Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, Когомологии супералгебры Пуассона, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 2, 163–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1809>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:48:28

© 2005 г. С. Е. Конштейн*, А. Г. Смирнов*, И. В. Тютин*

КОГОМОЛОГИИ СУПЕРАЛГЕБРЫ ПУАССОНА

В предположении непрерывности коцепей исследованы пространства когомологий супералгебры Пуассона, реализованной на гладких функциях с компактным носителем на $\mathbb{R}^{2n}$ со значениями в алгебре Грассмана. Для случая постоянной невырожденной суперскобки Пуассона и произвольного $n > 0$ найдены первое и второе пространства когомологий в тривиальном представлении и нулевое и первое пространства когомологий в присоединенном представлении супералгебры Пуассона. Для произвольного $n > 1$ найдены третье пространство когомологий в тривиальном представлении и второе пространство когомологий в присоединенном представлении данной супералгебры.

Ключевые слова: алгебра Грассмана, супералгебра Пуассона, когомологии, деформация, *-коммутатор, квантование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Надежды на построение квантовой механики на нетривиальных многообразиях принято связывать с так называемым геометрическим, или деформационным квантованием [1]–[4]. При этом функции на фазовом пространстве ассоциируются с операторами, а произведение и коммутатор операторов описываются ассоциативным *-произведением и *-коммутатором функций, которые являются деформациями обычного поточечного произведения и скобки Пуассона.

Для отыскания деформаций супералгебры Пуассона необходимо вычислить вторую когомологию супералгебры Пуассона в присоединенном представлении.

Низшие когомологии (вплоть до второй) были вычислены в [5] для алгебры Пуассона, состоящей из гладких комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^{2n}$. В работе [6] изучались деформации супералгебры Ли гамильтоновых полей с полиномиальными коэффициентами. Чисто грассманов случай $n = 0$ был рассмотрен в [7] и [8].

В данной статье найдены низшие когомологии супералгебры Пуассона грассмано-значных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^{2n}$ в тривиальном (вплоть до третьей когомологии) и присоединенном (вплоть до второй когомологии) представлениях для

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: konsteyn@lpi.ru, smirnov@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

случая $n \geq 2$. Случай $n = 1$, требующий отдельного анализа, рассмотрен в [9]. В работе [10] исследуются центральные расширения алгебр, рассмотренных в данной статье.

Обозначим через $\mathbb{K}$ либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, а через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – пространство гладких $\mathbb{K}$ -значных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$, наделенное стандартной топологией: по определению последовательность $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, если носители всех φ_k содержатся в некотором фиксированном компакте, а $\partial^\lambda \varphi_k$ равномерно сходятся к $\partial^\lambda \varphi$ для любого мультииндекса λ . Положим

$$\mathbf{D}_{n_+}^{n_-} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-}, \quad \mathbf{E}_{n_+}^{n_-} = C^\infty(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-}, \quad \mathbf{D}_{n_+}'^{n_-} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-},$$

где $\mathbb{G}^{n_-}$ – грассманова алгебра с n_- образующими, а $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_+})$ – пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_+})$. Образующие алгебры Грассмана (соответственно координаты пространства $\mathbb{R}^{n_+}$) будут обозначаться через ξ^α , $\alpha = 1, \dots, n_-$ (соответственно через x^i , $i = 1, \dots, n_+$). Также будут использоваться коллективные переменные z^A , равные x^A при $A = 1, \dots, n_+$ и равные ξ^{A-n_+} при $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$. Пространства $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, $\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$ и $\mathbf{D}_{n_+}'^{n_-}$ обладают естественной градуировкой, которая определяется градуировкой алгебры Грассмана. Четность элемента f этих пространств будет обозначаться через $\varepsilon(f)$. Положим также $\varepsilon_A = 0$ при $A = 1, \dots, n_+$ и $\varepsilon_A = 1$ при $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$ и введем обозначения $\sigma(f, g) = (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}$ и $\sigma(A, B) = (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B}$.

Обозначим через $\partial/\partial z^A$ и $\overleftarrow{\partial}/\partial z^A$ операторы левого и правого дифференцирования, соответственно. Скобка Пуассона задается соотношением

$$\{f, g\}(z) = f(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} g(z) = -\sigma(f, g) \{g, f\}(z), \quad (1.1)$$

где симплектическая метрика $\omega^{AB} = -\sigma(A, B) \omega^{BA}$ является постоянной обратимой матрицей. Для определенности выберем ее в виде

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} \omega^{ij} & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha \delta^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad \lambda_\alpha = \pm 1, \quad i, j = 1, \dots, n_+, \quad \alpha, \beta = 1 + n_+, \dots, n_+ + n_+,$$

где ω^{ij} – каноническая симплектическая форма (если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то можно выбрать $\lambda_\alpha = 1$). Из невырожденности матрицы ω^{AB} , в частности, следует, что n_+ четно. Суперскобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби

$$\sigma(f, h) \{f, \{g, h\}\}(z) + \text{cycle}(f, g, h) = 0, \quad f, g, h \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}. \quad (1.2)$$

Под супералгеброй Пуассона мы будем понимать пространство $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, снабженное скобкой Пуассона (1.1). Соотношения (1.1) и (1.2) показывают, что эта скобка действительно задает структуру супералгебры Ли на $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$.

Интеграл на $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ определяется соотношением $\int dz f(z) = \int_{\mathbb{R}^{n_+}} dx \int d\xi f(z)$, где интеграл на алгебре Грассмана нормирован условием $\int d\xi \xi^1 \dots \xi^{n_-} = 1$. Мы будем отождествлять пространство $\mathbb{G}^{n_-}$ с его сопряженным пространством $\mathbb{G}'^{n_-}$, полагая

$f(g) = \int d\xi f(\xi)g(\xi)$, $f, g \in \mathbb{G}^{n-}$. Соответственно пространство $\mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$ непрерывных линейных функционалов на $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$ отождествляется с пространством $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+}) \otimes \mathbb{G}^{n-}$. Как правило, значение $m(f)$ функционала $m \in \mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$ на пробной функции $f \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ будет записываться в “интегральной” форме: $m(f) = \int dz m(z)f(z)$.

Пусть L – супералгебра Ли, действующая в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве V (действие $f \in L$ на $v \in V$ будет обозначаться $f \cdot v$). Пространство p -коцепей $C_p(L, V)$ состоит из всех полилинейных суперантисимметричных отображений из L^p в V . Пространство $C_p(L, V)$ обладает естественной $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой: $M_p \in C_p(L, V)$ имеет определенную четность $\varepsilon(M_p)$, если

$$\varepsilon(M_p(f_1, \dots, f_p)) = \varepsilon(M_p) + \varepsilon(f_1) + \dots + \varepsilon(f_p)$$

для любых $f_j \in L$ с четностями $\varepsilon(f_j)$. Дифференциал d_p^V определяется как такой линейный оператор из $C_p(L, V)$ в $C_{p+1}(L, V)$, что

$$\begin{aligned} d_p^V M_p(f_1, \dots, f_{p+1}) = & \\ & - \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{1,j-1}+\varepsilon(f_j)\varepsilon M_p} f_j \cdot M_p(f_1, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}) - \\ & - \sum_{i < j} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{i+1,j-1}} M_p(f_1, \dots, f_{i-1}, \{f_i, f_j\}, f_{i+1}, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

для любых $M_p \in C_p(L, V)$ и $f_1, \dots, f_{p+1} \in L$, обладающих определенной четностью. Здесь символ $\check{}$ означает, что аргумент должен быть опущен, и было использовано обозначение

$$|\varepsilon(f)|_{i,j} = \sum_{l=i}^j \varepsilon(f_l).$$

Дифференциал d^V нильпотентен (см. [11]), т.е. $d_{p+1}^V d_p^V = 0$ для любого $p = 0, 1, \dots$. Через H_V^p будет обозначаться p -е пространство когомологий дифференциала d_p^V . Второе пространство когомологий в присоединенном представлении H_{ad}^2 тесно связано с проблемой отыскания формальных деформаций скобки Ли $\{\cdot, \cdot\}$ вида $\{f, g\}_* = \{f, g\} + \hbar^2 \{f, g\}_1 + \dots$. Условие, что $\{\cdot, \cdot\}$ является 2-коциклом, эквивалентно по модулю членов порядка $\hbar^4$ тождеству Якоби для $\{\cdot, \cdot\}_*$.

В случае алгебры Пуассона проблема отыскания деформаций вряд ли может быть решена в столь общей постановке и обычно приходится накладывать дополнительные ограничения на коцепи (помимо линейности и антисимметрии). В ряде работ по деформационному квантованию предполагается, что ядра деформаций n -го порядка $\{\cdot, \cdot\}_n$ являются бидифференциальными операторами. В данной статье это требование заменено гораздо более слабым условием, что коцепи являются раздельно непрерывными полилинейными отображениями. Как будет показано, при этом возникают дополнительные когомологии. Общий вид деформации супералгебры Пуассона, рассмотренной в данной работе, найден в [12].

Мы будем рассматривать когомологии алгебры Пуассона $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$ в следующих представлениях:

1. Тривиальное представление: $V = \mathbb{K}$, $f \cdot a = 0$ для любых $f \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ и $a \in \mathbb{K}$. Пространство $C_p(\mathbf{D}_{n+}^{n-}, \mathbb{K})$ состоит из раздельно непрерывных антисимметричных полилинейных форм на $(\mathbf{D}_{n+}^{n-})^p$. Пространства когомологий и дифференциалы будут обозначаться H_{tr}^p и d_p^{tr} , соответственно.

2. $V = \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ и $f \cdot m = \{f, m\}$ для любых $f \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ и $m \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$. Пространство $C_p(\mathbf{D}_{n+}^{n-}, \mathbf{D}_{n+}^{n-})$ состоит из раздельно непрерывных антисимметричных полилинейных отображений из $(\mathbf{D}_{n+}^{n-})^p$ в $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$. Непрерывность $M \in C_p(\mathbf{D}_{n+}^{n-}, \mathbf{D}_{n+}^{n-})$ означает, что $(p+1)$ -форма

$$(f_1, \dots, f_{p+1}) \rightarrow \int dz M(f_1, \dots, f_p)(z) f_{p+1}(z)$$

на $(\mathbf{D}_{n+}^{n-})^{p+1}$ раздельно непрерывна. Пространства когомологий будут обозначаться $H_{\mathbf{D}'}^p$.

3. $V = \mathbf{E}_{n+}^{n-}$ и $f \cdot m = \{f, m\}$ для любых $f \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ и $m \in \mathbf{E}_{n+}^{n-}$. Пространство $C_p(\mathbf{D}_{n+}^{n-}, \mathbf{E}_{n+}^{n-})$ состоит из раздельно непрерывных антисимметричных полилинейных отображений из $(\mathbf{D}_{n+}^{n-})^p$ в $\mathbf{E}_{n+}^{n-}$ (пространство $\mathbf{E}_{n+}^{n-}$ наделено топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $\mathbb{R}^{n+}$). Пространства когомологий будут обозначаться $H_{\mathbf{E}}^p$.

4. Присоединенное представление: $V = \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ и $f \cdot g = \{f, g\}$ для любых $f, g \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$. Пространство $C_p(\mathbf{D}_{n+}^{n-}, \mathbf{D}_{n+}^{n-})$ состоит из раздельно непрерывных антисимметричных полилинейных отображений из $(\mathbf{D}_{n+}^{n-})^p$ в $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$. Пространства когомологий и дифференциалы будут обозначаться H_{ad}^p и d_p^{ad} , соответственно.

Дифференциалы для представлений 2 и 3 будут обозначаться тем же символом d_p^{ad} , что и для присоединенного представления. Отметим, что в случае тривиального представления $\mathbb{K}$ рассматривается как градуированное пространство с тривиальным нечетным подпространством. Будем называть p -коциклы $M_p^1, \dots, M_p^k$ независимыми, если они соответствуют линейно независимым элементам H^p . Если полилинейная форма M_p принимает значения в $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$, $\mathbf{E}_{n+}^{n-}$ или $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$, то будет использоваться запись $M_p(z|f_1, \dots, f_p)$ вместо более громоздкого обозначения $M_p(f_1, \dots, f_p)(z)$.

Основные результаты данной работы содержатся в следующих трех теоремах.

ТЕОРЕМА 1.1.

1. $H_{\text{tr}}^1 \simeq \mathbb{K}$, линейная форма $M_1(f) = \bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \int dz f(z)$ является нетривиальным коциклом.

2. Пусть M_2^1 и M_2^2 – билинейные формы, заданные соотношениями

$$M_2^1(f, g) = \bar{f}\bar{g}, \quad M_2^2(f, g) = \int dz (f(z)\mathcal{E}_z g(z) - \sigma(f, g)g(z)\mathcal{E}_z f(z)), \quad f, g \in \mathbf{D}_{n+}^{n-},$$

$z \partial \epsilon^1)$

$$\mathcal{E}_z \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{2} z^A \frac{\partial}{\partial z^A}.$$

¹⁾ Оператор $\mathcal{E}_z$ является дифференцированием супералгебры Пуассона.

Если n_- четно и $n_+ + 4 \neq n_-$, то $H_{\text{tr}}^2 = 0$; если $n_+ + 4 = n_-$, то $H_{\text{tr}}^2 \simeq \mathbb{K}$ и форма M_2^2 является нетривиальным коциклом; если n_- нечетно, то $H_{\text{tr}}^2 \simeq \mathbb{K}$ и форма M_2^1 является нетривиальным коциклом.

3. Пусть $n_+ \geq 4$ и M_3^1, M_3^2, M_3^3 и M_3^4 – трилинейные формы, заданные соотношениями

$$\begin{aligned} M_3^1(f, g, h) &= \int dz f(z) \left[g(z) \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} \right)^3 h(z) \right], \\ M_3^2(f, g, h) &= \int dz \{f(z), g(z)\} h(z), \quad M_3^3(f, g, h) = \bar{f} \bar{g} \bar{h}, \\ M_3^4(f, g, h) &= \bar{f} M_2^2(g, h) - \sigma(f, g) \bar{g} M_2^2(f, h) + \sigma(f, h) \sigma(g, h) \bar{h} M_2^2(f, g). \end{aligned}$$

Если n_- четно, $n_+ \neq n_-$ и $n_+ + 4 \neq n_-$, то $H_{\text{tr}}^3 \simeq \mathbb{K}^2$ и формы M_3^1, M_3^2 являются независимыми нетривиальными коциклами; если $n_+ = n_-$, то $H_{\text{tr}}^3 \simeq \mathbb{K}$ и форма M_3^1 является нетривиальным коциклом; если $n_+ + 4 = n_-$, то $H_{\text{tr}}^3 \simeq \mathbb{K}^3$ и формы M_3^1, M_3^2, M_3^4 являются независимыми нетривиальными коциклами; если n_- нечетно, то $H_{\text{tr}}^3 \simeq \mathbb{K}^3$ и формы M_3^1, M_3^2, M_3^3 являются независимыми нетривиальными коциклами.

ТЕОРЕМА 1.2.

1. $H_{\mathbf{D}}^0 \simeq H_{\mathbf{E}}^0 \simeq \mathbb{K}$, функция $M_0(z) \equiv 1$ является нетривиальным коциклом.
2. $H_{\mathbf{D}}^1 \simeq H_{\mathbf{E}}^1 \simeq \mathbb{K}^2$, независимые нетривиальные коциклы имеют вид

$$M_1^1(z|f) = \bar{f}, \quad M_1^2(z|f) = \mathcal{E}_z f(z).$$

3. Пусть $n_+ \geq 4$ и M_2^1, M_2^2, M_2^3 и M_2^4 – билинейные отображения из $(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-})^2$ в $\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$, заданные соотношениями

$$\begin{aligned} M_2^1(z|f, g) &= f(z) \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} \right)^3 g(z), \quad M_2^2(z|f, g) = \bar{f} \bar{g}, \\ M_2^3(z|f, g) &= \bar{g} M_1^2(z|f) - \sigma(f, g) \bar{f} M_1^2(z|g), \\ M_2^4(z|f, g) &= \int du (f(u) \mathcal{E}_u g(u) - \sigma(f, g) g(u) \mathcal{E}_u f(u)). \end{aligned}$$

Если n_- четно и $n_+ + 4 \neq n_-$, то $H_{\mathbf{D}}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^2$ и коцепи M_2^1 и M_2^3 являются независимыми нетривиальными коциклами; если $n_+ + 4 = n_-$, то $H_{\mathbf{D}}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^3$ и коцепи M_2^1, M_2^3 и M_2^4 являются независимыми нетривиальными коциклами; если n_- нечетно, то $H_{\mathbf{D}}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^3$ и коцепи M_2^1, M_2^2 и M_2^3 являются независимыми нетривиальными коциклами.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\mathbf{Z}(\mathbf{E}_{n+}^{n-})$ – центр $\mathbf{E}_{n+}^{n-}$ относительно скобки Пуассона, $\mathbf{Z}(\mathbf{E}_{n+}^{n-}) = \mathbb{K}$ и пусть $\mathbf{Z}_{n+}^{n-} = \mathbf{D}_{n+}^{n-} \oplus \mathbf{Z}(\mathbf{E}_{n+}^{n-}) \subset \mathbf{E}_{n+}^{n-}$.

1. $H_{\text{ad}}^0 = 0$.

2. Пусть V_1 – одномерное подпространство $C_1(\mathbf{D}_{n+}^{n-}, \mathbf{D}_{n+}^{n-})$, порожденное коциклом M_1^2 , определенным в формулировке теоремы 1.2. Тогда существует естественный изоморфизм $V_1 \oplus (\mathbf{E}_{n+}^{n-}/\mathbf{Z}_{n+}^{n-}) \simeq H_{\text{ad}}^1$, переводящий $(M_1, T) \in V_1 \oplus (\mathbf{E}_{n+}^{n-}/\mathbf{Z}_{n+}^{n-})$ в класс когомологий, соответствующий коциклу $M_1(z|f) + \{t(z), f(z)\}$, где $t \in \mathbf{E}_{n+}^{n-}$ принадлежит классу эквивалентности T .

3. Пусть $n_+ \geq 4$ и V_2 – двумерное подпространство $C_2(\mathbf{D}_{n+}^{n-}, \mathbf{D}_{n+}^{n-})$, порожденное коциклами M_2^1 и M_2^3 , определенными в формулировке теоремы 1.2. Тогда существует естественный изоморфизм $V_2 \oplus (\mathbf{E}_{n+}^{n-}/\mathbf{Z}_{n+}^{n-}) \simeq H_{\text{ad}}^2$, переводящий $(M_2, T) \in V_2 \oplus (\mathbf{E}_{n+}^{n-}/\mathbf{Z}_{n+}^{n-})$ в класс когомологий, соответствующий коциклу $M_2(z|f, g) - \{t(z), f(z)\}\bar{g} + \sigma(f, g)\{t(z), g(z)\}\bar{f}$, где $t \in \mathbf{E}_{n+}^{n-}$ принадлежит классу эквивалентности T .

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В статье будут использоваться следующие мультииндексные обозначения:

$$\begin{aligned} (z^A)^0 &\equiv 1, & (z^A)^k &\equiv z^{A_1} \dots z^{A_k}, & k &\geq 1, \\ (\partial_A^z)^0 &\equiv 1, & (\partial_A^z)^k &\equiv \frac{\partial}{\partial z^{A_1}} \dots \frac{\partial}{\partial z^{A_k}}, & k &\geq 1, \\ T \dots (A)_k \dots &\equiv T \dots A_1 \dots A_k \dots, & T \dots A_i A_{i+1} \dots &= \sigma(A_i, A_{i+1}) T \dots A_{i+1} A_i \dots, & i &= 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Нормировку δ -функции зададим при помощи соотношения

$$\int dz' \delta(z' - z) f(z') = \int f(z') \delta(z - z') dz' = f(z).$$

Мы будем обозначать посредством $M_p(\dots)$ отдельно непрерывные p -линейные формы на $(\mathbf{D}_{n+}^{n-})^p$. Таким образом, аргументами этих функционалов являются функции $f(z)$ вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n_-} f_{(\alpha)_k}(x) (\xi^\alpha)^k, \quad f_{(\alpha)_k}(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_+}). \quad (2.1)$$

Нетрудно показать, что такие полилинейные формы могут быть записаны в интегральной форме (см. приложение 1):

$$M_p(f_1, \dots, f_p) = \int dz_p \dots dz_1 m_p(z_1, \dots, z_p) f_1(z_1) \dots f_p(z_p), \quad p = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

и

$$M_p(z|f_1, \dots, f_p) = \int dz_p \dots dz_1 m_p(z|z_1, \dots, z_p) f_1(z_1) \dots f_p(z_p), \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Из свойств антисимметрии форм M_p следует, что соответствующие ядра m_p удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\varepsilon(m_p(*|z_1, \dots, z_p)) &= pn_- + \varepsilon_{M_p}, \\ m_p(*|z_1 \dots z_i, z_{i+1} \dots z_p) &= -(-1)^{n-} m_p(*|z_1 \dots z_{i+1}, z_i \dots z_p).\end{aligned}\quad (2.4)$$

В случае тривиального и присоединенного представлений супералгебры Пуассона общее определение (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned}d_p^{\text{tr}} M_p(f) &= - \sum_{i < j} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{i+1, j-1}} \times \\ &\times M_p(f_1, \dots, f_{i-1}, \{f_i, f_j\}, f_{i+1}, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}), \quad p \geq 1,\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}d_p^{\text{ad}} M_p(z|f) &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{j+1, p+1}} \{M_p(z|f_1, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}), f_j(z)\} - \\ &- \sum_{i < j} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{i+1, j-1}} \times \\ &\times M_p(z|f_1, \dots, f_{i-1}, \{f_i, f_j\}, f_{i+1}, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}), \quad p = 0, 1, \dots,\end{aligned}\quad (2.6)$$

где символ $\check{}$ над аргументом означает, что этот аргумент должен быть опущен.

Носитель $\text{supp}(f) \subset \mathbb{R}^{n+}$ пробной функции $f \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ определяется как объединение носителей всех $f_{(\alpha)_k}$, входящих в разложение (2.1). Множество $\text{supp}(m)$ для $m \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ определяется аналогично.

Кроме того, введем следующее обозначение:

$$\overleftarrow{D}_z^A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^B} \omega^{BA}. \quad (2.7)$$

3. КОГОМОЛОГИИ В ТРИВИАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В этом разделе мы докажем теорему 1.1, описывающую первую, вторую и третью когомологии в тривиальном представлении.

3.1. H_{tr}^1 . Пусть $M_1(f) = \int dz m_1(z) f(z)$. Уравнение когомологии имеет вид

$$\begin{aligned}0 &= -d_1^{\text{tr}} M_1(f, g) = M_1(\{f, g\}) = \int dz m_1(z) \{f(z), g(z)\} = \\ &= \int dz \{m_1(z), f(z)\} g(z).\end{aligned}\quad (3.1)$$

Из уравнения (3.1) следует равенство

$$m_1(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} f(z) = 0,$$

из которого, в свою очередь, следует

$$m_1(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} = 0 \quad \text{и} \quad m_1(z) = m_1 = \text{const.}$$

Таким образом, мы получаем $M_1(f) = m_1 \bar{f}$, $\varepsilon(m_1) = n_- + \varepsilon(M_1)$, где $\bar{f} \equiv \int dz f(z)$. Очевидно, что эти коциклы нетривиальны.

3.2. $H_{\text{Г}}^2$. Для билинейной формы $M_2(f, g) = \int du dz m_2(z, u) f(z) g(u)$ уравнение ко-гомологии имеет вид

$$0 = -d_2^{\text{tr}} M_2(f, g, h) = M_2(\{f, g\}, h) - \sigma(g, h) M_2(\{f, h\}, g) - M_2(f, \{g, h\}). \quad (3.2)$$

Пусть $\text{supp}(h) \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] = \emptyset$. В этом случае имеем $\widehat{M}_2(\{f, g\}, h) = 0$, или

$$\int dz \widehat{m}_2(z, u) \{f(z), g(z)\} = 0 \implies \frac{\partial \widehat{m}_2(z, u)}{\partial z^A} = 0, \quad (3.3)$$

где шляпка над буквой означает, что соответствующая форма (или ядро) рассматривается вне диагонали $z = u$.

Обозначим $T_A(z, u) = \partial m_2(z, u) / \partial z^A$. Ядро T_A обладает свойством $\widehat{T}_A(z, u) = 0$, так что согласно лемме П5.2 существует локально конечное разложение

$$T_A(z, u) = \sum_{q=0}^Q (\partial_C^z)^q \delta(z - u) t_A^{(C)q}(u).$$

При работе с разложениями такого типа всегда будет подразумеваться, что вначале они сужаются на некоторую ограниченную область, где верхний предел суммирования Q может быть выбран конечным, а затем производится “склеивание” результатов, полученных для разных областей. В каждом частном случае возможность такого склеивания будет очевидной. Всюду ниже верхний предел суммирования Q понимается как конечное число, неявно зависящее от выбранной ограниченной области.

По построению ядро $T_A(z, u)$ обладает свойством

$$\partial_A^z T_B(z, u) - \sigma(A, B) \partial_B^z T_A(z, u) = 0.$$

Это дает

$$T_A(z, u) = \frac{\partial}{\partial z^A} \sum_{q=0}^Q (\partial_C^z)^q \delta(z - u) t^{(C)q}(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial z^A} \left[m_2(z, u) - \sum_{q=0}^Q (\partial_C^z)^q \delta(z - u) t^{(C)q}(u) \right] = 0.$$

Таким образом,

$$m_2(z, u) - \sum_{q=0}^Q (\partial_C^z)^q \delta(z - u) t^{(C)q}(u) = m(u).$$

Из свойства антисимметрии ядра $m_2(z, u)$ следует $m(u) = c = \text{const}$, $\varepsilon(c) = \varepsilon(M_2)$, в результате мы получаем $M_2(f, g) = M_{2|1}(f, g) + M_{2|2}(f, g)$, где $M_{2|1}(f, g) = c\bar{f}\bar{g}$, $d_2^{\text{tr}} M_{2|1}(f, g, h) = 0$, а $M_{2|2}$ имеет вид

$$M_{2|2}(f, g) = \sum_{q=1}^Q \int dz m_2^{(A)q}(z) ([(\partial_A^z)^q f(z)]g(z) - \sigma(f, g)[(\partial_A^z)^q g(z)]f(z)). \quad (3.4)$$

Из антисимметрии формы M_2 следует, что константа c может быть отличной от нуля только при нечетных значениях n_- .

С помощью интегрирования по частям выражение (3.4) может быть переписано как сумма только по нечетным значениям q , что позволяет представить $M_{2|2}(f, g)$ в виде

$$M_{2|2}(f, g) = \sum_{q=1}^Q \int dz m_2^{(A)q}(z) (\partial_A^u)^q [f(z+u)g(z-u)]|_{u=0}. \quad (3.5)$$

Из уравнения когомологии (3.2) следует

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^Q \int dz m_2^{(A)q}(z) (\partial_A^u)^q [\{f, g\}(z+u)h(z-u) - \\ - \sigma(g, h)\{f, h\}(z+u)g(z-u) - f(z+u)\{g, h\}(z-u)]|_{u=0} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. $m_2^{(A)q}(z) = 0$ при $q > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $Q \geq 3$. Выбирая $f(z) = e^{zp_1}\varphi_1(z)$, $g(z) = e^{zp_2}\varphi_2(z)$ и $h(z) = e^{-z(p_1+p_2)}\varphi_3(z)$, мы получаем в левой части уравнения (3.6) некоторый полином по p_1 и p_2 . Из этого уравнения следует, что однородная часть полинома степени $Q+2$ должна равняться нулю:

$$\int dz m_2^{(A)Q} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 [p_1, p_2] [((p_1 + p_2)_A)^Q - (p_{2A})^Q - (p_{1A})^Q] = 0$$

(здесь и всюду ниже $[p_1, p_2] = (-1)^{\varepsilon_B} p_{1B} \omega^{BC} p_{2C}$), откуда и вытекает требуемое утверждение.

Таким образом, $M_{2|2}$ имеет вид

$$M_{2|2}(f, g) = \int dz m_2^A(z) \left(2 \frac{\partial f(z)}{\partial z^A} g(z) + (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} f(z) g(z) \right),$$

а $m_2^A(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} 2 \int dz m_2^A \left(\frac{\partial \{f, g\}}{\partial z^A} h - \sigma(g, h) \frac{\partial \{f, h\}}{\partial z^A} g - \frac{\partial f}{\partial z^A} \{g, h\} \right) + \\ + \int dz m(\{f, g\}h - \sigma(g, h)\{f, h\}g - f\{g, h\}) = 0, \end{aligned}$$

где

$$m(z) = (-1)^{\varepsilon_A} m_2^A(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A}.$$

Варьируя это уравнение по $h(z)$, получаем

$$2 \left[\sigma(A, f) \{m_2^A, f\} \frac{\partial g}{\partial z^A} - \sigma(f, g) \sigma(A, g) \{m_2^A, g\} \frac{\partial f}{\partial z^A} \right] - \\ - m \{f, g\} + \{m, f\} g - \sigma(f, g) \{m, g\} f = 0.$$

Равенство нулю коэффициентов перед $f(z)$ и $\partial f(z) \partial g(z)$ дает $m(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} = 0$. Поэтому $m(z) = -m = \text{const}$, $\varepsilon(m) = n_- + \varepsilon(M_2)$, и уравнение для $m_2^A(z)$ принимает вид

$$2m_2^A(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^C} \omega^{CB} - 2\sigma(A, B) m_2^B(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^C} \omega^{CA} - m \omega^{AB} = 0. \quad (3.7)$$

Умножение уравнения (3.7) на $(-1)^{\varepsilon_A} \omega_{BA}$ дает

$$(4 + n_+ - n_-)m = 0. \quad (3.8)$$

При решении уравнения (3.8) следует рассмотреть два случая:

а) $4 + n_+ - n_- \neq 0$. В этом случае $m = 0$, и согласно лемме Пуанкаре мы имеем $m_2^A(z) = (1/2)m_2(z) \overleftarrow{D}_z^A$, $\varepsilon(m_2) = n_- + \varepsilon_{M_2}$;

б) $4 + n_+ - n_- = 0$. В этом случае общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$m_2^A(z) = \frac{1}{4} m z^A + \frac{1}{2} m_2(z) \overleftarrow{D}_z^A.$$

Окончательно мы получаем

$$M_2(f, g) = \frac{1 - (-1)^{n_-}}{2} c \bar{f} \bar{g} + \\ + \delta_{n_- - n_+, 4} m \int dz (f(z) \mathcal{E}_z g(z) - \sigma(f, g) g(z) \mathcal{E}_z f(z)) + d_1^{\text{tr}} m_1(f, g). \quad (3.9)$$

Первые два члена в выражении (3.9) являются независимыми нетривиальными коциклами. Действительно, пусть

$$c \bar{f} \bar{g} + \delta_{n_- - n_+, 4} m \int dz (f(z) \mathcal{E}_z g(z) - \sigma(f, g) g(z) \mathcal{E}_z f(z)) = \\ = d_1^{\text{tr}} m_1(f, g) = -m_1(\{f, g\}). \quad (3.10)$$

Предположим, что

$$\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset.$$

Из уравнения (3.10) следует, что $c \bar{f} \bar{g} = 0$ и, таким образом, $c = 0$.

Пусть $g(z) = 1$ в окрестности $\text{supp}(f)$. Тогда уравнение (3.10) редуцируется к

$$m \int dz z^A \partial_A f(z) = 4m \bar{f} = 0,$$

и поэтому $m = 0$, т.е. сумма первых двух членов является кограницей, только если $c = m = 0$.

3.3. H_{tr}^3 . Доказательство п. 3 теоремы 1.1 для случая $n_+ \geq 4$ может быть найдено в п. 3.3 и приложении 7 работы [13].

4. КОГОМОЛОГИИ В ПРИСОЕДИНЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В этом разделе мы докажем теоремы 1.2 и 1.3. Мы предполагаем, что рассматриваемые формы принимают значения в пространстве $\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ есть одно из пространств $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, $\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$ или $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$.

4.1. H_{ad}^0 . Уравнение когомологии для формы $M_0(z) \in \mathcal{A}$ имеет вид

$$0 = d_0^{\text{ad}} M_0(z|f) = -\{M_0(z), f(z)\} \implies M_0(z) = m_0 = \text{const.}$$

Если $M_0 \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, то $m_0 = 0$.

4.2. H_{ad}^1 . Для формы $M_1(z|f) = \int du m_1(z|u) f(u) \in \mathcal{A}$ уравнение когомологии имеет вид

$$d_1^{\text{ad}} M_1(z|f, g) = -\sigma(f, g)\{M_1(z|g), f(z)\} + \{M_1(z|f), g(z)\} - M_1(z|\{f, g\}) = 0. \quad (4.1)$$

Предположим, что $z \cap \text{supp}(f) = z \cap \text{supp}(g) = \emptyset$ (здесь и всюду ниже $z = (x, \xi)$, а запись $z \cap \dots$ и $z \cup \dots$ означает $\{x\} \cap \dots$ и $\{x\} \cup \dots$, соответственно). В этом случае $\widehat{M}_1(z|\{f, g\}) = 0$ и поэтому $\widehat{m}_1(z|u) \overleftarrow{\partial} / \partial u^A = 0$. Это уравнение аналогично уравнению (3.3), так что имеем

$$m_1(z|u) = m_1(z) + \sum_{q=0}^Q t^{(B)q}(z) (\partial_B^z)^q \delta(z-u), \quad m_1(z) \in \mathcal{A}.$$

Отсюда следует, что

$$M_1(z|f) = m_1(z) \bar{f} + \sum_{q=0}^Q t^{(B)q}(z) (\partial_B^z)^q f(z)$$

(не зависящий от f знаковый множитель опущен).

Пусть $z \cap \text{supp}(g) = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$. Тогда $\{f(z), m_1(z)\} \bar{g} = 0$. Это означает, что $m_1(z) = m_1 = \text{const}$, $\varepsilon(m_1) = n_- + \varepsilon(M_1)$. Если $\mathcal{A} = \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, то $m_1 = 0$. Таким образом, мы получаем

$$M_1(z|f) = m_1 \bar{f} + \sum_{q=0}^Q t^{(B)q}(z) (\partial_B^z)^q f(z), \quad \varepsilon(t^{(B)q}) = \varepsilon(M_1) + |\varepsilon_B|_{1,q}.$$

Чтобы найти локальную часть

$$\sum_{q=0}^Q t^{(B)q}(z) (\partial_B^z)^q f(z)$$

формы M_1 , которая сама удовлетворяет уравнению (4.1), положим $f = e^{z^A p_A}$ и $g = e^{z^A k_A}$ в некоторой окрестности z . Уравнение когомологии для локальной части принимает вид

$$[F(z|p) + F(z|k) - F(z|p+k)][p, k] + \{F(z|p), zk\} - \{F(z|k), zp\} = 0, \quad (4.2)$$

где

$$F(z|p) = \sum_{q=0}^Q t^{(B)q}(z)(p_B)^q,$$

$[p, k] = (-1)^{\varepsilon_A} p_A \omega^{AB} k_B = -[k, p]$. В этом уравнении рассмотрим члены высшей степени по p и k :

$$[F_Q(z|p) + F_Q(z|k) - F_Q(z|p+k)][p, k] = 0, \quad (4.3)$$

где $F_Q(z|p) = t^{(B)Q}(z)(p_B)^Q$. Из уравнения (4.3) следует $F_Q(z|p) = 0$, $Q \geq 2$, или $F(z|p) = t^0(z) + t^B(z)p_B$. Далее, уравнение (4.2) дает $t^0(z)[p, k] + \{F(z|p), zk\} - \{F(z|k), zp\} = 0$, или

$$t^0(z) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z^A}} = 0, \quad t^A(z) \overleftarrow{D}_z^B - \sigma(A, B) t^B(z) \overleftarrow{D}_z^A = -t^0 \omega^{AB},$$

откуда следует $t^0(z) = t^0 = \text{const}$, $\varepsilon(t^0) = \varepsilon(M_1)$, и $t^A(z) = -(1/2)t_0 z^A - t(z) \overleftarrow{D}_z^A$, $\varepsilon(t(z)) = \varepsilon(M_1)$.

Таким образом, общее решение уравнения когомологии (4.1) имеет вид

$$M_1(z|f) = m_1 \bar{f} + t^0 \mathcal{E}_z f(z) - \{t(z), f(z)\}.$$

Первые два члена в этом выражении представляют собой независимые нетривиальные коциклы. Действительно, предположим, что

$$m_1 \bar{f} + t^0 \mathcal{E}_z f(z) = d_0^{\text{ad}} q(z|f) = -\{q(z), f(z)\}. \quad (4.4)$$

Пусть $z \cap \text{supp}(f) = \emptyset$. В этом случае соотношение (4.4) дает $m_1 \bar{f} = 0$. Поэтому $m_1 = 0$ и

$$t^0 \left(1 - \frac{1}{2} z^A \frac{\partial}{\partial z^A} \right) f(z) = -\{q(z), f(z)\}.$$

Рассматривая в этом соотношении коэффициент перед $f(z)$, мы получаем $t^0 f(z) = 0$, или $t^0 = 0$, т.е. соотношение (4.4) удовлетворяется только при $m_1 = t^0 = 0$.

Очевидно, что если $M_1(z|f) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ для любого f , то $m_1 = 0$.

Обсудим слагаемое $\{t(z), f(z)\}$. Является ли это выражение кограницей? Ответ зависит от пространства функций $\mathcal{A}$, в котором принимают значения рассматриваемые формы:

$\mathcal{A} = \mathbf{D}_{n_+}^{m-}$. В этом случае $t(z) \in \mathbf{D}_{n_+}^{m-}$ и форма $-\{t(z), f(z)\}$ является точной (тривиальная когомология).

$\mathcal{A} = \mathbf{E}_{n_+}^{n-}$. В этом случае $t(z) \in \mathbf{E}_{n_+}^{n-}$ и форма $-\{t(z), f(z)\}$ является точной (тривиальная когомология).

$\mathcal{A} = \mathbf{D}_{n_+}^{n-}$. В этом случае условие $\{t(z), f(z)\} \in \mathbf{D}_{n_+}^{n-}$ приводит только к ограничению $t(z) \in \mathbf{E}_{n_+}^{n-}$, а форма $\{t(z), f(z)\}$ является точной, только если $t(z) \in \mathbf{Z}_{n_+}^{n-}$. Поэтому формы $\{t(z), f(z)\}$ являются независимыми нетривиальными коциклами, параметризованными элементами фактор-пространства $\mathbf{E}_{n_+}^{n-}/\mathbf{Z}_{n_+}^{n-}$.

4.3. H_{ad}^2 . Для билинейной формы

$$M_2(z|f, g) = \int dv du m_2(z|u, v) f(u) g(v) \in \mathcal{A}$$

уравнение когомологии имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= d_2^{\text{ad}} M_2(z|f, g, h) = \\ &= \sigma(g, h) \{M_2(z|f, h), g(z)\} - \{M_2(z|f, g), h(z)\} - \sigma(f, gh) \{M_2(z|g, h), f(z)\} - \\ &\quad - M_2(z|\{f, g\}, h) + \sigma(g, h) M_2(z|\{f, h\}, g) + M_2(z|f, \{g, h\}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для решения уравнения (4.5) мы используем последовательность предложений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. $M_2(z|f, g) = M_{2|1}(z|f, g) + M_{2|2}^1(z|f, g) + M_{2|2}^2(z|f, g)$, где

$$M_{2|1}(z|f, g) = c \bar{f} \bar{g}, \quad \varepsilon(c) = \varepsilon(M_2), \quad d_2^{\text{ad}} M_{2|1}(z|f, g, h) = 0, \quad (4.6)$$

$$M_{2|2}^1(z|f, g) = \sum_{q=0}^Q m^{1(A)q} (z|[(\partial_A^z)^q f(z)]g - \sigma(f, g)[(\partial_A^z)^q g(z)]f), \quad (4.7)$$

$$M_{2|2}^2(z|f, g) = \sum_{q=0}^Q m^{2(A)q} (z|[(\partial_A)^q f]g - \sigma(f, g)[(\partial_A)^q g]f) \quad (4.8)$$

и четности линейных форм $m^{1,2(A)q}(z|\cdot)$ равны

$$\varepsilon(m^{1,2(A)q}) = \varepsilon(M_2) + |\varepsilon_A|_{1,q} + n_-. \quad (4.9)$$

Как следствие антисимметрии билинейной формы константа c может быть отлична от нуля только при нечетных n_- .

Для доказательства этого предложения достаточно рассмотреть уравнение (4.5) в двух следующих областях:

$$z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \text{supp}(f) \cap [\text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \emptyset$$

и

$$z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] = \text{supp}(f) \cap [\text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \text{supp}(g) \cap \text{supp}(h) = \emptyset.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Если $n_+ \geq 4$, то

$$M_{2|2}^2(z|f, g) = \delta_{n_-, 4+n_+} \mu(z) \int du (f(u) \mathcal{E}_u g(u) - \sigma(f, g) g(u) \mathcal{E}_u f(u)) + d_1^{\text{ad}} \zeta(z|f, g) + \dots,$$

где многоточие означает слагаемые, которые могут быть включены в $M_{2|2}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этого предложения мы рассмотрим уравнение (4.5) в области $z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \emptyset$, в которой $M_{2|2}^1(z|f, g)$ тождественно равна нулю. Используя результаты п. 3.2, находим

$$\widehat{M}_{2|2}^2(z|f, g) = \int du \widehat{m}^{2A}(z|u) \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u^A} g(u) - \sigma(f, g) \frac{\partial g(u)}{\partial u^A} f(u) \right),$$

где вектор $\widehat{m}^{2A}(z|u)$ удовлетворяет уравнению

$$2\widehat{m}^{2A}(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial u^C} \omega^{CB} - 2\sigma(A, B) \widehat{m}^{2B}(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial u^C} \omega^{CA} - \mu(z) \omega^{AB} = 0,$$

а

$$\mu(z) = -m^{2A}(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial u^A} (-1)^{\varepsilon_A}, \quad \varepsilon(\mu) = \varepsilon(M_2) + n_-,$$

не зависит от u . Из этого уравнения вытекает $(4 + n_+ - n_-)\mu(z) = 0$. Следует рассмотреть два случая:

а) $\mu(z) = 0$. Так как $n_+ \geq 4$, из леммы Пуанкаре следует, что $m^{2A}(z|u) = -(1/2) \times \zeta(z|u) \overleftarrow{D}_z^A$ плюс члены с носителем на плоскости $z = u$, которые мы включим в $M_{2|2}^1$.

б) $4 + n_+ - n_- = 0$. В этом случае имеем $m^{2A}(z|u) = -(1/4)\mu(z)u^A - (1/2)\zeta(z|u) \overleftarrow{D}_z^A$ плюс члены с носителем на плоскости $z = u$, которые мы включим в $M_{2|2}^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Если $n_+ \geq 4$, то ядра линейных форм $m^{1(A)q}(z|\cdot)$ из предложения 4.1 имеют вид

$$\begin{aligned} \widehat{m}^{1(A)0}(z|u) &= a(u); & \widehat{m}^{1(A)q}(z|u) &= 0 \quad \text{при } q \geq 2, \\ m^{1A}(z|u) &= -\frac{1}{2}a(u)z^A + m^1(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^C} \omega^{CA} + m_{\text{loc}}^1, & \varepsilon(m^1) &= \varepsilon(M_2) + n_-, \end{aligned}$$

где $a(u)$ и $m^1(z|u)$ — некоторые обобщенные функции, а m_{loc}^1 — обобщенная функция с носителем на плоскости $z = u$.

Для доказательства достаточно рассмотреть уравнение (4.5) в области $[z \cup \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] \cap \text{supp}(h) = \emptyset$ и заметить, что если рассматривать переменную u как параметр, то это уравнение решается аналогично уравнению (4.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. $\mu(z)$ из предложения 4.2 и $a(u)$, $m^1(z, u)$ из предложения 4.3 имеют вид $a(u) = a = \text{const}$, $\mu(z) = \mu = \text{const}$,

$$m^1(z|u) = \sum_{q=0} (\partial_C^z)^q \delta(z-u) t^{(C)q}(u) + b(z) + c(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[z \cup \text{supp}(h)] \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] = \emptyset$. Выбирая $h(u) = \text{const}$ в некоторой окрестности z , получаем $a(u) = \text{const}$. Выбирая $f(u) = \text{const}$ в окрестности $\text{supp}(g)$, находим $\mu(z) = \text{const}$. Как следствие мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial z^A} \hat{m}^1(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial u^B} = 0,$$

откуда и следуют утверждения предложения 4.4.

При подстановке выражения для $m^1(z|u)$ в выражение для $M_{2|2}^1$ находим, что вклад $c(u)$ тождественно сокращается и что $b(z)$ дает вклад только в точный дифференциал.

Результаты предложений 4.1–4.4 можно сформулировать в виде следующей леммы.

ЛЕММА 4.1. Если $n_+ \geq 4$, то общее решение уравнения (4.5) имеет вид

$$\begin{aligned} M_2(z|f, g) &= c\bar{f}\bar{g} + a \int du [\mathcal{E}_z f(z)g(u) - \sigma(f, g)\mathcal{E}_z g(z)f(u)] + \\ &+ \delta_{n_-, 4+n_+} \mu \int du (f(u)\mathcal{E}_u g(u) - \sigma(f, g)g(u)\mathcal{E}_u f(u)) + \\ &+ d_1^{\text{ad}} \zeta^2(z|f, g) + M_{2|\text{loc}}(z|f, g), \\ \varepsilon(a) &= \varepsilon(M_2) + n_-, \quad \varepsilon(\mu) = \varepsilon(M_2) + n_-, \end{aligned}$$

где c , a , μ – некоторые константы, $c = 0$ при четных n_- .

Локальная билинейная форма $M_{2|\text{loc}}(z|f, g)$ имеет вид

$$M_{2|\text{loc}}(z|f, g) = \sum_{p, q=0}^N (-1)^{\varepsilon(f)|\varepsilon_B|_{1,q}} m^{(A)_p|(B)_q}(z) [(\partial_A^z)^p f(z)] (\partial_B^z)^q g(z), \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} m^{(B)_q|(A)_p} &= -(-1)^{|\varepsilon_A|_{1,p}|\varepsilon_B|_{1,q}} m^{(A)_p|(B)_q}, \quad m^{(A)_0|(B)_0} = 0, \\ \varepsilon(m^{(A)_p|(B)_q}) &= \varepsilon(M_2) + |\varepsilon_A|_{1,p} + |\varepsilon_B|_{1,q}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

и удовлетворяет уравнению

$$d_2^{\text{ad}} M_{2|\text{loc}}(z|f, g, h) = 0. \quad (4.12)$$

Для решения уравнения (4.12) мы используем метод работы [5]. Пусть $x \in U$, где $U \in \mathbb{R}^{n_+}$ – некоторая ограниченная область. Для функций вида

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{z^A k_A} f_0(z), \quad g(z) = e^{z^A l_A} g_0(z), \\ h(z) &= e^{z^A r_A} h_0(z), \quad \varepsilon(k_A) = \varepsilon(l_A) = \varepsilon(r_A) = \varepsilon_A, \end{aligned}$$

где k, l и r — новые суперпеременные, $f_0(z) = g_0(z) = h_0(z) = 1$ при $x \in U$ ($z = (x, \xi)$), уравнение (4.12) принимает вид

$$[k, l] \Psi(z|k, l, r) + \{\psi(z|k, l), zr\} + \text{cycle}(k, l, r) = 0, \quad (4.13)$$

где

$$\Psi(z|k, l, r) = \psi(z|k+l, r) - \psi(z|k, r) - \psi(z|l, r), \quad (4.14)$$

$$\psi(z|k, l) = \sum_{p,q=0}^N m(z)^{(A)p|(B)q} (k_A)^p (l_B)^q = -\psi(z|l, k) \quad (4.15)$$

и использованы обозначения $[k, l] = (-1)^{\varepsilon_A} k_A \omega^{AB} l_B$, введенные в предыдущем пункте. Из свойства антисимметрии следует $\psi(z|0, 0) = 0$. Отметим, что

$$\{f(z), z^A p_A\} = f(z) \overleftarrow{D}^A p_A. \quad (4.16)$$

Полезно выписать выражение для локальной формы, являющейся кограницей (дифференциалом локальной 1-формы с ядром $t^{(A)p}(z)(\partial_A^z)^P \delta(z-u)$):

$$M_{2|\text{triv}}(z|k, l) = \{t(z|k), zl\} - \{t(z|l), zk\} - T(z|k, l)[k, l], \quad (4.17)$$

где

$$T(z|k, l) = t(z|k+l) - t(z|k) - t(z|l) \quad \text{и} \quad t(z|k) = \sum_{p=0}^K t^{(A)p}(z) (k_A)^p.$$

Введем $\mathcal{P}_p$ и $\mathcal{P}_{p,q}$ — фильтрации полиномов по низшим степеням.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p &= \{f(k) \in \mathbb{K}[k_1, \dots, k_{n_++n_-}]: \\ &\quad \exists g \in \mathbb{K}[\alpha, k_1, \dots, k_{n_++n_-}] \quad f(\alpha k) = \alpha^p g(\alpha, k)\}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{p,q} &= \{f(k, l) \in \mathbb{K}[k_1, \dots, k_{n_++n_-}; l_1, \dots, l_{n_++n_-}]: \\ &\quad \exists g \in \mathbb{K}[\alpha, \beta, k_1, \dots, k_{n_++n_-}, l_1, \dots, l_{n_++n_-}] \quad f(\alpha k, \beta l) = \alpha^p \beta^q g(\alpha, \beta, k, l)\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Очевидно, что $\mathcal{P}_{p,q} \subset \mathcal{P}_{r,s}$, если $p \geq r$ и $q \geq s$. Ясно также, что если $f \in \mathcal{P}_{p,q}$ и $g \in \mathcal{P}_{r,s}$, то $fg \in \mathcal{P}_{p+r, q+s}$. Аналогичные соотношения справедливы и для $\mathcal{P}_p$.

Для упрощения уравнения (4.13) представим полином $\psi(z|k, l)$ (4.15) в виде

$$\psi(z|k, l) = t_0(z|k) - t_0(z|l) + t_{11}^{AB}(z) k_A l_B + t_1^A(z|k) l_A - t_1^A(z|l) k_A + \varphi(z|k, l), \quad (4.20)$$

где $t_0(z|k) \in \mathcal{P}_1$, $t_1^A(z|k) \in \mathcal{P}_2$ и $\varphi(z|k, l) \in \mathcal{P}_{2,2}$. Справедливы следующие предложения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. $t_0(z|k) - t_0(z|l) = dt(z|k, l) + [k, l]t(z)$, где $t(z) \in \mathcal{A}$ и линейная форма $t(z|f)$ определена как $t(z|f) = -t(z)f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства рассмотрим уравнение (4.13) при $r = 0$, что дает $[k, l](t_0(z|k+l) - t_0(z|k) - t_0(z|l)) - \{t_0(z|k), z^A l_A\} + \{t_0(z|l), z^A k_A\} = 0$. Это уравнение совпадает с уравнением (4.2), решенным в предыдущем пункте, и его решение есть $t_0(z|k) = \alpha(1 - (1/2)z^A k_A) + \{t(z), z^A k_A\}$. Из условия $t_0(z|0) = 0$ вытекает $\alpha = 0$, откуда и следует утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Если $n_+ \geq 4$, то выражение $t_0(z|k) - t_0(z|l) + t_{11}^{AB}(z)k_A l_B$ в (4.20) является кограницей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, результаты предложения 4.5 позволяют записать $t_0(z|k) - t_0(z|l) + t_{11}^{AB}(z)k_A l_B = dt(z|k, l) + \tilde{t}_{11}^{AB}(z)k_A l_B$. Линейные по k, l и r члены в уравнении (4.13) дают

$$\sigma(C, A)\tilde{t}_{11}^{AB}(z)\overleftarrow{D}^C + \sigma(A, B)\tilde{t}_{11}^{BC}(z)\overleftarrow{D}^A + \sigma(B, C)\tilde{t}_{11}^{CA}(z)\overleftarrow{D}^B = 0. \quad (4.21)$$

С учетом свойства антисимметрии $\tilde{t}_{11}^{AB}(z) = -\sigma(A, B)\tilde{t}_{11}^{BA}(z)$ из этого уравнения при $n_+ \geq 4$ следует $\sigma(A, B)\tilde{t}_{11}^{AB}(z) = p^A(z)\overleftarrow{D}^B - p^B(z)\overleftarrow{D}^A$ с некоторой вектор-функцией $p^A(z)$. Таким образом, $\tilde{t}_{11}^{AB}(z)k_A l_B = \{p(z|k), z l\} - \{p(z|l), z k\}$ с $p(z|k) = p^A(z)k_A$. Это совпадает с выражением (4.17).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. $t_1^A(z|k)l_A - t_1^A(z|l)k_A \in \mathcal{P}_{2,2}$ с точностью до кограницы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из результатов предложений 4.5 и 4.6 следует, что мы можем положить $t_0(z|k) - t_0(z|l) + t_{11}^{AB}(z)k_A l_B = 0$. Слагаемые в уравнении (4.13), линейные по l и r , дают уравнение $t_1^A(z|k)\overleftarrow{D}^B - \sigma(A, B)t_1^B(z|k)\overleftarrow{D}^A = 0$, из которого следует $t_1^A(z|k) = t(z|k)\overleftarrow{D}^A$ и $t_1^A(z|k)l_A - t_1^A(z|l)k_A = \{t(z|k), z l\} - \{t(z|l), z k\}$. Поэтому $t_1^A(z|k)l_A - t_1^A(z|l)k_A = \{t(z|k), z l\} - \{t(z|l), z k\} - (t(z|k+l) - t(z|k) - t(z|l))[k, l] + (t(z|k+l) - t(z|k) - t(z|l))[k, l] = dt(z|k, l) + \varphi_t(z|k, l)$, где $\varphi_t(z|k, l) = (t(z|k+l) - t(z|k) - t(z|l))[k, l] \in \mathcal{P}_{2,2}$. Это означает, что $\psi(z|k, l) \in \mathcal{P}_{2,2}$ с точностью до кограницы.

Далее мы будем предполагать $\psi(z|k, l) \in \mathcal{P}_{2,2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Полином $\psi(z|k, l) \in \mathcal{P}_{2,2}$ не зависит от z .

Действительно, линейные по r слагаемые в уравнении (4.13) дают $\{\psi(z|k, l), z r\} = 0$, откуда и следует утверждение предложения.

Уравнение (4.13) редуцируется к

$$[k, l]\Psi(k, l, r) + [l, r]\Psi(l, r, k) + [r, k]\Psi(r, k, l) = 0, \quad (4.22)$$

$$\Psi(k, l, r) = \psi(k+l, r) - \psi(k, r) - \psi(l, r), \quad (4.23)$$

где

$$\psi(k, l) = \sum_{p, q=2}^N m^{(A)p|(B)q}(k_A)^p (l_B)^q = -\psi(l, k).$$

В случае, когда нечетные переменные отсутствуют ($n_- = 0$) и $n_+ \geq 4$, уравнение (4.22) было решено в [5] и его общее решение имеет вид

$$\psi(k, l) = c([k, l])^3 + [k, l](\varphi(k + l) - \varphi(k) - \varphi(l)), \quad (4.24)$$

где c – произвольная константа и $\varphi(k)$ – произвольный полином, удовлетворяющий условию²⁾ $\varphi \in \mathcal{P}_1$.

4.3.1. Решение уравнения (4.22).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $n_+ \geq 4$, $n_- \geq 0$, $\psi(p, q)$ – полином со свойствами $\psi(p, q) = -\psi(q, p) \in \mathcal{P}_{2,2}$ и пусть

$$\Psi(p, q, r) = \psi(p + q, r) - \psi(p, r) - \psi(q, r). \quad (4.25)$$

Общее решение уравнения

$$[p, q]\Psi(p, q, r) + [q, r]\Psi(q, r, p) + [r, p]\Psi(r, p, q) = 0 \quad (4.26)$$

имеет вид

$$\psi(p, q) = c([p, q])^3 + [p, q](\varphi(p + q) - \varphi(p) - \varphi(q)), \quad (4.27)$$

где $[p, q] \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon_A} p_A \omega^{AB} q_B$, c – произвольная константа, $\varphi(p)$ – произвольный полином, удовлетворяющий условию $\varphi \in \mathcal{P}_1$.

Доказательство теоремы может быть получено индукцией по n_- , числу нечетных переменных (см. [13]). Здесь мы представим доказательство, аналогичное приведенному в [5] для чисто четного случая. Оно основано на леммах П2.1 и П2.2 из приложения 2 и на следующих двух предложениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. При $n_+ \geq 4$ решение уравнения (4.26) имеет вид

$$\psi(p, q) = [p, q]g(p, q), \quad (4.28)$$

где g – некоторый полином со свойствами $g(p, q) = g(q, p) \in \mathcal{P}_{1,1}$.

²⁾ Такая форма общего решения сохраняется также и при $n_+ = 2$, но этот факт требует отдельного доказательства. Соответствующее доказательство приведено в [9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме П2.2 из уравнения (4.26) следует

$$\psi(p+q, r) - \psi(p, r) - \psi(q, r) = [r, p]Q(p, q, r) + [q, r]P(p, q, r), \quad (4.29)$$

где P и Q – некоторые полиномы. Применим к (4.29) операцию $\partial_{q_A}|_{q=0}$. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_{p_A}\psi(p, r) &= r^A P(p, 0, r) + [r, p]\partial_{q_A}Q(p, q, r)|_{q=0} = \\ &= \partial_{p_A}([p, r]P(p, 0, r)) - [p, r]\partial_{p_A}P(p, 0, r) + [r, p]\partial_{q_A}Q(p, q, r)|_{p=0}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $r^A = (-1)^A \omega^{AB} r_B$. Отсюда находим

$$\partial_{p_A}(\psi(p, r) + [p, r]P(p, 0, r)) = [p, r](-\partial_{p_A}P(p, 0, r) + \partial_{q_A}Q(p, q, r)|_{q=0}). \quad (4.31)$$

Уравнение (4.31) имеет вид $\partial_{p_A}F(p, r) = [p, r]G^A(p, r)$, из которого следует $N_p F(p, r) = [p, r]p_A G^A(p, r)$, где $N_p = p_A \partial_{p_A}$ есть оператор Эйлера по p . Очевидно, что решение этого уравнения имеет вид $F(p, r) = [p, r]H(p, r) + I(r)$, где H и I – некоторые полиномы. Таким образом, $\psi(p, r) = [p, r]g(p, r) + h(r)$ с некоторыми полиномами g и h . Так как $\psi(0, r) = 0$, мы имеем $h(r) = 0$, откуда следует $\psi(p, r) = [p, r]g(p, r)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. *Полином $g(p, q)$ из предложения 4.9 имеет вид*

$$g(p, q) = \varphi(p+q) - \varphi(p) - \varphi(q) + F([p, q]^2), \quad (4.32)$$

где φ и F – некоторые полиномы со свойствами $\varphi, F \in \mathcal{P}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим выражение (4.28) в уравнение (4.26). Это дает

$$[p, q]([q, r] - [r, p])W(p, q, r) = [r, p]([p, q] - [q, r])W(q, r, p), \quad (4.33)$$

где $W(p, q, r) = g(p+q, r) - g(q+r, p) + g(p, q) - g(q, r)$. Используя дважды лемму П2.1, находим

$$W(p, q, r) = [r, p][r+p, q]U(p, q, r), \quad (4.34)$$

где $U(p, q, r) = U(q, r, p)$ – некоторый полином. Из свойства $W(r, q, p) = -W(p, q, r)$ следует $U(r, q, p) = U(p, q, r)$, т.е. U есть симметричный полином. Применяя оператор $\partial_{r_A}|_{r=0}$ к соотношению

$$g(p+q, r) - g(q+r, p) + g(p, q) - g(q, r) = [r, p][r+p, q]U(p, q, r), \quad (4.35)$$

получаем $\varphi^A(p+q) - \partial_{q_A}g(p, q) - \varphi^A(q) = p^A[p, q]U(p, q, 0)$, где $\varphi^A(q) = \partial_{r_A}g(q, r)|_{r=0}$, и окончательно

$$\partial_{q_A}g(p, q) = \varphi^A(p+q) - \varphi^A(q) - p^A[p, q]U(p, q, 0). \quad (4.36)$$

Из условия $\partial_{q_B} \partial_{q_A} - \sigma(A, B) \partial_{q_A} \partial_{q_B} = 0$ вытекает

$$\begin{aligned} \partial_{q_B} \varphi^A(p+q) - \partial_{q_B} \varphi^A(q) + \sigma(A, B) p^A p^B U(p, q, 0) - \sigma(A, B) p^A [p, q] \partial_{q_B} U(p, q, 0) = \\ = (\sigma(A, B) \partial_{q_A} \varphi^B(p+q) - \sigma(A, B) \partial_{q_A} \varphi^B(q) + \\ + p^B p^A U(p, q, 0) - p^B [p, q] \partial_{q_A} U(p, q, 0)), \end{aligned} \quad (4.37)$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} \partial_{q_B} (\varphi^A(p+q) - \varphi^A(q)) - \sigma(A, B) \partial_{q_A} (\varphi^B(p+q) - \varphi^B(q)) = \\ = [p, q] (\sigma(A, B) p^A \partial_{q_B} - p^B \partial_{q_A}) U(p, q, 0). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Рассмотрим случай $q = 0$. Уравнение (4.38) дает $\partial_{p_B} \varphi^A(p) - \sigma(A, B) \partial_{p_A} \varphi^B(p) = C_{BA} - \sigma(A, B) C_{AB}$, где $C_{AB} = \partial_{p_A} \varphi^B(p)|_{p=0} = \partial_{p_A} \partial_{q_B} g(p, q)|_{p=q=0} = \sigma(A, B) C_{BA}$ вследствие свойства $g(p, q) = g(q, p)$. Таким образом, мы получаем $\partial_{p_B} \varphi^A(p) - \sigma(A, B) \partial_{p_A} \varphi^B(p) = 0$ и $\varphi^A(p) = \partial_{p_A} \varphi(p)$, где φ — некоторый полином. Уравнение (4.38) принимает вид

$$(p^A \partial_{q_B} - \sigma(A, B) p^B \partial_{q_A}) U(p, q, 0) = 0. \quad (4.39)$$

Согласно лемме П4.1 из уравнения (4.39) следует $\partial_{q_A} U(p, q, 0) = p^A V(p, q)$, где $V(p, q)$ — полином, и при помощи леммы П3.1 мы находим

$$U(p, q, 0) = H([p, q]), \quad (4.40)$$

где H — полином. Теперь соотношение (4.36) принимает вид $\partial_{q_A} g(p, q) = \partial_{q_A} \varphi(p+q) - \partial_{q_A} \varphi(q) - p^A [p, q] H([p, q])$, откуда следует $g(p, q) = \varphi(p+q) - \varphi(q) - \varphi(p) - K([p, q]) + L(p)$ с некоторыми полиномами K и L . Условие $g(p, 0) = 0$ дает $L = 0$, и условие $g(p, q) = g(q, p)$ дает $K = F([p, q]^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Мы нашли, что решение уравнения (4.26) имеет вид

$$\psi(p, q) = [p, q] F([p, q]^2) + \psi_1(p, q), \quad (4.41)$$

где

$$\psi_1(p, q) = [p, q] (\varphi(p+q) - \varphi(p) - \varphi(q)). \quad (4.42)$$

Полином ψ_1 удовлетворяет уравнению (4.26) при произвольном полиноме $\varphi \in \mathcal{P}_1$, вследствие чего $[p, q] F([p, q]^2)$ также удовлетворяет этому уравнению. Очевидно, что однородные слагаемые полинома $\psi = [p, q] F([p, q]^2)$ любой степени по $[p, q]$ должны удовлетворять уравнению (4.26). Легко проверить, что если $\psi = [p, q]^{2n+1}$ удовлетворяет уравнению (4.26), то $n = 1$.

Таким образом, общее решение уравнения (4.22) действительно имеет вид (4.24), и общее решение уравнения когомологии (4.5) имеет вид

$$M_2(z|f, g) = c_1 f(z) \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} \right)^3 g(z) + c_2 \bar{f} \bar{g} + c_3 [\mathcal{E}_z f(z) \bar{g} - \sigma(f, g) \mathcal{E}_z g(z) \bar{f}] + \\ + \delta_{n_-, 4+n_+} c_4 \int du (f(u) \mathcal{E}_u g(u) - \sigma(f, g) g(u) \mathcal{E}_u f(u)) + d_1^{\text{ad}} \zeta(z|f, g). \quad (4.43)$$

Легко проверить, что если $M_2 \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, то $c_2 = c_4 = 0$.

4.3.2. Независимость и нетривиальность. Первые четыре члена в выражении (4.43) являются независимыми нетривиальными коциклами. Действительно, предположим, что

$$c_1 f(z) \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} \right)^3 g(z) + c_2 \bar{f} \bar{g} + c_3 [\mathcal{E}_z f(z) \bar{g} - \sigma(f, g) \mathcal{E}_z g(z) \bar{f}] + \\ + \delta_{n_-, 4+n_+} c_4 \int du (f(u) \mathcal{E}_u g(u) - \sigma(f, g) g(u) \mathcal{E}_u f(u)) = \\ = d_1^{\text{ad}} \zeta(z|f, g) = -\sigma(f, g) \{\zeta(z|g), f(z)\} + \{\zeta(z|f), g(z)\} - \zeta(z|\{f, g\}). \quad (4.44)$$

Пусть носители функций f и g удовлетворяют условию $z \cap \text{supp}(f) = z \cap \text{supp}(g) = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$. Тогда имеем $c_2 \bar{f} \bar{g} = 0 \implies c_2 = 0$. Если же $z \cap \text{supp}(g) = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$, то $c_3 \mathcal{E}_z f(z) \bar{g} = -\sigma(f, g) \{\zeta(z|g), f(z)\}$. Это дает $c_3 = 0$ и $\hat{\zeta}(z|u) = a(u)$. Пусть $z \cap \text{supp}(f) = z \cap \text{supp}(g) = \emptyset$. В этом случае мы получаем

$$\delta_{n_-, 4+n_+} c_4 \int du (f(u) \mathcal{E}_u g(u) - \sigma(f, g) g(u) \mathcal{E}_u f(u)) = -\zeta(z|\{f, g\}).$$

Варьируя это уравнение по $g(u)$, находим

$$\delta_{n_-, 4+n_+} c_4 \left(2u^A \frac{\partial f(u)}{\partial u^A} - 4f(u) \right) = \{\zeta(z|u), f(u)\},$$

что дает $c_4 = 0$ и

$$\zeta(z|f) = a \bar{f} + \sum_{q=0}^Q t^{(D)q}(z) (\partial_D^z)^q f(z).$$

Таким образом, уравнение (4.44) принимает вид

$$-\sigma(f, g) \left\{ \sum_{q=0}^Q t^{(D)q}(z) (\partial_D^z)^q g(z), f(z) \right\} + \left\{ \sum_{q=0}^Q t^{(D)q}(z) (\partial_D^z)^q f(z), g(z) \right\} - \\ - \sum_{q=0}^Q t^{(D)q}(z) (\partial_D^z)^q \{f(z), g(z)\} = c_1 f(z) \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} \right)^3 g(z). \quad (4.45)$$

Подставим в уравнение (4.45) функции f и g вида

$$f(z) = e^{z^A p_A} \varphi(x), \quad g(z) = e^{z^A r_A} \phi(x),$$

где $\varphi(x) = \phi(x) = 1$ при $x \in U$, $U \subset \mathbb{R}^{n+}$ — некоторая ограниченная область ($z = (x, \xi)$). В этой области уравнение (4.45) дает

$$\{T(z|p), zr\} - \{T(z|r), zp\} + (T(z|p+r) - T(z|p) - T(z|r))[p, r] = -c_1[p, r]^3, \quad (4.46)$$

где

$$T(z|p) = \sum_{q=0}^Q t^{(D)_q}(z)(p_D)^q.$$

Применяя к этому уравнению оператор $\overleftarrow{\partial}/\partial r_A|_{r=0}$, находим

$$T(z|p)\overleftarrow{D}^A = \tau^{AB}(z)p_B,$$

где

$$\tau^{AB}(z) = -T(z|0)(-1)^A \omega^{AB} + T(z|r)\overleftarrow{\partial}/\partial r_A|_{r=0}\overleftarrow{D}^B \quad \text{и} \quad \overleftarrow{D}^A = \overleftarrow{\partial}/\partial z^B \omega^{BA}.$$

Как следствие $T(z|p) = \tau^A(z)p_A + T(p)$. Подставляя это выражение в уравнение (4.46), мы видим, что члены, относящиеся к $\mathcal{P}_6$, дают уравнение $(T(p+r) - T(p) - T(r))[p, r] = -c_1[p, r]^3$, или $T(p+r) - T(p) - T(r) = -c_1[p, r]^2$. Применяя к этому уравнению оператор $\overleftarrow{\partial}/\partial r_A|_{r=0}$, получаем уравнение $\partial T(p)/\partial p_A = f^A$, где $f^A = \partial T(r)/\partial r_A|_{r=0}$, из которого следует $T(p) = F(0) + T^A p_A$, и поэтому $c_1 = 0$.

Таким образом, уравнение (4.44) имеет решение, только если $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

4.3.3. *Точность формы $d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g)$.* Обсудим слагаемое $d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g)$ в выражении (4.43):

$$d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g) = \{\zeta(z|f), g(z)\} - \sigma(f, g)\{\zeta(z|g), f(z)\} - \zeta(z|\{f, g\}).$$

Эта форма является кограницей, если $M_2(z|f, g)$ и $\zeta(z|g)$ принадлежат пространству $\mathcal{A}$.

1. $\mathcal{A} = \mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$. В этом случае $\zeta(z|g) \in \mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$ и форма $d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g)$ является точной (тривиальный коцикл).

2. $\mathcal{A} = \mathbf{E}_{n+}^{n-}$. В этом случае $\zeta(z|g) \in \mathbf{E}_{n+}^{n-}$ и форма $d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g)$ является точной (тривиальный коцикл).

3. $\mathcal{A} = \mathbf{D}_{n+}^{n-}$. В этом случае условие $d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ дает (см. приложение 6)

$$\zeta(z|f) = \zeta_D(z|f) + \zeta(z)\bar{f}, \quad \zeta_D(z|f) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}, \quad \zeta(z) \in \mathbf{E}_{n+}^{n-}. \quad (4.47)$$

Поэтому билинейная форма $d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g)$ может быть представлена в виде $d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g) = M_{2|D}(z|f, g) + M_{2|C}(z|f, g)$, где $M_{2|D}(z|f, g) = d_1^{\text{ad}}\zeta_D(z|f, g)$ есть точная форма и $M_{2|C}(z|f, g) = \{f(z), \zeta(z)\}\bar{g} - \sigma(f, g)\{\zeta(z), g(z)\}\bar{f}$ представляет собой нетривиальный коцикл, параметризованный классами функций $\mathbf{E}_{n+}^{n-}/\mathbf{Z}_{n+}^{n-}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пространство $\mathbb{G}^{n_1-} \otimes \dots \otimes \mathbb{G}^{n_k-}$ можно естественным образом отождествить с $\mathbb{G}^{n_1-+\dots+n_k-}$, полагая

$$(g_1 \otimes \dots \otimes g_k)(\xi) = g_1(\xi_1) \dots g_k(\xi_k), \quad g_j \in \mathbb{G}^{n_j-}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Аналогично для $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_j})$ и $f_j \in \mathbf{D}_{n_{j+}}^{n_{j-}}$ положим

$$(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_k)(x) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_k(x_k), \quad (f_1 \otimes \dots \otimes f_k)(z) = f_1(z_1) \dots f_k(z_k).$$

Если $g \in \mathbb{G}^{n-}$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+})$, то элемент $\varphi \otimes g$ пространства $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$ будет обозначаться φg .

ЛЕММА П1.1 (теорема о ядре). *Для любой раздельно непрерывной полилинейной формы M на $\mathbf{D}_{n_{1+}}^{n_{1-}} \times \dots \times \mathbf{D}_{n_{k+}}^{n_{k-}}$ найдется единственная обобщенная функция $m \in \mathbf{D}_{n_{1+}+\dots+n_{k+}}^{n_{1-}+\dots+n_{k-}}$, удовлетворяющая соотношению*

$$M(f_1, \dots, f_k) = \int dz_k \dots dz_1 m(z_1, \dots, z_k) f_1(z_1) \dots f_k(z_k) \quad (\text{П1.1})$$

для любых $f_1 \in \mathbf{D}_{n_{1+}}^{n_{1-}}, \dots, f_k \in \mathbf{D}_{n_{k+}}^{n_{k-}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $k = 2$. Единственность m вытекает из плотности $\mathbf{D}_{n_{1+}}^{n_{1-}} \otimes \mathbf{D}_{n_{2+}}^{n_{2-}}$ в $\mathbf{D}_{n_{1+}+n_{2+}}^{n_{1-}+n_{2-}}$, которая, в свою очередь, следует из плотности $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2+})$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1++n_2+})$. Докажем теперь существование m . Для каждой пары $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+})$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2+})$ определим непрерывную билинейную форму M_{φ_1, φ_2} на $\mathbb{G}^{n_1-} \times \mathbb{G}^{n_2-}$ посредством соотношения

$$M_{\varphi_1, \varphi_2}(g_1, g_2) = M(\varphi_1 g_1, \varphi_2 g_2), \quad g_{1,2} \in \mathbb{G}^{n_{1,2-}}.$$

Эта форма однозначно определяет линейный функционал m_{φ_1, φ_2} на $\mathbb{G}^{n_1-+n_2-}$, удовлетворяющий условию $m_{\varphi_1, \varphi_2}(g_1 \otimes g_2) = M_{\varphi_1, \varphi_2}(g_1, g_2)$. Очевидно, что отображение $(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow m_{\varphi_1, \varphi_2}(g)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2+})$ в $\mathbb{K}$ билинейно и раздельно непрерывно для любого $g \in \mathbb{G}^{n_1-+n_2-}$. Поэтому согласно стандартной теореме о ядре для обобщенных функций (см., например, [14], теорема 5.2.1) найдется единственная обобщенная функция $\mu_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1++n_2+})$ такая, что $\mu_g(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = m_{\varphi_1, \varphi_2}(g)$ для любых $\varphi_{1,2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_{1,2+}})$. Из плотности $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2+})$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1++n_2+})$ вытекает, что отображение $g \rightarrow \mu_g(\varphi)$ линейно по g для любого фиксированного $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1++n_2+})$. Поэтому имеется единственный непрерывный линейный функционал μ на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1++n_2+}) \otimes \mathbb{G}^{n_1-+n_2-}$ такой, что $\mu(\varphi g) = \mu_g(\varphi)$ для любых $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1++n_2+})$ и $g \in \mathbb{G}^{n_1-+n_2-}$. Если $f_1 \in \mathbf{D}_{n_{1+}}^{n_{1-}}$ и $f_2 \in \mathbf{D}_{n_{2+}}^{n_{2-}}$, то $\mu(f_1 \otimes f_2) = M(f_1, f_2)$, и, следовательно, $m = L^{-1}\mu$ удовлетворяет (П1.1) (здесь L — описанный во введении изоморфизм между $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$ и пространством непрерывных линейных функционалов на $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В этом приложении будут доказаны леммы П2.1 и П2.2, которые были использованы при доказательстве теоремы 4.1. Возможно, что полученные здесь результаты вытекают из общей теории колец полиномов по четным и нечетным переменным, но выяснить это нам не удалось. Леммы сформулированы здесь с минимальной общностью, необходимой для наших целей.

Пусть p, q и r – три набора суперпеременных, каждый набор содержит n_+ четных и n_- нечетных переменных. Как и ранее, $[p, q] = (-1)^{A\omega^{AB}} p_A q_B$.

ЛЕММА П2.1. Пусть $n_+ \geq 2$, $n_- \geq 0$. Если $F(p, q, r)$ и $G(p, q, r)$ – полиномы по p, q, r , то соотношение

$$[p, q]F + [q, r]G = 0 \quad (\text{П2.1})$$

удовлетворяется тогда и только тогда, когда существует такой полином $f(p, q, r)$, что

$$F = [q, r]f(p, q, r), \quad G = -[p, q]f(p, q, r). \quad (\text{П2.2})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что, поскольку полиномы $[p, q]$ и $[q, r]$ четные, выражение (П2.2) удовлетворяет уравнению (П2.1). Кроме того, из леммы П2.3 (см. ниже) следует, что лемма П2.1 справедлива при $n_- = 0$.

Предположим, что лемма П2.1 справедлива при $n_- = N - 1$. Пусть P, Q и R – суперпеременные с n_+ четными и N нечетными компонентами: $P = (p, \mu_1)$, $Q = (q, \mu_2)$, $R = (r, \mu_3)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} F(P, Q, R) &= F_0(p, q, r) + \mu_i F_i(p, q, r) + \frac{1}{2} \mu_i \mu_j F_{ij}(p, q, r) + \mu_1 \mu_2 \mu_3 F_{123}(p, q, r), \\ G(P, Q, R) &= G_0(p, q, r) + \mu_i G_i(p, q, r) + \frac{1}{2} \mu_i \mu_j G_{ij}(p, q, r) + \mu_1 \mu_2 \mu_3 G_{123}(p, q, r), \\ [P, Q] &= [p, q] + \lambda_N \mu_1 \mu_2, \quad [Q, R] = [q, r] + \lambda_N \mu_2 \mu_3 \end{aligned}$$

(здесь $\lambda_N = \pm 1$ – параметр формы ω^{AB}). Согласно предположению индукции, уравнение (П2.1) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} F_0 &= [q, r]f_0, & G_0 &= -[p, q]f_0, \\ F_i &= [q, r]f_i, & G_i &= -[p, q]f_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ F_{12} &= -F_{21} = [q, r]f_{12}, & G_{12} &= -G_{21} = -[p, q]f_{12} - f_0, \\ F_{23} &= -F_{32} = [q, r]f_{23} - f_0, & G_{23} &= -G_{32} = -[p, q]f_{23}, \\ F_{31} &= -F_{13} = [q, r]f_{31}, & G_{31} &= -G_{13} = -[p, q]f_{31}, \\ F_{123} &= [q, r]f_{123} + f_1, & G_{123} &= -[p, q]f_{123} - f_3, \end{aligned}$$

где все функции f_I (I – любой индекс: 0, i и т.п.) являются полиномами по p, q и r . Если ввести полином $f(P, Q, R) = f_0 + \mu_i f_i + (1/2) \mu_i \mu_j f_{ij} + \mu_1 \mu_2 \mu_3 f_{123}$, то полученное решение может быть записано в виде $F = [Q, R]f$, $G = -[P, Q]f$.

ЛЕММА П2.2. Пусть $n_+ \geq 4$, $n_- \geq 0$. Если $F(p, q, r)$, $G(p, q, r)$ и $H(p, q, r)$ – полиномы по p, q, r , то соотношение

$$[p, q]F + [q, r]G + [r, p]G = 0 \quad (\text{П2.3})$$

удовлетворяется тогда и только тогда, когда существуют такие полиномы $f(p, q, r)$, $g(p, q, r)$ и $h(p, q, r)$, что

$$F = [q, r]h - [r, p]g, \quad G = [r, p]f - [p, q]h, \quad H = [p, q]g - [q, r]f. \quad (\text{П2.4})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко провести по индукции аналогично доказательству предыдущей леммы. Случай $n_- = 0$ рассмотрен в лемме П2.4.

ЛЕММА П2.3. Пусть p – суперпеременная с $n \geq 2$ четными компонентами (нечетные компоненты отсутствуют). Пусть $F(p)$, $G(p)$, $u(p)$, $v(p)$ – полиномы по p такие, что $u(p)$, $v(p)$ не зависят от p_1 . Пусть также $v|_{p_2=0} \neq 0$. Тогда соотношение

$$(p_1 p_2 + u)F + vG = 0 \quad (\text{П2.5})$$

выполняется тогда и только тогда, когда существует такой полином $f(p)$, что

$$F = vf(p), \quad G = -(p_1 p_2 + u)f(p). \quad (\text{П2.6})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполним следующую замену переменных: введем переменную $x = p_1 p_2 + u$ вместо переменной p_1 , все остальные переменные не меняются. Таким образом, $p_1 = (x - u)/p_2$. Пусть $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ обозначают функции F и G в новых переменных. Соотношение (П2.5) принимает вид $x\tilde{F} + v\tilde{G} = 0$, где функции $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ – полиномы по $x, p_2, \dots, p_n$ и $1/p_2$, т.е. $\tilde{F}, \tilde{G} \in \mathbb{K}[x, p_2, \dots, p_n, 1/p_2]$.

Представим функцию $\tilde{G}$ в виде $\tilde{G} = \tilde{G}_0 + x\tilde{G}_1$, где $\tilde{G}_1 \in \mathbb{K}[x, p_2, \dots, p_n, 1/p_2]$ и $\tilde{G}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{G}|_{x=0} \in \mathbb{K}[p_2, \dots, p_n, 1/p_2]$. Тогда мы получаем $\tilde{G}_0 = 0$ и $\tilde{F} + v\tilde{G}_1 = 0$. Возвращаясь к исходным переменным, находим $F = -vG_1(p)$, где $G_1 \in \mathbb{K}[p, 1/p_2]$. Разложим G_1 по степеням $1/p_2$:

$$G_1 = -f + \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{p_2^i},$$

где f и f_i – полиномы по p , причем f_i не зависят от p_2 , $i = 1, 2, \dots$. Так как F – полином и $v|_{p_2=0} \neq 0$, мы получаем $f_i = 0$, $F = vf$ и $G_1 = -f \in \mathbb{K}[p]$. Очевидно, $G = -(p_1 p_2 + u)f$.

ЛЕММА П2.4. Пусть p, q, r – суперпеременные с $n \geq 4$ четными компонентами (нечетные компоненты отсутствуют). Если $F(p, q, r)$, $G(p, q, r)$ и $H(p, q, r)$ – полиномы по p, q, r , то соотношение

$$[p, q]F + [q, r]G + [r, p]H = 0 \quad (\text{П2.7})$$

удовлетворяется тогда и только тогда, когда существуют полиномы $f(p, q, r)$, $g(p, q, r)$ и $h(p, q, r)$ такие, что

$$F = [q, r]h - [r, p]g, \quad G = [r, p]f - [p, q]h, \quad H = [p, q]g - [q, r]f. \quad (\text{П2.8})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем новые переменные $x = [p, q]$, $z = [r, p]$ и $u = q_1r_2 - q_2r_1$ вместо p_1, p_2 и q_1 . Все остальные переменные не меняются. Пусть

$$y = [q, r], \quad y_2 = y - u = \sum_{i,j=3}^n \omega^{ij} q_i r_j, \quad x_2 = \sum_{i,j=3}^n \omega^{ij} p_i q_j, \quad z_2 = \sum_{i,j=3}^n \omega^{ij} r_i p_j.$$

Старые переменные следующим образом выражаются через новые:

$$p_1 = -\frac{r_1 r_2 (x - x_2) + (q_2 r_1 + u)(z - z_2)}{r_2 u},$$

$$p_2 = -\frac{r_2 (x - x_2) + q_2 (z - z_2)}{u}, \quad q_1 = \frac{q_2 r_1 + u}{r_2}.$$

Соотношение (П2.7) принимает вид

$$x\tilde{F} + (u + y_2)\tilde{G} + z\tilde{H} = 0,$$

где $y_2 \in \mathbb{K}[p_3, \dots, p_n, r_3, \dots, r_n]$ и $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H} \in \mathbb{K}[x, z, u, p_3, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n, r_1, \dots, r_n, 1/u, 1/r_2]$. Представим функции $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ в виде

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 - x\tilde{G}_1, \quad (\text{П2.9})$$

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 - x\tilde{H}_1, \quad (\text{П2.10})$$

где функции $\tilde{G}_i, \tilde{H}_i \in \mathbb{K}[x, z, u, p_3, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n, r_1, \dots, r_n, 1/u, 1/r_2]$, а $\tilde{G}_0 = \tilde{G}|_{x=0}$ и $\tilde{H}_0 = \tilde{H}|_{x=0}$ не зависят от x .

Мы находим $\tilde{F} = -(u + y_2)\tilde{G}_1 - z\tilde{H}_1$. В исходных переменных полученные соотношения имеют вид $F = (u + y_2)g - zh$, где $g, h \in \mathbb{K}[p, q, r, 1/r_2, 1/u]$. Разложим g и h по степеням $1/u$:

$$g = g_0 + \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{u^i}, \quad h = h_0 + \sum_{i=1}^N \frac{h_i}{u^i}.$$

Очевидно, что $g_0, h_0 \in \mathbb{K}[p, q, r, 1/r_2]$ и $g_i, h_i \in \mathbb{K}[p, q_2, \dots, q_n, r, 1/r_2]$. Поскольку F – полином, $y_2 g_N - z h_N = 0$ и $g_{i+1} + y_2 g_i - z h_i = 0$, $i = 1, \dots, N-1$. Так как $n \geq 4$ и как следствие $y_2 \neq 0$, получаем с использованием результатов леммы П2.3, что $g_i = z \gamma_i$. Таким образом, $F = y g_0 + g_1 - z h_0 = y g_0 - z(h_0 - \gamma_1)$, или

$$F = y\mu + z\nu, \quad (\text{П2.11})$$

где $\mu, \nu \in \mathbb{K}[p, q, r, 1/r_2]$.

Пусть $M \geq 1$ – наивысшая степень в разложении μ и ν по степеням $1/r_2$, т.е.

$$\mu = \frac{\alpha_M}{r_2^M} + \mu'_{M-1}, \quad \nu = \frac{\beta_M}{r_2^M} + \nu'_{M-1}, \quad \frac{\partial \alpha_M}{\partial r_2} = \frac{\partial \beta_M}{\partial r_2} = 0.$$

Здесь функции α_M и β_M – полиномы и функции μ'_{M-1} и ν'_{M-1} имеют максимальную степень $\leq M-1$ относительно разложения по $1/r_2$. Соотношение (П2.11) принимает вид

$$F = y\mu'_{M-1} + z\nu'_{M-1} + \frac{q_1\alpha_M - p_1\beta_M}{r_2^{M-1}} + \frac{y_0\alpha_M + z_0\beta_M}{r_2^M},$$

$$y_0 = -q_2r_1 + y_2, \quad z_0 = r_1p_2 + z_2.$$

Из этого соотношения вытекает уравнение $y_0\alpha_M + z_0\beta_M = 0$. Из результатов леммы П2.3 следует, что его решение имеет вид $\alpha_M = z_0\varphi_M$, $\beta_M = -y_0\varphi_M$, где φ_M есть полином. Используя соотношение $q_1z_0 + p_1y_0 = q_1z + p_1y$, находим

$$F = y\mu_{M-1} + z\nu_{M-1}, \quad \mu_{M-1} = \mu'_{M-1} + \frac{p_1\varphi_M}{r_2^{M-1}}, \quad \nu_{M-1} = \nu'_{M-1} + \frac{q_1\varphi_M}{r_2^{M-1}},$$

где μ_{M-1} и ν_{M-1} – полиномы степени $M-1$ по $1/r_2$, и т.д. Таким образом, мы проверили, что функция F может быть представлена в виде

$$F = yg - zh \quad (\text{П2.12})$$

с полиномами g и h .

Аналогично устанавливается справедливость следующего представления для функций G и H : $G = zf_1 + x(g_1 - g)$, $H = x(f_2 - h) + y(g_2 - h_1)$ с полиномами f_1, f_2, g_1 и g_2 .

Подстановка этих выражений в уравнение (П2.7) дает $x(yg_1 + zf_2) + yzg_2 = 0$. Несколько раз применяя лемму П2.3, находим $g_1 = z\varphi_1$, $f_2 = y\varphi_2$, $g_2 = -x(\varphi_1 + \varphi_2)$, откуда следует утверждение леммы с $f = f_1 + x\varphi_1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ЛЕММА ПЗ.1. Если $n_+ \geq 2$, то общее решение уравнения

$$\frac{\partial f(k, l)}{\partial k_A} = l^A g(k, l), \quad l^A = (-1)^{\varepsilon_A} \omega^{AB} l_B, \quad (\text{ПЗ.1})$$

для полиномов $f(k, l)$, $g(k, l)$ имеет вид

$$f(k, l) = H(x, l) = \sum_{q=0}^Q f_q(l) x^q, \quad g(k, l) = \frac{\partial H(x, l)}{\partial x},$$

где $f_q(l)$ – некоторые полиномы по l , $x = k_A l^A = [k, l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (ПЗ.1) на k_A , получаем $N_k f(k, l) = xg(k, l)$, откуда следует $f(k, l) = f_0(l) + xh_1(k, l)$, где $h_1(k, l)$ – полином. Подстановка этого представления для полинома $f(k, l)$ в уравнение (ПЗ.1) дает $x \partial h_1(k, l) / \partial k_A = l^A [h_1(k, l) - g(k, l)]$. Рассматривая это уравнение для случая $A = 1$, $\varepsilon_A = 0$ и используя результаты леммы П2.1, находим $h_1(k, l) - g(k, l) = xg_1(k, l)$, где $g_1(k, l)$ – полином, откуда следует $\partial h_1(k, l) / \partial k_A = l^A g_1(k, l)$, откуда, в свою очередь, вытекает $h_1(k, l) = f_1(l) + xh_2(k, l)$ и т.д. Подставляя выражение $f(k, l) = H(x, l)$ в исходное уравнение (ПЗ.1), мы получаем утверждение леммы для $g(k, l)$.

Если $f(l, k) = \pm f(k, l)$, то все коэффициентные функции $f_q(l)$ не зависят от l и можно написать $f(k, l) = H(x)$, где $H(x)$ – полином по x .

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ЛЕММА П4.1. Если $n_+ \neq 1$, то общее решение уравнения

$$k_A a_B(k) - \sigma(A, B) k_B a_A(k) = 0 \quad (\text{П4.1})$$

для полиномов $a_A(k)$ имеет вид

$$a_A(k) = k_A a(k),$$

где $a(k)$ – произвольный полином.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что выражение $a_A(k) = k_A a(k)$ является решением уравнения (П4.1) для произвольных функций $a(k)$.

Обозначим четные переменные через k_j , $j = 1, \dots, n_+$, и нечетные переменные через k_α , $\alpha = 1 + n_+, \dots, n_- + n_+$. Применим к уравнению (П4.1) оператор $\sigma(A, B) \partial / \partial k_B$. Получим $[N_+ + n_+ + (n_- - N_-) - (-1)^{\varepsilon_A}] a_A(k) = k_A \partial a_B(k) / \partial k_B$, где $N_+ = k_j \partial / \partial k_j$, $N_- = k_\alpha \partial / \partial k_\alpha$. Очевидно, что оператор $[N_+ + n_+ + (n_- - N_-) - (-1)^{\varepsilon_A}]$ обратим в пространстве полиномов, если $n_+ \neq 1$, и имеет единственный нулевой вектор $P(k) = k_2 \dots k_{n_-+1}$ при $n_+ = 1$.

Таким образом, если $n_+ \neq 1$, то $a_A(k) = k_A a(k)$, где $a(k) = k_B [N_+ + n_+ + (n_- - N_-)]^{-1} \partial a_B(k) / \partial k_B$ – полином.

Если $n_+ = 1$, то существует дополнительное решение

$$a_1(k) = k_2 \dots k_{n_-+1}, \quad a_\alpha(k) = 0, \quad \alpha = 2, \dots, n_- + 1.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

В данном приложении будет получено полезное представление для обобщенных функций, сосредоточенных на гиперплоскости.

ЛЕММА П5.1. Пусть $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – обобщенная функция порядка $\leq N$ с компактным носителем, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\partial^\lambda f(x) = 0$ при $|\lambda| \leq N$, $x \in \text{supp } u$. Тогда $u(f) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 5.1 имеется в [14].

ЛЕММА П5.2. Любая обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ с носителем, содержащимся в гиперплоскости $x_2 = 0$, допускает единственное локально конечное разложение вида

$$u = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(x_1) \partial^{\lambda} \delta(x_2), \quad (\text{П5.1})$$

где $u_{\lambda} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1})$ и суммирование производится по всем мультииндексам $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n_2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$ и $\varphi = 1$ в окрестности начала координат. Для каждого мультииндекса λ определим оператор $L_{\lambda}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ посредством соотношения $[L_{\lambda}f](x_1, x_2) = (-1)^{|\lambda|} f(x_1) \varphi(x_2) x_2^{\lambda} / \lambda!$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$. Если семейство обобщенных функций u_{λ} удовлетворяет (П5.1), то

$$u_{\lambda}(f) = u(L_{\lambda}f) \quad (\text{П5.2})$$

для любого $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$ и, следовательно, представление (П5.1) единственно. Покажем теперь, что обобщенные функции u_{λ} , определенные при помощи (П5.2), образуют локально конечное семейство, удовлетворяющее (П5.1). Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^{n_1}$, а χ – функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$, равная единице в окрестности K . Определим обобщенную функцию u^{χ} с компактным носителем посредством соотношения $u^{\chi}(x_1, x_2) = \chi(x_1) u(x_1, x_2)$ и обозначим через N порядок u^{χ} . Если $|\lambda| > N$ и $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$, то все производные $L_{\lambda}f$ порядка $\leq N$ обращаются в нуль на носителе u^{χ} и согласно лемме П5.1 имеем $u^{\chi}(L_{\lambda}f) = 0$. Следовательно,

$$u_{\lambda}(f) = u(L_{\lambda}f) = u^{\chi}(L_{\lambda}f) = 0$$

при $\text{supp } f \subset K$. Таким образом, семейство u_{λ} локально конечно. Остается показать, что для любой функции $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$, удовлетворяющей условию $\text{supp } g \subset K \times \mathbb{R}^{n_2}$, справедливо соотношение

$$u(g) = \sum_{|\lambda| \leq N} (-1)^{|\lambda|} u(L_{\lambda}g_{\lambda}), \quad (\text{П5.3})$$

где $g_{\lambda}(x_1) = \partial^{\lambda} g(x_1, x_2)|_{x_2=0}$. Заметим, что функция $G = \sum_{|\lambda| \leq N} (-1)^{|\lambda|} \tilde{g}_{\lambda}$ с точностью до множителя $\varphi(x_2)$ представляет собой тейлоровское разложение функции g по переменной x_2 . Поэтому все производные функции $g - G$ порядка $\leq N$ обращаются в нуль на носителе u^{χ} , и согласно лемме П5.1 имеем $u^{\chi}(g - G) = 0$. Как следствие получаем соотношение (П5.3), так как при сделанном предположении о носителе g имеем $u(g - G) = u^{\chi}(g - G)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

В данном приложении доказывается существование представления (4.47) для любого $\zeta(z|f) \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$, удовлетворяющего условию $d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ для произвольных фиксированных $f, g \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$. Очевидно, достаточно найти такую функцию $\zeta_D(z|f) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, что

$$\frac{\partial \zeta(z|u)}{\partial u^A} = \frac{\partial \zeta_D(z|u)}{\partial u^A}, \quad A = 1, \dots, n_+ + n_-.$$

Из выражения (4.1) для дифференциала d_1^{ad} непосредственно следует, что $\zeta(z|\{f, g\}) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ для любых фиксированных $f, g \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$. Отсюда вытекает, что $\zeta(z|\partial f/\partial u^A) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ для любого $f \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$. Поэтому существование $\zeta_D(z|f)$ с нужными свойствами обеспечивается следующей леммой (для простоты эта лемма формулируется для случая $n_- = 0$).

ЛЕММА П6.1. Пусть обобщенные функции $T_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$, $i = 1, \dots, n_1$, удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial T_i}{\partial x^j}(x, y) = \frac{\partial T_j}{\partial x^i}(x, y), \quad i, j = 1, \dots, n_1, \quad (\text{П6.1})$$

и пусть функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$ такова, что

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \varphi(x) dx = 1.$$

Для $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ положим

$$T(\psi) = \sum_{i=1}^{n_1} T_i(\psi^i),$$

где

$$\psi^i(x, y) = \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^{n_1}} dx' x'^i \varphi(x - tx') \psi(x + (1-t)x', y). \quad (\text{П6.2})$$

Тогда функционал T принадлежит $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ и удовлетворяет условиям $T_i = \partial T / \partial x^i$ для всех $i = 1, \dots, n_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что интеграл в правой части (П6.2) сходится для любых x и y , а ψ^i являются функциями класса C^∞ на $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Покажем, что $\psi^i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Пусть число $R > 0$ таково, что $\text{supp } \varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^{n_1} : |x| \leq R\}$ и $\text{supp } \psi \subset K_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} : \max(|x|, |y|) \leq R\}$. Из (П6.2) следует, что ψ^i могут быть отличны от нуля, только если

$$|x - tx'| \leq R, \quad |x + (1-t)x'| \leq R, \quad |y| \leq R.$$

Отсюда вытекает, что $|x'| \leq 2R$ и, следовательно, $|x| \leq 3R$. Таким образом, имеем $\text{supp } \psi^i \subset K_{3R}$ и $\psi^i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Обозначим через $\mathcal{D}(K)$ пространство гладких функций, носители которых содержатся в компакте K . Выше было показано, что $\psi^i \in \mathcal{D}(K_{3R})$, если $\psi \in \mathcal{D}(K_R)$. Проверим теперь, что отображения $L^i: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+n_2}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$, переводящие ψ в ψ^i , являются непрерывными и, следовательно, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Достаточно показать, что L^i непрерывны как отображения из $\mathcal{D}(K_R)$ в $\mathcal{D}(K_{3R})$ для любого $R > 0$, т.е. что для любых $\psi \in \mathcal{D}(K_R)$ и $k = 0, 1, \dots$ справедливо неравенство $\|\psi^i\|_k \leq C \|\psi\|_{k'}$, где

$$\|\psi\|_k = \max_{|\lambda| \leq k} \sup_{x, y} |\partial^\lambda \psi(x, y)|,$$

а C и k' зависят лишь от k и R (но не от ψ). При $|\lambda| \leq k$ имеем

$$\begin{aligned} |\partial^\lambda \psi^i(x, y)| &\leq \int_0^1 dt \int_{|x'| \leq 2R} dx' |x'^i \partial^\lambda [\varphi(x - tx') \psi(x + (1-t)x', y)]| \leq \\ &\leq 2^k \int_{|x'| \leq 2R} dx' \|\varphi\|_k \|\psi\|_k. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\psi^i\|_k \leq C \|\psi\|_k$, где

$$C = 2^k \int_{|x'| \leq 2R} dx' \|\varphi\|_k.$$

Проверим теперь, что $T_i = \partial T / \partial x^i$. Выполнив замену переменных $x' \rightarrow (x - s)/t$ в интеграле, представляющем $L^i \partial \psi / \partial x^j$, находим, что

$$\begin{aligned} \left[L^i \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right](x, y) &= \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^{n_1}} ds \frac{x^i - s^i}{t^n} \varphi(s) \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\psi \left(\frac{x + (t-1)s}{t}, y \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \Phi^i(x, y) - \delta_j^i \Phi(x, y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^i(x, y) &= \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^{n_1}} ds \frac{x^i - s^i}{t^n} \varphi(s) \psi \left(\frac{x + (t-1)s}{t}, y \right) = \\ &= \int_0^1 t dt \int_{\mathbb{R}^{n_1}} dx' x'^i \varphi(x - tx') \psi(x + (1-t)x', y), \end{aligned} \quad (\text{П6.3})$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \frac{ds}{t^n} \varphi(s) \psi \left(\frac{x + (t-1)s}{t}, y \right) = \\ &= \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^{n_1}} dx' \varphi(x - tx') \psi(x + (1-t)x', y). \end{aligned} \quad (\text{П6.4})$$

Как и выше в случае $L^i\psi$, убеждаемся, что $\Phi, \Phi^i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial T}{\partial x^j} \right] (\psi) &= -T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right) = - \sum_{i=1}^{n_1} T_i \left(L^i \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^{n_1} T_i \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} \right) + T_j(\Phi) = T_j \left(- \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^i} + \Phi \right), \end{aligned}$$

где при выводе последнего равенства было использовано соотношение (Пб.1). Но из (Пб.3) и (Пб.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^i}(x, y) &= \int_0^1 dt \, t \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} dx' \, \varphi(x - tx') \psi(x + (1-t)x', y) = \\ &= \psi(x, y) \int dx' \, \varphi(x - x') - \Phi(x, y) = \psi(x, y) - \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем $[\partial T / \partial x^j](\psi) = T_j(\psi)$.

Благодарности. Работа была поддержана грантами РФФИ (№ 02-01-00930 (И.Т.), № 02-02-17067 (С.К.), № 02-02-16946 (А.С.)), грантом INTAS (№ 03-51-6346 (А.С.)) и грантом НШ-1578.2003.2.

Список литературы

- [1] *F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerovich, D. Sternheimer.* Ann.Phys. 1978. V. 111. P. 61; P. 111.
- [2] *М. В. Карасев, В. П. Маслов.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [3] *B. Fedosov.* Deformation Quantization and Index Theory. Berlin: Akademie, 1996.
- [4] *M. Kontsevich.* Lett. Math. Phys. 2003. V. 66. P. 157; q-alg/9709040.
- [5] *В. В. Жаринов.* ТМФ. 2003. Т. 136. № 2. С. 179.
- [6] *Д. А. Лейтес, И. М. Щепочкина.* ТМФ. 2001. Т. 126. № 3. С. 339.
- [7] *И. В. Тютин.* ТМФ. 2001. Т. 127. № 2. С. 253.
- [8] *И. В. Тютин.* ТМФ. 2001. Т. 128. № 3. С. 515.
- [9] *S. Konstein, I. Tyutin.* Cohomologies of the Poisson superalgebra on $(2, n)$ -superdimensional spaces. hep-th/0411235.
- [10] *S. Konstein, I. Tyutin.* Deformation of the central extension of the Poisson superalgebra. hep-th/0501027.
- [11] *M. Scheunert, R. B. Zhang.* J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 5024; q-alg/9701037.
- [12] *S. Konstein, A. Smirnov, I. Tyutin.* General form of deformation of Poisson superbracket. hep-th/0401023.
- [13] *S. Konstein, A. Smirnov, I. Tyutin.* Cohomologies of the Poisson superalgebra. hep-th/0312109.
- [14] *Л. Хермандер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. I. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 13.X.2004 г.