Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Гордевский, Вихри в газе из твердых сфер, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 2, 303–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:55:36

© 2003 г.

В. Д. Горdevский*

ВИХРИ В ГАЗЕ ИЗ ТВЕРДЫХ СФЕР

Приближенно описан переходный режим между двумя вихреобразными потоками в газе из твердых сфер. Такие потоки вращаются как твердые тела вокруг своих осей, движущихся поступательно с произвольными линейными скоростями. Изучено асимптотическое поведение интегральной нормы разности между частями уравнения Больцмана при специальном выборе гидродинамических параметров распределения.

Ключевые слова: твердые сферы, уравнение Больцмана, вихреобразные потоки.

Эволюция разреженного газа описывается кинетическим уравнением Больцмана, которое в случае модели твердых сфер имеет вид [1], [2]

$$D(f) = Q(f, f), \quad (1)$$

где

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2)$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v_1 - v, \alpha)| [f(t, v'_1, x) f(t, v', x) - \\ - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \quad (3)$$

$$v'_1 = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha), \quad v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \quad (4)$$

$t \in \mathbb{R}^1$ – время, $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ – координата молекулы, $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ – скорость молекулы, $d > 0$ – диаметр молекулы, $f(t, v, x)$ – искомая функция распределения молекул, α – единичный вектор, Σ – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$.

Для уравнения (1) пока не удалось найти ни одного точного решения, кроме так называемых максвеллианов, глобальных и локальных [1], [2] (прогресс в этом отношении достигнут лишь в случае модели максвелловых молекул и некоторых ее обобщений [3]–[5]).

* Харьковский национальный университет, Харьков, Украина. E-mail: vajra@vl.kharkov.ua

В работах [6]–[9] найдены некоторые приближенные явные решения этого уравнения в виде линейных комбинаций глобальных максвеллианов с использованием различных метрик при вычислении невязки (т.е. той или иной нормы разности) между левой и правой частями (2) и (3) уравнения (1). Аналогичные результаты для частного случая локальных максвеллианов – так называемых винтов – получены в работах [10], [11]. Винты представляют собой стационарные, неоднородные максвеллианы, соответствующие потокам газа, которые вращаются вокруг неподвижных осей.

Целью данной работы является построение бимодального распределения, минимизирующего невязку из работ [9], [10], в котором вместо винтовых мод используются распределения более общего вида – вихри. Так мы называем нестационарные неоднородные распределения, описывающие вращающиеся потоки, оси которых могут двигаться с любыми линейными скоростями.

Точная постановка задачи такова. Рассмотрим интегральную невязку между частями уравнения Больцмана

$$\Delta_1 = \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv. \quad (5)$$

Будем искать распределение f в виде

$$f = \sum_{i=1}^2 \varphi_i M_i = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(t, x) M_i(t, v, x), \quad (6)$$

где

$$M_i(t, v, x) = \rho_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i (v - \bar{v}_i)^2}, \quad (7)$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_i + [\omega_i \times (x - \bar{u}_i t)], \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

при условии

$$[\omega_i \times \bar{u}_i] \neq 0. \quad (9)$$

Как видно из соотношений (7), (8), вихри являются аналогом локально-равновесных распределений со следующими гидродинамическими параметрами: ρ_i – плотности вихрей на осях вращения, ω_i – их угловые скорости, $r_i = r_i(t, x)$ – расстояние от точки x до i -й оси в момент времени t , $\bar{v}_i$ задают продольное движение осей и их положение в пространстве при $t = 0$, $\bar{u}_i$ – линейные скорости осей или “скорости сноса” (вихри превращаются в винты, если условие (9) не выполнено, т.е. векторы ω_i и $\bar{u}_i$ коллинеарны), $\beta_i = 1/(2T_i)$ – обратные температуры вихрей. Коэффициентные функции в (6) предполагаются такими, что

$$\varphi_i \geq 0, \quad \varphi_i \in C^1(\mathbb{R}^4), \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Требуется найти эти функции φ_i , $i = 1, 2$, и все имеющиеся параметры так, чтобы величина невязки Δ_1 стремилась к нулю.

Приведем основные результаты, относящиеся к асимптотике выражения (5) при больших β_i , $i = 1, 2$, когда в формулах (2), (3) в качестве f фигурирует функция вида (6)–(8).

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x)e^{-\beta_i\omega_i^2 r_i^2}, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

где ψ_i не зависят от β_i и

$$\omega_i = \frac{\omega_{0i}s_i}{\beta_i^{m_i}}, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

где $s_i > 0$, $m_i > 0$, а параметры $\omega_{0i} \in \mathbb{R}^3$ произвольны и фиксированы. Предположим, что следующие функции принадлежат $L_1(\mathbb{R}^4)$:

$$\psi_i, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \quad \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right|, \quad |[\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)]| \psi_i, \quad \left([\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)], \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right), \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Тогда определенная в соответствии с (5) величина Δ_1 имеет смысл и существует такое Δ'_1 , что

$$\Delta_1 \leq \Delta'_1, \quad (14)$$

причем:

1) если

$$m_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

либо

$$m_i > \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

и

$$[\omega_{0i} \times (\bar{v}_i - \bar{u}_i)] = 0, \quad (17)$$

то существует конечный предел

$$\begin{aligned} L = \lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 \rho_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \rho_j \pi d^2 \psi_1 \psi_2 |\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right| + \\ + 2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \psi_1 \psi_2; \end{aligned} \quad (18)$$

2) если

$$m_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

то

$$\lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i |[\omega_{0i} \times (\bar{v}_i - \bar{u}_i)]| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \psi_i; \quad (20)$$

3) если

$$m_i = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

и выполнено условие (17), то

$$\lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i^2 |\omega_{0i}| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx |[\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)]| \psi_i. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После подстановки распределения (6)–(8) в выражение (5) и очевидной оценки сверху, проведя во внутреннем интеграле замену переменной

$$u = \sqrt{\beta_i}(v - \tilde{v}_i), \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

получим

$$\begin{aligned} \Delta_1 \leq \Delta'_1 = \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_i(u, t, x) + B_i(u, t, x) \right| + \right. \\ \left. + A_i(u, t, x) \right] e^{-u^2} du, \end{aligned} \quad (24)$$

однако теперь, в отличие от аналогичных выражений из работ [10], [11], будем иметь (см. приложение А)

$$\begin{aligned} A_i(u, t, x) = \psi_1 \psi_2 \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + \right. \\ \left. + \frac{s_i}{\beta_i^{m_i}} [\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)] - \frac{s_j}{\beta_j^{m_j}} [\omega_{0j} \times (x - \bar{u}_j t)] - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} B_i(u, t, x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + \frac{s_i}{\beta_i^{m_i}} [\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)] \right) + \\ + 2\psi_i \left\{ \frac{s_i}{\beta_i^{m_i-1/2}} (u, [\omega_{0i} \times (\bar{v}_i - \bar{u}_i)]) - \right. \\ \left. - \frac{s_i^2}{\beta_i^{2m_i-1/2}} [\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)] [\omega_{0i} \times u] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из формул (24)–(26) видно, что предположение (13) обеспечивает существование величин Δ_1 и Δ'_1 . Далее, возможность предельного перехода под знаком интеграла при $\beta_i \rightarrow +\infty$, $i = 1, 2$, в выражении (24) для Δ'_1 вытекает из того, что все имеющиеся интегралы сходятся равномерно относительно β_i на любой достаточно широкой окрестности бесконечности благодаря присутствию множителей e^{-u^2} , e^{-w^2} и условию (13). Предел величины $A_i(u, t, x)$, очевидно, будет одинаковым для случаев 1, 2, 3 из условия теоремы,

$$\lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} A_i(u, t, x) = \pi d^2 \rho_j \psi_1 \psi_2 |\bar{v}_i - \bar{v}_j|. \quad (27)$$

Что касается предела функции $B_i(u, t, x)$ при $\beta_i \rightarrow +\infty$, $i = 1, 2$, то он будет различным для вышеупомянутых трех случаев. Именно, его значение будет равно

$$\bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \quad (28)$$

если выполнено условие (15) либо условия (16), (17),

$$\bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\psi_i s_i (u, \omega_{0i}, \bar{v}_i - \bar{u}_i) \quad (29)$$

при выполнении (19) и

$$\bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\psi_i s_i^2 [\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)] [\omega_{0i} \times u], \quad (30)$$

если выполнены условия (21) и (17).

Переходя к пределу в (24) с учетом (27) и (28)–(30) в каждом из случаев 1, 2, 3 теоремы, после очевидных оценок и вычисления полученных интегралов по переменной u получим соответственно либо (18), либо (20), либо (22). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть распределение f имеет вид (6)–(8), где функции φ_i , $i = 1, 2$, не зависят от β_i , $i = 1, 2$, и выполнено условие (12). Если следующие функции принадлежат $L_1(\mathbb{R}^4)$ при $\beta_i \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} & \varphi_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \\ & \varphi_i |[\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)]| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} [\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)] \right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (31)$$

то справедливо неравенство (14), причем:

1) если

$$[\omega_{0i} \times \bar{v}_i] = 0, \quad i = 1, 2, \quad (32)$$

и имеет место условие (15), то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 \rho_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \varphi_1 \varphi_2 \pi d^2 \rho_j |\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right| + 2\rho_1 \rho_2 \pi d^2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \varphi_1 \varphi_2; \quad (33) \end{aligned}$$

2) если выполняются условия (32) и (19), то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 \rho_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left| \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \mu_i(t, x) + \right. \\ & \left. + \varphi_1 \varphi_2 \mu_1(t, x) \mu_2(t, x) \pi d^2 \rho_j |\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right| + \\ & + 2\rho_1 \rho_2 \pi d^2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \mu_1(t, x) \mu_2(t, x) \varphi_1 \varphi_2 + \\ & + 2 \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \mu_i(t, x) \varphi_i + \right. \\ & \left. + s_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx |[\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)]| \mu_i(t, x) \varphi_i \right\} |[\omega_{0i} \times \bar{u}_i]|, \quad (34) \end{aligned}$$

где

$$\mu_i(t, x) = \exp\{s_i^2[\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)]^2\}, \quad i = 1, 2; \quad (35)$$

3) если

$$\bar{v}_i = \frac{\sigma_i \bar{v}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}, \quad k_i > 0, \quad \sigma_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (36)$$

где параметры $\bar{v}_{0i} \in \mathbb{R}^3$ произвольны и фиксированы, и

$$k_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (37)$$

причем верно (15), то

$$\lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 = \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right|; \quad (38)$$

4) если выполнены условия (36), (15) и

$$k_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (39)$$

то

$$\lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 = \sum_{i=1}^2 \rho_i \nu_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right|, \quad (40)$$

где

$$\nu_i = \exp\left\{[\omega_{0i} \times [\omega_{0i} \times \bar{v}_{0i}]]^2 \frac{\sigma_i^2}{(\omega_{0i}^2)^2}\right\}; \quad (41)$$

5) если выполнены условия (36), (37) и (19), то справедливо соотношение (34) при $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$ и $\mu_i(t, x)$ из (35);

6) если выполняются условия (36), (39) и (19), то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 &= \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| \kappa_i(t, x) + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \kappa_i(t, x) \varphi_i + \right. \\ &+ s_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx [\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)] \kappa_i(t, x) \varphi_i \left. \right\} |\omega_{0i} \times \bar{u}_i| + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i \sigma_i |(\bar{v}_{0i}, \omega_{0i}, \bar{u}_i)| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \kappa_i(t, x) \varphi_i, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\kappa_i(t, x) = \exp\left\{s_i^2 \left[\omega_{0i} \times \left(x - \bar{u}_i t - \frac{\sigma_i [\omega_{0i} \times \bar{v}_{0i}]}{s_i \omega_{0i}^2} \right) \right]^2 \right\}. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Однако из-за отсутствия условия (11) теперь сходимость всех интегралов обеспечивается за счет требований (31), а не (13). Величина Δ'_1 снова имеет вид (24), но функции $A_i(u, t, x)$ и $B_i(u, t, x)$ отличаются от (25), (26) тем, что в них вместо функций ψ_i фигурируют φ_i , а также появляются множители вида $e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}$, $i = 1, 2$. Каждый такой множитель с учетом (12) и структуры выражения r_i^2 (см. приложение А, формулы (60), (61)) приобретает вид

$$\exp \left\{ s_i^2 \left[\omega_{0i} \times \left(\frac{x - \bar{u}_i t}{\beta_i^{m_i-1/2}} - \frac{[\omega_{0i} \times \bar{v}_i]}{s_i \omega_{0i}^2} \beta_i^{1/2} \right) \right]^2 \right\}. \quad (44)$$

Обоснование возможности предельного перехода в величине Δ'_1 , таким образом, требует теперь, помимо аргументации из доказательства теоремы 1, еще и проверки существования предела у выражения (44). Остается убедиться, что (44) имеет конечные пределы при $\beta_i \rightarrow +\infty$, $i = 1, 2$, именно в предположениях 1–6 настоящей теоремы, причем в каждом из указанных случаев эти пределы равны либо единице (что приводит к соотношению (33)), либо (35), (41), (43) (тогда имеем (34), (40), (42), соответственно). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены предположения (11)–(13) и, кроме того,

$$\bar{v}_i - \bar{u}_i = \frac{\lambda_i}{\beta_i^{n_i}} (\bar{v}_{0i} - \bar{u}_{0i}), \quad n_i > 0, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (45)$$

а параметры $\bar{u}_{0i} \in \mathbb{R}^3$ также произвольны и фиксированы. Тогда справедливо неравенство (14), причем:

1) если

$$\frac{1}{4} < m_i < \frac{1}{2}, \quad m_i + n_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (46)$$

то существует конечный предел

$$\begin{aligned} N = \lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 \rho_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \rho_j \pi d^2 \psi_1 \psi_2 |\bar{u}_i - \bar{u}_j| \right| + 2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \psi_1 \psi_2; \end{aligned} \quad (47)$$

2) если

$$\frac{1}{4} < m_i < \frac{1}{2}, \quad m_i + n_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (48)$$

то

$$\lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 = N + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i \lambda_i |[\omega_{0i} \times (\bar{v}_{0i} - \bar{u}_{0i})]| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \psi_i; \quad (49)$$

3) если

$$m_i = \frac{1}{4}, \quad m_i + n_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (50)$$

то

$$\lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 = N + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i^2 |\omega_{0i}| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx |[\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)]| \psi_i; \quad (51)$$

4) если

$$m_i = n_i = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \quad (52)$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\beta_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2}} \Delta'_1 = N + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i \left\{ \lambda_i |[\omega_{0i} \times (\bar{v}_{0i} - \bar{u}_{0i})]| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \psi_i + \right. \\ \left. + s_i |\omega_{0i}| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx |[\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)]| \psi_i \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, с той лишь разницей, что в формулы (25), (26) следует подставить (45) с последующими изменениями в выражениях (27)–(30), соответствующими условиям (46), (48), (50), (52).

Теперь, опираясь на результаты теорем 1–3, мы можем получить некоторые условия, достаточные для стремления к нулю невязки (5).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены все предположения теоремы 1. Кроме того, пусть функции ψ_i , $i = 1, 2$, имеют вид финитных “плато” [9], [10], т.е. сглаженных специальным образом характеристических функций некоторых ограниченных областей в $\mathbb{R}^4$ (подробнее см. приложение Б) таких, что мера проекций их носителей на гиперплоскость $t = 0$ стремится к нулю и произведения величин $\bar{v}_i^k$ на меры проекций их носителей на гиперплоскости $x^k = 0$, $k = 1, 2, 3$, также стремятся к нулю. Пусть, кроме того, выполнено хотя бы одно из требований

$$d \rightarrow 0, \quad (54)$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \neq 0, \quad (55)$$

$$\text{mes}(\text{supp } \psi_1 \cap \text{supp } \psi_2) \rightarrow 0, \quad (56)$$

в частности

$$\text{supp } \psi_1 \cap \text{supp } \psi_2 = \emptyset. \quad (57)$$

Тогда

$$\Delta_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \beta_i \rightarrow +\infty, \quad i = 1, 2, \quad (58)$$

если верно либо (15), либо (16) и (17), либо (19) и (17) или

$$s_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \quad (59)$$

либо (21), (17) и (59).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на соотношения (14), (18), (20), (22) и результаты работы [9], причем легко убедиться в том, что для функций, удовлетворяющих условиям следствия, выполнены требования (13).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть все предположения теоремы 2 остаются в силе. Тогда справедливо (58) при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

- 1) верны условия (32) и (15), либо условия (32), (19) и (59), а функции φ_i , $i = 1, 2$, удовлетворяют тем же требованиям, что функции ψ_i , $i = 1, 2$, в следствии 1;
- 2) верны условия (36), (15) и либо (37), либо (39), а функции φ_i , $i = 1, 2$, суть финитные “плато”, мера проекций носителей которых на гиперплоскость $t = 0$ стремится к нулю;
- 3) верны условия (36), (19), (59) и либо (37), либо (39), а функции φ_i , $i = 1, 2$, такие же, как в условии 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на соотношения (33), (34), (38), (40), (42), результаты работы [9] и проверку того факта, что при выполнении любого из условий 1–3 настоящего следствия требования (31) также удовлетворяются (это обеспечивается финитностью функций φ_i). Кроме того, при оценке слагаемых, входящих в (34), (40) и (42), следует учесть, что ν_i , $i = 1, 2$, заданные формулой (41), постоянны, а функции $\mu_i(t, x)$ и $\kappa_i(t, x)$, $i = 1, 2$, как легко видеть из формул (35) и (43), ограничены на носителях функций φ_i , причем равномерно относительно s_i в окрестности нуля (см. (59)).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно было бы сформулировать и третье следствие, соответствующее теореме 3, однако, как легко видеть из (47), (49), (51) и (53), такой результат сводился бы, по существу, к частному случаю следствия 1 при $\bar{v}_i = \bar{u}_i$, $i = 1, 2$ (см. (45)), правда, при несколько ином поведении параметров, в соответствии с (46), (48), (50) либо (52).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно увеличить количество ситуаций, в которых выполняется асимптотика (58), рассматривая разное поведение параметров и функций при $i = 1$ и $i = 2$. Мы не будем здесь этого делать, ибо при каждом фиксированном значении i возможные свойства распределения полностью описаны в следствиях 1, 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Физический смысл полученных здесь результатов во многом аналогичен физическому смыслу распределений, подробно описанных в работе [10] для случая винтов. Общим свойством всех этих распределений является то, что они соответствуют неравномерно остывающему газу ($\beta_i \rightarrow +\infty$, $i = 1, 2$) при замедлении вращения потоков ($\omega_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2$). Требование (54) соответствует “околосвободномолекулярному” течению (газ, близкий к кнудсеновскому [1]). Требование (56) (или (57)) означает частичную или полную пространственно-временную стратификацию вихрей, а поведение финитных “плато”, о котором речь идет в следствиях 1, 2, диктует неполную пространственную размерность объектов (сгустков) в газе (детальная классификация возможных видов таких объектов размерностей 1, 2 и 3 приведена в работе [9]). Что касается условия (55), то его можно трактовать как “когерентность” вихрей в следующем смысле: их массовые скорости одинаковы в момент времени t на прямых, параллельных ω_1 и ω_2 и проходящих через точки с координатами $x = \bar{u}_1 t$ и $x = \bar{u}_2 t$, соответственно (иначе говоря, при $t = 0$ в начале координат вихри совпадают).

Однако существенным отличием вихрей от винтов является то, что теперь стационарные распределения в принципе невозможны из-за присутствия времени t в величинах (7), (8), (44) (формально это связано с невыполнимостью требований (13) или (31) в случае функций ψ_i либо φ_i , $i = 1, 2$, не зависящих от t). Это обстоятельство несколько уменьшает количество ситуаций по сравнению со случаем винтов, зато теперь мы имеем приближенное описание взаимодействующих вихреобразных потоков газа, оси которых не покоятся, а поступательно движутся с произвольными линейными скоростями.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для вывода формул (24)–(26) воспользуемся тем фактом, что

$$r_i^2 = \frac{1}{\omega_i^2} [\omega_i \times (x - x_{0i} - \bar{u}_i t)]^2, \quad (60)$$

где

$$x_{0i} = \frac{1}{\omega_i^2} [\omega_i \times \bar{v}_i]. \quad (61)$$

Поэтому из формул (7), (8) и известного равенства

$$\frac{\partial}{\partial x} ([a \times x]^2) = 2[[a \times x] \times a] \quad (62)$$

($a \in \mathbb{R}^3$ – произвольный постоянный вектор) нетрудно вычислить $D(f)$ и $Q(f, f)$, после

чего величина Δ'_1 из (24) приобретает вид

$$\begin{aligned} \Delta'_1 = & \pi^{-3/2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 \rho_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \times \\ & \times \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\omega_i \times (x - \bar{u}_i t)] \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right\} e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} - \right. \right. \\ & - 2\beta_i \varphi_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta_i}} (u, [\omega_i \times \bar{u}_i]) + (\bar{v}_i, [\omega_i \times \bar{u}_i]) + [\omega_i \times (x - \bar{u}_i t)] [\omega_i \times \bar{u}_i] \right\} + \\ & + \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} \frac{\rho_j d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} H_{ij}(u, t, x, w) \Big| e^{-u^2} du + \\ & \left. + \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} \frac{\rho_j d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} du \int_{\mathbb{R}^3} dw e^{-u^2 - w^2} H_{ij}(u, t, x, w) \right\}, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} H_{ij}(u, t, x, w) = & \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + [\omega_i \times (x - \bar{u}_i t)] - [\omega_j \times (x - \bar{u}_j t)] - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \\ & i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (64)$$

Подстановка функций (11) в соотношения (63), (64) после вычисления производных $\partial \varphi_i / \partial t$ и $\partial \varphi_i / \partial x$ и некоторых преобразований вновь с использованием формул (60)–(62) приводит к неравенству (24), где

$$A_i(u, t, x) = \psi_1 \psi_2 \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} H_{ij}(u, t, x, w), \quad (65)$$

$$\begin{aligned} B_i(u, t, x) = & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\omega_i \times (x - \bar{u}_i t)] \right) + \\ & + 2\psi_i \sqrt{\beta_i} \{ (u, [\omega_i \times (\bar{v}_i - \bar{u}_i)]) - [\omega_i \times (x - \bar{u}_i t)] [\omega_i \times u] \}. \end{aligned} \quad (66)$$

После подстановки (12) в (65), (66) с учетом (64) получим (25), (26).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Понятие финитного “плато” было введено в работе [9] и затем использовано в [10]. Для полноты изложения кратко приведем здесь некоторые факты из работы [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – такая ограниченная область в $\mathbb{R}^4$, что число компонент связности пересечения G с любой прямой, параллельной какой-либо из координатных осей, конечно. Для всякого $\delta > 0$ обозначим через G_δ множество точек из $\mathbb{R}^4$, отстоящих

от G не более чем на δ . Финитным “ δ -плато” над областью G называется такая функция $\varphi_\delta(G, t, x) \in C^1(\mathbb{R}^4)$, что

- 1) $0 \leq \varphi_\delta \leq 1$, $(t, x) \in \mathbb{R}^4$,
- 2) $\varphi_\delta = 1$, $(t, x) \in G$,
- 3) $\varphi_\delta = 0$, $(t, x) \in \mathbb{R}^4 \setminus G_\delta$,

и, кроме того, на любой прямой, параллельной одной из координатных осей, функция φ_δ имеет не более конечного числа строгих экстремумов.

В работе [9] показано, что если носители двух финитных “плато” удовлетворяют условиям следствия 1 настоящей работы, то L_1 -норма выражений типа

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x}$$

стремится к нулю. Вместе с остальными условиями следствия 1 этот факт, очевидно, обеспечивает его справедливость.

Список литературы

- [1] *К. Черчиньяни*. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [2] *Т. Карлеман*. Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИЛ, 1960.
- [3] *А. В. Бобылев*. ДАН СССР. 1975. Т. 225. № 6. С. 1296.
- [4] *А. В. Мищенко, Д. Я. Петрина*. ТМФ. 1988. Т. 77. № 1. С. 135.
- [5] *Н. М. Ernst*. J. Stat. Phys. 1984. V. 34. № 5/6. P. 1001.
- [6] *В. Д. Гордевский*. Матем. физ., анализ, геом. 1995. Т. 2. № 2. С. 168.
- [7] *В. Д. Гордевский*. Матем. физ., анализ, геом. 1997. Т. 4. № 1/2. С. 46.
- [8] *В. Д. Гордевский*. ТМФ. 1998. Т. 114. № 1. С. 126.
- [9] *V. D. Gordevsky*. Math. Meth. Appl. Sci. 1998. V. 21. P. 1479.
- [10] *V. D. Gordevsky*. Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mech. 2001. V. 514. P. 17.
- [11] *В. Д. Гордевский*. ТМФ. 2001. Т. 126. № 2. С. 283.

Поступила в редакцию 15.III.2002 г.,
после доработки 5.VIII.2002 г.