одной матрицы A размера $n \times n$. Мы изучаем ее независимо от того, является или нет A решением уравнения “звезда–треугольник”. Как мы покажем далее, случай $n = 2$ тривиален, но он послужит нам полезным упражнением, допускающим не совсем очевидное обобщение на случай $n = 3$. Для $n = 3$ мы даем полное явное решение нашей динамической системы в терминах начальной матрицы A . Еще более сложным, но все же полностью интегрируемым является случай $n = 4$. Для него мы выписываем анзац в терминах одномерных тета-функций. Этот анзац охватывает “почти все” начальные матрицы – открытое по Зарисскому их множество.

Для $n \geq 5$ модель больше не является интегрируемой. Тем не менее, *тот же самый анзац*, что и для $n = 4$, по-прежнему дает решения системы, только теперь он охватывает множество матриц ненулевой коразмерности. Например, для $n = 5$ эта коразмерность равна 5, т.е. под действие анзаца подпадает неожиданно обширное – двадцатимерное – множество начальных матриц.

Весьма интересно, что наши точные решения при $n \geq 5$ не могут быть сведены какой-либо параметризацией к сдвигу на торе, как это имеет место для вполне интегрируемых систем, а также для нашей системы при $n = 4$. Вместо этого шаг эволюции описывается нетривиальным (т.е. не тождественным и не композицией умножения на -1 и тождественного) целочисленным линейным преобразованием произведения $T \times T$ двух одинаковых комплексных торов с определителем, равным 1. Это приводит к *перемешиванию* — точки из малой области в $T \times T$ в процессе эволюции целиком заполняют произведение $T \times T$ все более плотно.

Чтобы это пояснить, имеет смысл рассмотреть сначала произведение двух одинаковых *вещественных окружностей*, т.е. плоскость $\mathbb{R}^2$, факторизованную по целочисленной решетке. Точка такого произведения представляется двумя координатами x и y , каждую из которых можно считать принадлежащей полуинтервалу $[0, 1)$. Нам будет удобно записывать это в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [0, 1) \times [0, 1)$. Если теперь возрастающие степени B^N некоторой матрицы $B \in SL(2, \mathbb{Z})$ действуют на столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, причем собственные значения B вещественны и отличны от ± 1 , то любая область $\mathcal{D}$ из $[0, 1) \times [0, 1)$ неограниченно растягивается в одном направлении и сжимается в другом, превращаясь в тонкую полосу. Чтобы правильно описать нашу эволюцию, нужно еще заменить элементы столбца $B^N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ их дробными частями. Тогда полоска разбивается на куски, нанесенные на квадрат $[0, 1) \times [0, 1)$ в виде плотной (при большом N) штриховки. В силу обратимости такого движения, эти куски никогда не перекрываются; их суммарная площадь остается постоянной, но они заполняют квадрат все более плотно.

Теперь нетрудно понять, что и в комплексном случае преобразование величин x и y , принадлежащих одинаковым комплексным торам, выписанное ниже в формуле (33), приводит при $n \geq 5$ к перемешиванию по аналогичным причинам.

Содержание статьи таково. В разделе 2 решается задача об эволюции (2×2) -матриц. В разделе 3 решается чуть менее тривиальная задача об эволюции (3×3) -матриц. В разделе 4 указываются законы сохранения для эволюции (4×4) -матриц и приводятся результаты их изучения с помощью компьютерной алгебры. В частности, эти результаты подсказывают идею изучить один специальный определитель из отношений тета-функций, что и делается в разделе 5, причем размер определителя не обязательно 4×4 . В разделе 6 исследуется эволюция матриц, заданных специальным анзацем, вытекающим из рассмотрений предыдущего раздела. Раздел 7 содержит сравнение полученных результатов, в нем кратко обсуждаются различия в эволюциях матриц разных размеров, рассмотренных ранее. В заключительных разделах 8 и 9 рассматривается эволюция матриц трех специальных видов. Возникающие здесь интересные дополнительные структуры могут быть материалом дальнейших исследований.

Предварительная версия части материала этой статьи находится в электронном препринте [6].

2. МАТРИЦЫ РАЗМЕРА 2×2

Несмотря на тривиальность нашей динамической системы при $n = 2$, ее решение дает нам полезный инструмент, который будет играть ключевую роль также при $n = 3$, — *мультипликативный базис эволюции*.

Мы обозначаем матрицу и ее элементы как $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, а ее определитель — как $\Delta = ad - bc$. Основное наблюдение состоит в том, что как I (матричное обращение), так и J (адамарово обращение) преобразуют величины

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \Delta, \quad -1 \quad (2)$$

чисто мультипликативным образом. Именно, I действует следующим образом:

$$\begin{aligned} a &\mapsto d\Delta^{-1}, & b &\mapsto -b\Delta^{-1}, & c &\mapsto -c\Delta^{-1}, & d &\mapsto a\Delta^{-1}, \\ \Delta &\mapsto \Delta^{-1}, & -1 &\mapsto -1; \end{aligned} \quad (3)$$

а J — следующим образом:

$$\begin{aligned} a &\mapsto a^{-1}, & b &\mapsto b^{-1}, & c &\mapsto c^{-1}, & d &\mapsto d^{-1}, & \Delta &\mapsto -a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}\Delta, \\ & & & & & & & & -1 &\mapsto -1. \end{aligned} \quad (4)$$

Поэтому мы будем говорить, что шесть величин (2) образуют мультипликативный базис эволюции.

Если взять столбец из логарифмов величин (2), то преобразования (3), (4) описываются, соответственно, действием на него матриц $T_I, T_J \in GL(6, \mathbb{Z})$, где

$$T_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно, впрочем, обойтись и без логарифмов, считая, что матрицы T_I и T_J действуют на столбец из самих величин (2) *мультипликативно* в том же смысле, в котором число 2 действует мультипликативно на переменную x , переводя ее в x^2 .

Разумеется, величины (2) после N шагов эволюции получаются аналогичным образом с помощью матрицы $(T_J T_I)^N$. Она, в свою очередь, задается несколькими различными выражениями для четных и нечетных N . Например, если $N = 2k$, то

$$(T_J T_I)^N = \begin{pmatrix} -k+1 & -k & -k & -k & 2k & -k \\ -k & -k+1 & -k & -k & 2k & -k \\ -k & -k & -k+1 & -k & 2k & -k \\ -k & -k & -k & -k+1 & 2k & -k \\ -2k & -2k & -2k & -2k & 4k+1 & -2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что, например, значение переменной a после $2k$ шагов есть

$$a(2k) = a^{-k+1} b^{-k} c^{-k} d^{-k} \Delta^{2k} (-1)^{-k}, \quad (5)$$

и аналогичные формулы нетрудно выписать для b, c и d . В правой части последнего равенства, разумеется, стоят начальные значения переменных.

3. МАТРИЦЫ РАЗМЕРА 3×3

Как было сказано выше, случай $n = 3$ решается аналогично случаю $n = 2$. Однако, чтобы это стало возможным, нам потребуется одна специфическая формула, относящаяся к определителям матриц размера 3×3 .

Для матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ r & s & t \end{pmatrix} \quad (6)$$

мы обозначаем $\text{dh } \mathcal{A}$ детерминант ее адамаровой обратной, умноженный для удобства на произведение всех матричных элементов $\mathcal{A}$:

$$\text{dh } \mathcal{A} = agtbhr + fscagt + bhrfsc - rgcfbt - fbts ha - shargc. \quad (7)$$

Оказывается, $\text{dh } \mathcal{A}$ красиво преобразуется при взятии (обычной) обратной от $\mathcal{A}$:

$$\text{dh } \mathcal{A}^{-1} = -\text{dh } \mathcal{A} (\det \mathcal{A})^{-4}. \quad (8)$$

Это и есть интересующая нас формула. Для ее доказательства достаточно применить компьютерную алгебру. Нас привели к этой формуле следующие соображения, навеянные весьма интересной работой [7].

Предположим, что адамарова обратная к матрице $\mathcal{A}$ вырождена, т.е.

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & b^{-1} & c^{-1} \\ f^{-1} & g^{-1} & h^{-1} \\ r^{-1} & s^{-1} & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого ненулевого столбца $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Это равенство можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} fr & gs & ht \\ ar & bs & ct \\ af & bg & ch \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\alpha' = \alpha/(afr)$, $\beta' = \beta/(bgs)$, $\gamma' = \gamma/(cht)$.

Формула (9) показывает, что строки матрицы $\mathcal{A}$ попарно ортогональны с весами α' , β' , γ' , т.е. выполнено соотношение

$$\mathcal{A} \mathcal{D}_1 \mathcal{A}^T = \mathcal{D}_2, \quad (10)$$

где $\mathcal{D}_1 = \text{diag}(\alpha', \beta', \gamma')$ и $\mathcal{D}_2$ — диагональные матрицы, а верхний индекс Т означает транспонирование. Но при условии обратимости $\mathcal{A}$ из (10) следует аналогичное соотношение для $\mathcal{A}^{-1}$:

$$\mathcal{A}^{-1} \mathcal{D}_2 (\mathcal{A}^{-1})^T = \mathcal{D}_1.$$

Поэтому ясно, что вырожденность адамаровой обратной к $\mathcal{A}$ должна быть связана с вырожденностью адамаровой обратной к $\mathcal{A}^{-1}$. Теперь нетрудно получить точную формулу (8). Отметим, что пока не найдено аналога приведенных соотношений для матриц размера $n > 3$.

Теперь мы можем найти решение для $n = 3$ аналогично решению для $n = 2$, полученному в разделе 2. Кроме формулы (8), нам понадобятся более очевидные формулы, выписанные ниже.

Мультипликативный базис эволюции состоит из следующих величин: матричных элементов $a, b, c, f, g, h, r, s, t$; определителя $\Delta = \det \mathcal{A}$; девяти алгебраических дополнений матричных элементов, которые мы обозначаем соответствующими заглавными буквами: $A = \begin{vmatrix} g & h \\ s & t \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} f & h \\ r & t \end{vmatrix}$ и т.д.; величины $\Xi = \det \mathcal{A}$, определенной согласно (7), и, наконец, числа -1 . Теперь мы в состоянии выписать действие двух инволюций на эти величины.

Матричное обращение I действует следующим образом:

$$\begin{aligned} a &\mapsto A\Delta^{-1}, & b &\mapsto F\Delta^{-1}, & \dots, & & t &\mapsto T\Delta^{-1}; \\ A &\mapsto a\Delta^{-1}, & B &\mapsto f\Delta^{-1}, & \dots, & & T &\mapsto t\Delta^{-1}; \\ \Delta &\mapsto \Delta^{-1}, & \Xi &\mapsto -\Xi\Delta^{-4}, & -1 &\mapsto -1. \end{aligned}$$

Поэлементное обращение J действует следующим образом:

$$\begin{aligned} a &\mapsto a^{-1}, & \dots, & & t &\mapsto t^{-1}; \\ A &\mapsto -Ag^{-1}h^{-1}s^{-1}t^{-1}, & \dots, & & T &\mapsto -Ta^{-1}b^{-1}f^{-1}g^{-1}; \\ \Delta &\mapsto \Xi a^{-1}b^{-1}c^{-1}f^{-1}g^{-1}h^{-1}r^{-1}s^{-1}t^{-1}, \\ \Xi &\mapsto \Delta a^{-1}b^{-1}c^{-1}f^{-1}g^{-1}h^{-1}r^{-1}s^{-1}t^{-1}, \\ -1 &\mapsto -1. \end{aligned}$$

Теперь аналогично тому, как это делалось в разделе 2, мы можем вычислить матрицу $T_J T_I$, отвечающую одному шагу эволюции. Эта матрица имеет размер 21×21 , и мы не будем ее здесь выписывать. Используя компьютер, однако, нетрудно манипулировать такими матрицами. Замечательный факт состоит в том, что *все собственные значения матрицы $T_J T_I$ являются корнями шестой степени из единицы*. Эти собственные значения с их кратностями приведены в следующей таблице:

Собственные значения	$\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$	1	-1
Кратности	1	1	4	4	7	4

Эту таблицу можно дополнить описанием нетривиальных жордановых клеток матрицы $T_J T_I$. Таковых пять, и они соответствуют только собственным значениям ± 1 : две

жордановы клетки размера 2 с собственным значением -1 , две клетки размера 2 и одна размера 3 с собственным значением 1.

Рассчитывая на компьютере матричные элементы степеней матрицы $T_J T_I$, нетрудно установить, а также доказать по индукции явный вид этих элементов. Это также позволяет выписать явный вид элементов матрицы $\mathcal{A}$ после N шагов эволюции. В частности, выражение для переменной a после $N = 3k$ шагов эволюции имеет следующий вид:

$$a(3k) = a^{-2k+1} b^{-k} c^{-k} f^{-k} r^{-k} \Delta^{2k} A^{-2k} B^{-k} C^{-k} F^{-k} R^{-k} \Xi^{2k} (-1)^{-3k(2k-1)}. \quad (11)$$

Разумеется, показатель степени при (-1) можно упростить; мы здесь выписали просто соответствующий элемент матрицы $(T_J T_I)^{3k}$. Как и в формуле (5), в правой части равенства (11) стоят *начальные* значения переменных.

4. МАТРИЦЫ РАЗМЕРА 4×4 : ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

В этом разделе описывается путь, приведший к построению анзаца, дающего решения нашей динамической системы, и основанный на изучении *законов сохранения при $n = 4$* . Сам же анзац вводится в следующих разделах формально независимо от материала этого раздела. Мы увидим, что несколько неожиданным образом анзац оказывается пригодным для любого n .

Во-первых, мы можем упростить задачу об эволюции (4×4) -матрицы $\mathcal{A}$, рассматривая ее с точностью до *калибровочных преобразований*, состоящих, по определению, в умножении матрицы $\mathcal{A}$ слева и справа на *диагональные* матрицы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, соответственно. Ясно, что если

$$\mathcal{A}' = \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{C}, \quad (12)$$

то

$$(J \circ I)(\mathcal{A}') = \mathcal{C}(J \circ I)(\mathcal{A})\mathcal{B}, \quad (13)$$

т.е. если матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ калибровочно эквивалентны, то и их образы после шага эволюции калибровочно эквивалентны. Используя преобразование (12), мы можем привести (почти любую) матрицу $\mathcal{A}$ к следующей форме:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & f & g & h \\ 1 & r & s & t \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Таким образом, можно сказать, что в матрице $\mathcal{A}$ остается девять параметров. Если мы найдем восемь независимых законов сохранения, это будет веским доводом в пользу того, что эволюция происходит вдоль эллиптических или рациональных кривых (потому что только такие кривые имеют бесконечно много автоморфизмов).

Во-вторых, *существует много* сохраняющихся величин, которые к тому же инвариантны относительно преобразования (12). Рассмотрим разбиение матрицы размера 4×4 на четыре подматрицы размера 2×2 , например, одно из следующих:

$$\begin{pmatrix} \diamond & \diamond & * & * \\ \diamond & \diamond & * & * \\ \parallel & \parallel & \S & \S \\ \parallel & \parallel & \S & \S \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \diamond & \S & \diamond & \S \\ \parallel & * & * & \parallel \\ \diamond & \S & \diamond & \S \\ \parallel & * & * & \parallel \end{pmatrix},$$

где элементы, обозначенные одинаковыми символами, относятся к одной и той же подматрице.

Для любого такого разбиения p построим величину Π_p – произведение четырех соответствующих миноров. Можно проверить, что после одного шага эволюции отношение любых двух таких величин Π_p/Π_q переходит в Π'_p/Π'_q , где Π'_p есть произведение *алгебраических дополнений* миноров разбиения p (в *новой* матрице $\mathcal{A}$). Поэтому Π_p/Π_q инвариантно относительно *двух* шагов эволюции.

Чтобы понять, какие из этих инвариантов являются независимыми, проводился следующий компьютерный эксперимент²⁾. Рассматривались инварианты вида Π_p/Π_{p_0} , где разбиение p_0 фиксировано, а p пробегает все *остальные* разбиения; составлялась матрица Якоби из производных этих инвариантов по величинам $a, \dots, t$ и вычислялся ее ранг при выбранных наугад значениях этих величин. Он неизменно оказывался равным 8. Это практически безошибочно указывало, что имеется ровно восемь алгебраически независимых инвариантов.

Кроме того, оказалось возможным найти род алгебраической кривой, определяемой системой восьми уравнений вида $\Pi_p/\Pi_q = \text{const}$, где в качестве восьми значений константы выбирались некоторые рациональные числа с небольшими по модулю числителями и знаменателями. Для этого все переменные, кроме двух (например, a и b), последовательно исключались из этой системы. Для большей ясности приведем одно конкретное уравнение, связывающее a и b , полученное таким способом в ходе эксперимента:

$$\begin{aligned} & -759831650653968b^3 + 57410859948744b^3a^3 - 69073230411340b^3a^2 - \\ & -320416949043840b^3a + 580584963356244a^4 + 227612010724560b^2a^4 + \\ & + 227612010724560b^2 - 95182849253915a^2 + 281969166949980b^2a^3 + \\ & + 618704099891526b^2a^2 + 281969166949980b^2a - 759831650653968ba^4 - \\ & - 320416949043840ba^3 - 69073230411340ba^2 + 57410859948744ba - \\ & - 212424371562228a^3 + 580584963356244b^4 - 95182849253915a^2b^4 - \\ & - 212424371562228ab^4 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Род этой кривой равен единице, как и ожидалось. Более того, интересные результаты приносит исследование *особых точек* кривой, заданной уравнением (15) и рассматриваемой как кривая, лежащая в $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \ni (a, b)$. Оказывается, что точки

²⁾ Все эксперименты в этой статье делались с использованием программы Maple.

$(a, b) = (0, 0)$ и $(a, b) = (\infty, \infty)$ являются обыкновенными двойными точками, а в точке $(a, b) = (1, 1)$ пересекаются четыре ветви кривой!

Именно эта ситуация будет иметь место, если мы введем параметризацию $a = a(u)$, $b = b(u)$ с использованием *нечетной тета-функции Якоби* $\vartheta(u)$, определение которой дано ниже в формуле (19), где u – параметр на комплексном торе. Сначала определим матричные элементы a_{ij} матрицы $\mathcal{A}$ следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{\vartheta(u - \lambda_i - \mu_j)}{\vartheta(u + \lambda_i + \mu_j)}, \quad (16)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ и $\mu_1, \dots, \mu_4$ – произвольные комплексные числа. Затем приведем $\mathcal{A}$ к виду (14) с помощью преобразования (12), так что получится

$$a = \frac{a_{22}a_{11}}{a_{21}a_{12}}, \quad b = \frac{a_{23}a_{11}}{a_{21}a_{13}} \quad \text{и т.д.} \quad (17)$$

Действительно, для $a(u)$ и $b(u)$, определенных посредством (16) и (17), нетрудно указать две точки u на эллиптической кривой, в которых $a = b = 0$, и две точки, в которых $a = b = \infty$. Кроме того, в точке $u = 0$, а также в трех точках, отстоящих от нее на полупериоды, $a = b = 1$.

5. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ ОТНОШЕНИЙ ТЕТА-ФУНКЦИЙ

В основе анзаца, дающего частные решения для нашей динамической системы при любом размере матриц n (и полное решение при $n = 4$, см. раздел 7.2), лежит слегка измененная формула (16). Именно, положим

$$\mathcal{K} = (k_{ij}), \quad k_{ij} = \frac{\vartheta(y - \lambda_i - \mu_j)}{\vartheta(x + \lambda_i + \mu_j)}. \quad (18)$$

Удобство введения двух независимых переменных x и y вместо одной переменной u станет особенно ясно из формулы (33). В формуле (18) индекс i , разумеется, обозначает номер строки, а индекс j – номер столбца; (λ_i) и (μ_j) – два массива из n комплексных переменных. Буквой ϑ мы обозначаем нечетную тета-функцию Якоби:

$$\vartheta(u) = 2q^{1/4} \sin \frac{\pi u}{2K} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - 2q^{2n} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4n} \right) (1 - q^{2n}), \quad (19)$$

где $q = \exp(-\pi K'/K)$; величины K и K' называются *полупериодами*.

Ключевую роль для нашего анзаца играет формула для *определителя* матрицы $\mathcal{K}$ вида (18). Оказывается, что

$$\begin{aligned} \det \mathcal{K} = & -(\vartheta(x+y))^{n-1} \vartheta \left((n-1)x - y + \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \times \\ & \times \frac{\prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \vartheta(\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1}) \cdot \prod_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} \vartheta(\mu_{j_2} - \mu_{j_1})}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \vartheta(x + \lambda_i + \mu_j)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Формулу, по существу, эквивалентную (20), можно найти в работе [8] (см. приложение А в этой работе). Автором она была открыта заново в ходе компьютерных экспериментов, в которых вместо тета-функции $\vartheta(u)$ подставлялась просто сама переменная u . Заметим, что работа [8] посвящена (во всяком случае, на первый взгляд) совсем другой проблематике, и появление в ней такого же специального определителя представляется весьма интересным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО формулы (20) проводится индукцией по n . Рассмотрим $\det \mathcal{K}$ как функцию λ_n . Она обязана иметь следующий вид:

$$\det \mathcal{K} = F \frac{\vartheta(\lambda_n - G) \prod_{i=1}^{n-1} \vartheta(\lambda_n - \lambda_i)}{\prod_{j=1}^n \vartheta(x + \lambda_n + \mu_j)}, \quad (21)$$

где F и G — некоторые величины, не зависящие от λ_n , но, возможно, зависящие от других переменных. Приведем аргументы, объясняющие, почему именно такие множители должны быть в формуле (21), и типичные для доказательств такого сорта формул с тета-функциями.

Каждый множитель $\vartheta(\lambda_n - \lambda_i)$ в числителе отвечает за то, что $\det \mathcal{K}$, очевидно, обращается в нуль, если λ_n совпадает с любым другим λ_i (из-за совпадения двух строк). Знаменатель в формуле (21) — это просто общий знаменатель всех элементов $\mathcal{K}$. Наконец, множитель $\vartheta(\lambda_n - G)$ необходим, чтобы обеспечить всему выражению, рассматриваемому как функция от λ_n , столько же нулей, сколько и полюсов.

С другой стороны, в окрестности значения $\lambda_n = -x - \mu_n$, в котором диагональный элемент k_{nn} имеет полюс, наш определитель ведет себя как

$$\det \mathcal{K} \approx \det \mathcal{K}^{(n-1)} \frac{\vartheta(x + y)}{\vartheta(x + \lambda_n + \mu_n)}, \quad (22)$$

где $\mathcal{K}^{(n-1)}$ есть та же матрица $\mathcal{K}$, но без n -й строки и n -го столбца (можно было бы также писать $\mathcal{K}^{(n)}$ вместо $\mathcal{K}$). Сравнивая (22) с (21) (в (21) мы тоже подставляем $\lambda_n = -x - \mu_n$), получаем величину F в следующем виде:

$$F = \det \mathcal{K}^{(n-1)} \frac{\vartheta(x + y) \prod_{j=1}^{n-1} \vartheta(\mu_n + \mu_j)}{\vartheta(-x - \mu_n - G) \prod_{i=1}^{n-1} \vartheta(-x - \mu_n - \lambda_i)}. \quad (23)$$

Теперь, подставляя эту величину в (21), получаем следующую формулу, выражающую $\det \mathcal{K}$ через $\det \mathcal{K}^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned} \det \mathcal{K} = \det \mathcal{K}^{(n-1)} \cdot & \frac{\vartheta(x + y) \prod_{j=1}^{n-1} \vartheta(-\mu_n + \mu_j)}{\vartheta(-x - \mu_n - G) \prod_{i=1}^{n-1} \vartheta(-x - \mu_n - \lambda_i)} \times \\ & \times \frac{\vartheta(\lambda_n - G) \prod_{i=1}^{n-1} \vartheta(\lambda_n - \lambda_i)}{\prod_{j=1}^n \vartheta(x + \lambda_n + \mu_j)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Остается вычислить величину G . Она может быть выведена из следующего рассуждения. Согласно индуктивному предположению, $\det \mathcal{K}^{(n-1)}$ содержит в качестве множителя тета-функцию $\vartheta((n-2)x - y + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j)$, т.е. обращается в нуль, если

$$(n-2)x - y + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j = 0 \quad \text{по модулю периодов.} \quad (25)$$

С другой стороны, $\det \mathcal{K}$, вообще говоря, *не* обращается тождественно в нуль при выполнении соотношения (25). Поэтому упомянутая тета-функция должна сокращаться с таким же множителем в знаменателе формулы (24), и этим множителем может служить только $\vartheta(-x - \mu_n - G)$. Следовательно,

$$-x - \mu_n - G = \pm \left((n-2)x - y + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \right),$$

и то, что в этом выражении следует взять знак плюс, можно определить, например, рассматривая выражение (24) как функцию от x (которая должна иметь правильную разность n между числом полюсов и нулей в параллелограмме периодов).

Получив таким образом формулу, связывающую $\det \mathcal{K}$ и $\det \mathcal{K}^{(n-1)}$, мы обосновали шаг индукции. Что касается базиса индукции, то формула (20) очевидным образом верна при $n = 1$.

6. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ $(J \circ I)\mathcal{A}$

Применим преобразование $J \circ I$, т.е. один шаг эволюции, к $(n \times n)$ -матрице $\mathcal{A} = \mathcal{K}$, заданной формулой (18). Матричный элемент a'_{ji} полученной матрицы $\mathcal{A}'$ дается формулой

$$a'_{ji} = \frac{\det \mathcal{A}}{A_{ij}}, \quad (26)$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $\mathcal{A}$. И числитель, и знаменатель в формуле (26) — определители вида (20). Вычисление показывает, что a'_{ji} является произведением четырех множителей различного характера:

$$a'_{ji} = c \cdot r_j \cdot s_i \cdot \tilde{a}_{ji}. \quad (27)$$

Здесь общий множитель

$$c = \vartheta(x+y) \vartheta \left((n-1)x - y + \sum_{k=1}^n \lambda_k + \sum_{l=1}^n \mu_l \right) \quad (28)$$

не зависит ни от j (номера строки), ни от i (номера столбца) элемента a'_{ji} ; множитель

$$r_j = \frac{\prod_{l=1, l \neq j}^n \vartheta(\mu_j - \mu_l)}{\prod_{k=1}^n \vartheta(x + \lambda_k + \mu_j)} \quad (29)$$

зависит только от номера строки j ; множитель

$$s_i = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n \vartheta(\lambda_i - \lambda_k)}{\prod_{l=1}^n \vartheta(x + \lambda_i + \mu_l)} \quad (30)$$

зависит только от номера столбца i .

Самый интересный для нас множитель

$$\tilde{a}_{ji} = \frac{\vartheta(x + \lambda_i + \mu_j)}{\vartheta((n-2)x - y + \sum_{k=1}^n \lambda_k + \sum_{l=1}^n \mu_l - \lambda_i - \mu_j)} \quad (31)$$

имеет, по существу, тот же вид, что и элемент a_{ij} исходной матрицы. Временно не обращая внимания на множители (28)–(30), рассмотрим матрицу $(\tilde{a}_{ji})$ с элементами (31). Она получается из исходной матрицы $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ следующим образом: делаем замены

$$x \mapsto x' = y - (n-2)x - \sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{j=1}^n \mu_j, \quad y \mapsto y' = -x \quad (32)$$

и транспонируем полученную матрицу. Имеет смысл переписать преобразование (32) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n+2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где мы ввели обозначение $s = -\sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{j=1}^n \mu_j$. Второе слагаемое в правой части (33), в известном смысле, не очень существенно, так как может быть устранено изменением начала отсчета переменных x и y , т.е. заменой их на $x - \text{const}_1$ и $y - \text{const}_2$ с подходящими константами. Формула (33) и есть целочисленное линейное преобразование произведения двух одинаковых комплексных торов, обещанное во введении.

При $n > 4$ собственные значения матрицы $B = \begin{pmatrix} -n+2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ вещественны и отличны от ± 1 . Поэтому итерации преобразования (33) приводят к *перемешиванию* на декартовом квадрате комплексного тора в соответствии с объяснением, данным во введении.

Если же $n = 4$, то B имеет жорданову форму $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что при этом величина $\eta = x - y$ возвращается к своему прежнему значению в результате *двукратного* применения преобразования (33), а к величине x добавляется постоянный сдвиг: $x \mapsto x + 2\eta + s$. Такой сдвиг типичен для *интегрируемых* систем и, разумеется, никакого перемешивания при $n = 4$ не происходит. Если бы мы хотели ограничиться случаем $n = 4$, вообще не имело бы смысла вводить две переменных x и y вместо одной переменной u из формулы (16) (ср. замечания о существенных параметрах в п. 7.2).

Нужно еще рассмотреть эффекты, вносимые множителями (28)–(30) в элемент a'_{ij} . Умножение каждого матричного элемента $\tilde{a}_{ji}$ на множитель r_j (29), зависящий только от номера строки j , очевидно, сводится к умножению матрицы $(\tilde{a}_{ji})$ на диагональную матрицу слева. Аналогично, умножение на s_i (30) эквивалентно умножению на диагональную матрицу справа, а множитель s (28) может быть включен в любую из этих матриц. Напомним, что умножение на диагональные матрицы мы называли калибровочным преобразованием (12). Таким образом, если мы хотим рассматривать эволюцию

матрицы вида (18) с точностью до калибровки, то эта эволюция сводится к N -кратному (N – число шагов) преобразованию величин x и y согласно формуле (33) и к транспонированию полученной матрицы, если N нечетно.

Можно также рассмотреть эволюцию матрицы (18) в полном объеме. Тогда, как объяснено в предыдущем абзаце, нужно еще учитывать на каждом шаге умножение на диагональные матрицы с двух сторон, что приведет в результате к умножению каждого матричного элемента на громоздкие дроби с произведениями тета-функций в числителе и знаменателе. Мы не выписываем здесь эти произведения; при $n = 4$, когда преобразование (33) сводится к сдвигу, и для случая вырождения тета-функций в линейные функции аналогичные произведения можно найти в работе [5].

7. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ МАТРИЦ РАЗЛИЧНОГО РАЗМЕРА

7.1. Случай $n = 3$. В случае $n = 3$ нет необходимости в сложном анзаце (18), который, напомним, нужно еще дополнить возможностью умножения матрицы на диагональные матрицы с двух сторон, как в формуле (12). В разделе 3 мы представили более прямой подход к этому случаю, приводящий к формулам типа формулы (11), выражающим матричные элементы через их исходные значения. Кстати, такие формулы сразу показывают, в каких случаях эволюция должна остановиться из-за необходимости деления на нуль.

7.2. Случай $n = 4$. При $n = 4$ анзац (18) вместе с умножением на две диагональные матрицы содержит в точности шестнадцать независимых параметров, т.е. дает открытое по Зарисскому множество матриц. Чтобы это увидеть, заметим, что десять величин x, y, λ_i и μ_j дают на самом деле только восемь параметров, так как матричные элементы k_{ij} в (18) не меняются, если мы сдвинем значения переменных одним из следующих способов (α и β – любые комплексные числа):

$$\lambda_i \mapsto \lambda_i + \alpha \quad \text{для всех } i, \quad \mu_j \mapsto \mu_j - \alpha \quad \text{для всех } j$$

или

$$x \mapsto x + \beta, \quad y \mapsto y - \beta, \quad \lambda_i \mapsto \lambda_i - \beta \quad \text{для всех } i. \quad (34)$$

Девятым параметром является *модуль эллиптической кривой*. Наконец, две диагональные матрицы доставляют семь оставшихся параметров.

Таким образом, эволюция почти любой матрицы описывается явными формулами, к тому же наиболее существенная часть этой эволюции состоит в сдвиге на торе, как объяснено в разделе 6. Это дает основание назвать нашу динамическую систему при $n = 4$ *полностью интегрируемой*.

7.3. Случай $n \geq 5$. Наш анзац работает при всех n , но при $n > 4$ он дает лишь подмногообразие ненулевой коразмерности в множестве всех матриц размера $n \times n$. Например, при $n = 5$ подсчет параметров, который делается таким же способом, как и в п. 7.2, показывает, что с помощью анзаца мы можем описать эволюцию двадцатипараметрического семейства матриц.

8. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Здесь мы рассмотрим два интересных специальных вида матриц, для которых эволюция описывается явными формулами. Еще один весьма интригующий случай рассматривается в разделе 9.

8.1. Особый случай с периодом 4. Хотя параметризация (18) вместе с умножением с двух сторон на диагональные матрицы согласно формуле (12) охватывает при $n = 4$ открытое по Зарисскому подмножество всех (4×4) -матриц, есть интересные случаи, которые она не включает непосредственно и которые, по-видимому, не так легко из нее получить. Если присмотреться к параметризации (18), мы увидим, что *все* (2×2) -миноры обращаются в ней в нуль одновременно. Это явление, по существу, уже описано нами в конце раздела 4: величины типа a и b из формулы (17) обращаются в единицу (что как раз соответствует обращению в нуль (2×2) -миноров, очевидным образом составленных из матричных элементов a_{ij} , через которые выражены a и b) при четырех фиксированных значениях переменной u , и мало что меняется, когда мы вводим вместо u две переменные x и y , ввиду инвариантности относительно сдвигов (34).

Здесь мы демонстрируем матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & xy & x \\ 1 & zt & 1 & z \\ 1 & t & y & 1 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

у которой некоторые (2×2) -миноры равны нулю, а другие – нет. Ее интересное свойство состоит в том, что, с *точностью до калибровки* (12), после четырех шагов эволюции мы снова получаем ту же матрицу (35). Это проверяется прямым компьютерным вычислением.

8.2. Единичная матрица плюс матрица ранга 1. Пусть в этом пункте $\mathcal{A}$ – квадратная матрица любого размера $n \times n$ вида

$$\mathcal{A} = \mathbf{1} + x \otimes (1, \dots, 1), \quad (36)$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица, x – столбец из чисел $x_1, \dots, x_n$, а $(1, \dots, 1)$ – строка из n единиц. Например, при $n = 3$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1 + x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Мы будем рассматривать эволюцию этих матриц с точностью до калибровочных преобразований (12).

Обратная матрица к матрице (36) есть

$$I(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{-1} = \mathbf{1} - \frac{x \otimes (1, \dots, 1)}{1 + \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Таким образом, это матрица того же вида (36), в которой произведена замена

$$x \mapsto \frac{-x}{1 + \sum_{i=1}^n x_i}. \quad (37)$$

Обратная по Адамару к матрице $\mathcal{A}$ (36) есть такая матрица $\mathcal{B} = J(\mathcal{A})$, у которой на i -м месте по диагонали стоит элемент $b_{ii} = 1/(1 + x_i)$, а вне диагонали – элемент $b_{ij} = 1/x_i$. Эти формулы можно объединить, используя дельта-символ Кронекера δ_{ij} :

$$b_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{x_i(1 + x_i)} + \frac{1}{x_i}. \quad (38)$$

Калибровочным преобразованием (12) можно привести матрицу с элементами (38) снова к виду (36), причем сделать это единственным способом. Получится матрица $\tilde{\mathcal{B}}$ с элементами

$$\tilde{b}_{ij} = \delta_{ij} - (1 + x_i),$$

т.е. адамарово обращение J приводит (с точностью до калибровки) к преобразованию

$$x_i \mapsto -(1 + x_i). \quad (39)$$

Объединяя это преобразование и преобразование (37), получаем, что шаг эволюции $J \circ I$ преобразует величины x_i следующим образом:

$$x_i \mapsto x_i^{(1)} = \frac{x_i}{1 + \sum_{j=1}^n x_j} - 1. \quad (40)$$

Введем матрицу $\mathcal{L}$ размера $(n+1) \times (n+1)$ со следующими матричными элементами: единицы в последней строке и последнем столбце; на диагонали, кроме последнего места, нули; на остальных местах стоят -1 . Например, при $n = 3$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что преобразование (40) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^n x_j} \mathcal{L} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ – столбец из элементов $x_1, \dots, x_n, 1$ и аналогично $\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix}$ – столбец из величин $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, 1$. Иными словами, преобразование n -мерного *проективного пространства*, задаваемое матрицей $\mathcal{L}$, переводит точку с координатами $(x_1, \dots, x_n, 1)$ в точку с координатами $(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, 1)$.

Таким образом, вопрос о том, во что переходит матрица $\mathcal{A}$ (36) в результате N шагов эволюции, сводится к взятию N -й степени матрицы $\mathcal{L}$.

9. СЛУЧАЙ $n = 5$, ЦИРКУЛЯНТНЫЕ ТЁПЛИЦЕВЫ МАТРИЦЫ

Еще один специальный вид матриц, сохраняющийся при эволюции нашей динамической системы, – циркулянтные тёплицевы матрицы. Нам особенно интересен случай $n = 5$, когда они имеют вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & f & g \\ g & a & b & c & f \\ f & g & a & b & c \\ c & f & g & a & b \\ b & c & f & g & a \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Здесь мы рассмотрим эволюцию именно таких матриц.

Сначала укажем, при каких условиях матрица данного вида допускает параметризацию вида (18). Сопоставляя эти две формулы, нетрудно увидеть, что величины a , b , c , f и g обязаны иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\vartheta(x)}{\vartheta(y)}, & b &= \frac{\vartheta(x + \frac{2K}{5})}{\vartheta(y + \frac{2K}{5})}, & c &= \frac{\vartheta(x + \frac{4K}{5})}{\vartheta(y + \frac{4K}{5})}, \\ f &= \frac{\vartheta(x + \frac{6K}{5})}{\vartheta(y + \frac{6K}{5})}, & g &= \frac{\vartheta(x + \frac{8K}{5})}{\vartheta(y + \frac{8K}{5})}, \end{aligned} \quad (42)$$

или аналогичный ему с заменой “квазипериода” $2K$ на любой другой квазипериод. Формулы (42) содержат три параметра: x , y и модуль эллиптической кривой. Четвертым параметром может служить общий числовой множитель. Таким образом, мы умеем описывать явными формулами эволюцию подмножества циркулянтных тёплицевых (5×5) -матриц коразмерности 1.

Используя формулы (42) и стандартные рассуждения, применяемые при выводе соотношений между тета-функциями, оказалось возможным явно вычислить многочлен $P(a, b, c, f, g)$ такой, что условие $P(a, b, c, f, g) = 0$ выделяет это подмножество. Приведем результат:

$$P = a(b^2g^2 - c^2f^2) + b(a^2c^2 - f^2g^2) + c(b^2f^2 - a^2g^2) + f(c^2g^2 - a^2b^2) + g(a^2f^2 - b^2c^2).$$

Для матрицы *общего* вида (41) многочлен P , как нетрудно проверить, преобразуется следующим образом под действием операций I и J (т.е. напомним, взятия обычной и адамаровой обратной):

$$I: P \mapsto -\frac{P}{(\det \mathcal{A})^2}, \quad J: P \mapsto -\frac{P}{a^2b^2c^2f^2g^2}.$$

Это сразу поднимает вопрос для дальнейших исследований: какие еще многочлены от матричных элементов, и для каких матриц, преобразуются простым образом под действием обоих преобразований I и J ?

Дальнейшие интересные наблюдения над эволюцией матриц вида (41) связаны с инвариантными *дифференциальными формами*. Прямое вычисление показывает, что, во-первых, имеется инвариантная “форма объема”

$$\omega = \frac{da \wedge db \wedge dc \wedge df \wedge dg}{P}.$$

Кроме того, имеется *замкнутая* инвариантная 4-форма ν , $d\nu = 0$:

$$\begin{aligned} \nu = \frac{1}{P} & (a db \wedge dc \wedge df \wedge dg - b da \wedge dc \wedge df \wedge dg + c da \wedge db \wedge df \wedge dg - \\ & - f da \wedge db \wedge dc \wedge dg + g da \wedge db \wedge dc \wedge df). \end{aligned}$$

Эту 4-форму можно получить, если свернуть 5-форму ω с векторным полем

$$a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} + c \frac{\partial}{\partial c} + f \frac{\partial}{\partial f} + g \frac{\partial}{\partial g}. \quad (43)$$

Данное поле очевидным образом инвариантно относительно композиции преобразований $J \circ I$, так как сдвиг вдоль него отвечает умножению всех переменных $a, \dots, g$ на общий множитель. Таким образом, форма ν , можно сказать, есть инвариантная форма 4-объема, отвечающая случаю, когда мы рассматриваем эволюцию матриц вида (41) с точностью до числового множителя.

Естественно возникают следующие вопросы: какие еще инвариантные или просто эволюционирующие формы существуют в этой и аналогичных задачах; какую информацию можно извлечь с их помощью?

Завершим эту статью недавним интригующим наблюдением. Рассмотрим матрицы вида (41), но вместо анзаца (42) попробуем следующий:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sin x}{\sin y}, & b &= \frac{\sin(x + \frac{2\pi}{5})}{\sin(y + \frac{4\pi}{5})}, & c &= \frac{\sin(x + \frac{4\pi}{5})}{\sin(y + \frac{8\pi}{5})}, \\ f &= \frac{\sin(x + \frac{6\pi}{5})}{\sin(y + \frac{12\pi}{5})}, & g &= \frac{\sin(x + \frac{8\pi}{5})}{\sin(y + \frac{16\pi}{5})}. \end{aligned} \quad (44)$$

Будем рассматривать эволюцию этих матриц с точностью до общего множителя. Тогда оказывается, что матричные элементы a', b', c', f', g' матрицы $\mathcal{A}' = (J \circ I)(\mathcal{A})$ задаются выражениями подобного (44) типа, но с заменой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \frac{2\pi}{5} \mapsto \frac{6\pi}{5}, \quad (45)$$

т.е. они суть

$$a' = \frac{\sin y}{\sin(x - y)}, \quad b' = \frac{\sin(y + \frac{6\pi}{5})}{\sin(x - y + \frac{12\pi}{5})}, \quad \dots, \quad g' = \frac{\sin(y + \frac{24\pi}{5})}{\sin(x - y + \frac{48\pi}{5})}.$$

Таким образом, во-первых, существует еще одно инвариантное двумерное (или трехмерное, если добавить общий множитель) подмногообразие, не лежащее в подмногообразии, заданном формулами (42). Во-вторых, преобразование величин x и y , задаваемое формулой (45), также приводит к перемешиванию, во всяком случае, при вещественных x и y , по причинам, объясненным во введении. Вопросы, на которые пока не удалось найти ответа, таковы: как обобщить тригонометрические формулы (44) на *эллиптический* случай; если это возможно, то что будет аналогом многочлена P для полученного подмногообразия коразмерности единица?

Благодарности. Автор благодарит Клода Виалле за информацию о работе [5] и рецензента за замечания, способствовавшие улучшению статьи, в частности, за указание на работу [8]. Работа выполнена при поддержке совместного гранта Российского фонда фундаментальных исследований и губернатора Челябинской области № 04-01-96010.

Список литературы

- [1] *I. G. Korepanov.* Algebraic integrable dynamical systems, 2 + 1-dimensional models in wholly discrete space-time, and inhomogeneous models in 2-dimensional statistical physics. solv-int/9506003.
- [2] *M. P. Bellon, J.-M. Maillard, C.-M. Viallet.* Phys. Lett. A. 1991. V. 159. P. 221–232.
- [3] *Р. Бэкстер.* Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [4] *M. P. Bellon, J.-M. Maillard, C.-M. Viallet.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 1373–1376; hep-th/9112067.
- [5] *J.-Ch. Anglès d'Auriac, J.-M. Maillard, C.M. Viallet.* A classification of four-state spin edge Potts models. cond-mat/0209557.
- [6] *I. G. Korepanov.* Exact solution for a matrix dynamical system with usual and Hadamard inverses. nlin.SI/0303007.
- [7] *J. M. Landsberg.* On an unusual conjecture of Kontsevich and variants of Castelnuovo's lemma. alg-geom/9604023.
- [8] *N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 567 [FS]. P. 554–582.

Поступила в редакцию 21.IX.2004 г.,
после доработки 22.XI.2004 г.