Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Соловьев, О двух классах обобщенных функций, используемых в нелокальной теории поля, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 2, 195–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:55:19

О ДВУХ КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Выясняется соотношение между двумя формулировками условия причинности в нелокальной квантовой теории поля: с использованием аналитических пробных функций из пространства S^0 (фурье-образа пространства Шварца $\mathcal{D}$) и из пространств Гельфанда–Шилова S_α^0 . Доказано, что заданный на S^0 функционал и его ограничения на более узкие пространства S_α^0 имеют одни и те же несущие конусы. В качестве приложения этого результата установлена теорема типа Пэли–Винера–Шварца для обобщенных функций умеренного роста с произвольно высокой сингулярностью и получено соответствующее расширение алгебры Владимирова голоморфных функций в трубчатой области.

Ключевые слова: нелокальные квантовые поля, причинность, вайтмановские функции, аналитические функционалы, оценки Хермандера, теоремы типа Пэли–Винера–Шварца.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из наиболее развитых направлений нелокальной квантовой теории поля (КТП) основано на интерпретации нелокальных полей как высокосингулярных операторно-значных обобщенных функций, требующих усреднения с аналитическими пробными функциями. На таком пути удастся распространить на нелокальные взаимодействия теорию рассеяния Хаага–Рюэля и теоремы о связи спина со статистикой и PCT -инвариантности, причем это оказывается возможным при сколь угодно сингулярном ультрафиолетовом поведении вакуумных средних [1]. Эффективен такой подход и при феноменологическом описании сильных взаимодействий [2]. В качестве пространств пробных функций при этом удобно использовать пространства типа S Гельфанда–Шилова [3]. Конкретный выбор пробных функций зависит от рассматриваемой модели, но при выводе общих теорем выделенную роль играют пространства S_α^0 , поскольку фурье-образы их элементов имеют компактные носители и на них определены поля с произвольным высокоэнергетическим поведением. Индекс α характеризует поведение функций из S_α^0 на бесконечности: согласно определению [3] они убывают не хуже, чем $\exp\{-|x/A|^{1/\alpha}\}$

*Физический институт им П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: soloviev@lpi.ru

с некоторым $A > 0$, и это пространство нетривиально только при $\alpha > 1$. Математическую основу возможности распространения результатов аксиоматического подхода [4], [5] на поля, заданные на S_α^0 , составляет их угловая локализуемость [6]. Именно, каждому (замкнутому) конусу направлений $K \subset \mathbb{R}^d$ можно сопоставить пространство $S_\alpha^0(K)$ так, чтобы $S_\alpha^0(\mathbb{R}^d) = S_\alpha^0$, отображение $K \rightarrow S_\alpha^0(K)$ было взаимно однозначным и соблюдались структурные соотношения

$$S_\alpha^0(K_1 \cap K_2) = S_\alpha^0(K_1) + S_\alpha^0(K_2), \quad S_\alpha^0(K_1 \cup K_2) = S_\alpha^0(K_1) \cap S_\alpha^0(K_2). \quad (1)$$

Из соотношений (1) вытекают двойственные соотношения для обобщенных функций, составляющих сопряженное пространство $S_\alpha^{\prime 0}$. Как следствие, каждый элемент $S_\alpha^{\prime 0}$ имеет однозначно определяемый минимальный замкнутый несущий конус. Естественной заменой аксиомы микропричинности для полей класса $S_\alpha^{\prime 0}$ с плотной инвариантной областью определения D в гильбертовом пространстве состояний служит условие непрерывности матричных элементов коммутатора или антикоммутатора

$$\langle \Phi, [\phi_\iota(x), \phi_{\iota'}(x')] \rangle_{(+)} = \Psi, \quad \Phi, \Psi \in D, \quad (2)$$

любых двух полевых компонент $\phi_\iota, \phi_{\iota'}$ по топологии пространства $S_\alpha^0(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K} = \{(x, x') \in \mathbb{R}^8: (x - x')^2 \geq 0\}$. Как показано в работе [1], это условие обеспечивает нормальную связь спина со статистикой и *PCT*-инвариантность нелокальной теории поля.

В ряде работ по нелокальной теории (см. работы [7], [8] и библиографию в них) в качестве пространства пробных функций используется S^0 , являющееся фурье-образом пространства Шварца $\mathcal{D}$ гладких функций с компактным носителем. Доводом в пользу такого выбора служит то, что в теории (как локальной, так и нелокальной) с положительной метрикой пространства состояний вакуумные средние ограничены по любой разности переменных, если другие остаются фиксированными (подробное обсуждение см. в книге [9], дополнение, раздел 2). Поэтому выбор пространства S^0 , которое является формальным пределом S_α^0 при $\alpha \rightarrow \infty$, хотя и несколько сужает рамки теории, кажется достаточным для реализации большинства моделей. В работе [10] показано, что и в этом случае можно естественным образом определить ассоциированные с конусами пространства $S^0(K)$, что приводит к альтернативной формулировке причинности как условия непрерывности матричных элементов (2) по топологии $S^0(\mathbb{K})$; там же обсуждается связь этого условия с конструкциями, предлагавшимися другими авторами.

Однако детальное выяснение соотношения между двумя указанными обобщениями локальной коммутативности до сих пор оставалось открытой проблемой. Дело в том, что топологическая структура пространств $S^0(K)$, которые строятся из банаховых посредством двух пределов (проективным и индуктивным), достаточно сложна: например, даже доказательство их полноты оказывается нетривиальной задачей. Напротив, пространства $S_\alpha^0(K)$ относятся к хорошо изученному классу пространств DFS [11] и обладают весьма удобными для приложений свойствами. В случае затруднений с функционалами и полями, заданными на S^0 , можно работать с их ограничениями на S_α^0 . Однако

при этом возникает вопрос: будут ли несущие конусы ограничений, определенные с помощью пробных функций из S_α^0 , теми же самыми, что и несущие конусы исходных функционалов? В разделе 3 данной статьи доказано, что ответ положителен. Отсюда и из формул (1) немедленно вытекает, что любой функционал из S'^0 имеет наименьший несущий конус. Другим следствием этого результата является обобщение на функционалы класса S'^0 важной для КТП теоремы Пэли–Винера–Шварца, полученное в разделе 5. Прямой вывод этой теоремы по аналогии с тем, как это сделано в работе [12] для $S_\alpha'^0$, значительно более сложен. В разделе 2 приводятся необходимые предварительные сведения. Мы не останавливаемся на мотивации используемых определений, поскольку она подробно излагается в работах [6], [10]. Основным средством, применяемым ниже для вывода теоремы о носителях ограничений, служат L^2 -оценки Хермандера [13] для решений системы неоднородных уравнений Коши–Римана. Раздел 4 посвящен адаптации этой техники к нашей задаче, которая необходима по той причине, что весовые функции, определяющие нормы в оценках Хермандера, представляются экспонентами плюрисубгармонических функций, в то время как индикаторные функции, задающие пространства $S^0(K)$ и $S_\alpha^0(K)$, таковыми не являются. Относительно используемых ниже фактов из теории плюрисубгармонических функций и двойственности выпуклых конусов мы отсылаем читателя к монографии Владимирова [14]. В разделе 6 основная теорема статьи распространяется на более общие пространства S_a^0 . Раздел 7 содержит заключительные замечания.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть U – открытый конус в $\mathbb{R}^d$. Пространство $S^{0,b}(U)$ является пересечением (проективным пределом) гильбертовых пространств $H_N^{0,B}(U)$, $B > b$, $N = 0, 1, 2, \dots$, состоящих из целых функций на $\mathbb{C}^d$ и снабженных скалярными произведениями

$$\langle f, g \rangle_{U,B,N} = \int \overline{f(z)} g(z) (1 + |x|)^{2N} e^{-2B\delta_U(x) - 2B|y|} dx dy, \quad z = x + iy, \quad (3)$$

где $\delta_U(x)$ – расстояние от x до U . Его можно определить и как пересечение банаховых пространств $E_N^{0,B}(U)$ целых функций с нормами

$$\|f\|_{U,B,N} = \sup_{z \in \mathbb{C}^d} |f(z)| (1 + |x|)^N e^{-B\delta_U(x) - B|y|}. \quad (4)$$

Эквивалентность системы норм (4) системе, определяемой скалярными произведениями (3), легко устанавливается с помощью интегральной теоремы Коши по той же схеме, что и для пространств $S_\alpha^\beta(U)$ в работе [6]. Пространство $S^0(U)$ есть объединение (индуктивный предел) пространств $S^{0,b}(U)$, $b \rightarrow \infty$. Если K – замкнутый конус, то $S^0(K)$ определяется как индуктивный предел пространств $S^0(U)$ по открытым конусам U , в

которых K компактен, что обозначается посредством $K \Subset U^1$). Все эти пространства непрерывно вложены в пространство аналитических функций экспоненциального типа $S^0(\{0\})$, соответствующее вырожденному замкнутому конусу, состоящему из одной точки — начала координат (можно и даже удобно считать, что оно же соответствует пустому открытому конусу). Пространства $S^{0,b}(U)$ принадлежат классу FN ядерных пространств Фреше, что существенно для приложений к КТП и устанавливается с помощью аргументации, использованной в работе [12] при выводе теоремы 2. Как следствие, они входят также в класс FS Фреше–Шварца, являются монтелевскими и рефлексивными. Пространства $S^0(U)$ и $S^0(K)$, будучи их счетными индуктивными пределами, наследуют ядерность (см. [15], § II.7.4) и очевидно отделимы. Пространства $S^0(U)$ полны, что удастся доказать [16] с использованием ацикличности инъективной последовательности $S^{0,\nu}(U)$, $\nu = 1, 2, \dots$. Отсюда (в сочетании с ядерностью и бочечностью) следует их монтелевость и рефлексивность (см. [15], гл. IV, упр. 19). Вопрос о наличии этих свойств у $S^0(K)$ остается нерешенным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство $S_\alpha^0(U)$, где $\alpha > 1$ и U — открытый конус в $\mathbb{R}^d$, является индуктивным пределом гильбертовых пространств $H_{\alpha,A}^{0,B}(U)$, $A > 0$, $B > 0$, состоящих из целых функций на $\mathbb{C}^d$ и снабженных скалярными произведениями

$$\langle f, g \rangle_{U,A,B} = \int \overline{f(z)} g(z) e^{2(|x/A|^{1/\alpha} - B\delta_U(x) - B|y|)} dx dy. \quad (5)$$

Этот индуктивный предел совпадает (см. [6]) с пределом банаховых пространств $E_{\alpha,A}^{0,B}(U)$ целых функций с нормами

$$\|f\|_{U,B,A} = \sup_{z \in \mathbb{C}^d} |f(z)| e^{|x/A|^{1/\alpha} - B\delta_U(x) - B|y|}. \quad (6)$$

Пространство $S_\alpha^0(K)$, где K — замкнутый конус, определяется как индуктивный предел пространств $S_\alpha^0(U)$, $U \ni K$. Все пространства $S_\alpha^0(U)$, $S_\alpha^0(K)$ непрерывно вложены в $S_\alpha^0(\{0\})$, очевидно совпадающее с $S^0(\{0\})$. Как показано в работе [12], они относятся к классам DFS и даже DFN (этими аббревиатурами обозначают пространства, сильно сопряженные к пространствам Фреше–Шварца и к ядерным пространствам Фреше, соответственно). Тем более они являются монтелевскими и рефлексивными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Замкнутый конус $K \subset \mathbb{R}^d$ называется несущим для функционала $v \in S'^0(\mathbb{R}^d)$ ($S_\alpha'^0(\mathbb{R}^d)$), если v допускает непрерывное продолжение на пространство $S^0(K)$ ($S_\alpha^0(K)$).

Такое продолжение, когда оно существует, единственно ввиду установленной в работе [12] плотности S_α^0 в $S_\alpha^0(K)$ и вытекающей из нее (см. [10]) плотности S^0 в $S^0(K)$. Поэтому подпространство функционалов с несущим конусом K алгебраически отождествимо с $S'^0(K)$ ($S_\alpha'^0(K)$).

Далее будет полезна следующая элементарная лемма.

¹⁾ Для пары произвольных конусов V_1, V_2 включение $V_1 \Subset V_2$ означает, что $\overline{V_1} \setminus \{0\} \subset V_2$, где $\overline{V_1}$ — замыкание V_1 .

ЛЕММА 1. Пусть E – векторное пространство и L_0, L_1, L_2 – его подпространства, наделенные локально-выпуклыми топологиями и такие, что $L_0 \subset L_1 \cap L_2$. Снабдим $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$ индуктивной и проективной топологиями, соответственно. Если L_0 плотно в каждом из пространств $L_1, L_2, L_1 \cap L_2$ и инъекции $L_0 \rightarrow L_1, L_0 \rightarrow L_2$ непрерывны, то

$$(L_1 + L_2)' = L_1' \cap L_2',$$

где дуальные пространства рассматриваются как векторные подпространства L_0' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что L_0 плотно в $L_1 + L_2$, если оно плотно в L_1 и L_2 , поэтому естественные отображения $(L_1 + L_2)' \rightarrow L_0'$ инъективны наряду с $L_1' \rightarrow L_0'$ и $L_2' \rightarrow L_0'$. Ясно, что $(L_1 + L_2)' \subset L_1' \cap L_2'$ и надо продемонстрировать лишь обратное включение. Пусть $v \in L_1' \cap L_2'$ и v_1, v_2 – непрерывные продолжения v на L_1, L_2 . Поскольку проективная топология на $L_1 \cap L_2$ есть верхняя грань топологий, индуцируемых из L_1 и L_2 , функционалы v_1 и v_2 непрерывны на $L_1 \cap L_2$ и совпадают на этом подпространстве ввиду условия плотности. Таким образом, формула $\hat{v}(f_1 + f_2) = v_1(f_1) + v_2(f_2)$ определяет линейное продолжение v на $L_1 + L_2$, которое непрерывно по определению индуктивной топологии.

3. ТЕОРЕМА О СУЖЕНИИ ФУНКЦИОНАЛА

ТЕОРЕМА 1. Пусть $v \in S'^0$ и $\alpha > 1$. Если замкнутый конус K служит несущим для ограничения $v|_{S_\alpha^0}$, то он является несущим и для v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение вместе с очевидным обратным можно выразить соотношением

$$S'^0 \cap S_\alpha'^0(K) = S'^0(K), \quad (7)$$

где все пространства рассматриваются как векторные подпространства $S_\alpha'^0$, что возможно ввиду очевидной плотности S_α^0 в S^0 и отмеченной выше плотности S_α^0 в $S_\alpha^0(K)$ и в $S^0(K)$. Для $K = \{0\}$ равенство (7) соблюдается по определению, и далее мы считаем конус K нетривиальным. Начнем с вывода двойственной формулы

$$S^0(K) = S^0 + S_\alpha^0(K), \quad (8)$$

а затем применим лемму 1. Пусть $f \in S^{0,b}(U)$, $U \ni K$. Учитывая инвариантность участвующих пространств относительно дилатаций, можно без ограничения общности считать, что $b < 1$. Далее в этом и двух следующих разделах мы используем евклидову норму в $\mathbb{R}^d$, обозначая ее $|\cdot|$. Возьмем неотрицательную функцию $\chi_0 \in C_0^\infty$ с носителем в шаре $B_\epsilon = \{x: |x| < \epsilon\}$ и такую, что $\int \chi_0(x) dx = 1$, и положим

$$\chi(x) = \int_U \chi_0(x - \xi) d\xi.$$

Выполним разложение

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(z) = f(z)\chi(x), \quad f_2(z) = f(z)(1 - \chi(x)).$$

Функции f_1 и f_2 неаналитичны, но обладают на бесконечности поведением, требуемым от элементов S^0 и $S_\alpha^0(K)$. В самом деле, при любом N мы имеем

$$|f_1(z)| \leq \|f\|_{U,1,N} (1 + |x|)^{-N} e^{\epsilon + |y|}, \quad (9)$$

поскольку $\delta_U(x) \leq \epsilon$ при $x \in \text{supp } \chi$. Далее, пусть V — открытый конус, выбранный таким образом, чтобы $K \Subset V \Subset U$. Тогда найдется константа $\gamma > 0$ такая, что $\delta_V(x) \geq \gamma|x|$ для всех точек $\text{supp}(1 - \chi)$ за исключением компактного подмножества. Для этих точек мы имеем $\delta_U(x) \leq \delta_V(x) \leq 2\delta_V(x) - \gamma|x|$. Следовательно,

$$|f_2(z)| \leq C\|f\|_{U,1,N} e^{-\gamma|x| + 2\delta_V(x) + |y|}. \quad (10)$$

Чтобы получить аналитическое разложение, запишем

$$f = f'_1 + f'_2, \quad f'_1 = f_1 - \psi, \quad f'_2 = f_2 + \psi$$

и подчиним ψ уравнениям

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_j} = \eta_j, \quad (11)$$

где

$$\eta_j \stackrel{\text{def}}{=} f \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} f \frac{\partial \chi}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Функции $\eta_j(z)$ отличны от нуля только при $x \in \partial U + B_\epsilon$, где ∂U — граница U , и удовлетворяют оценке

$$|\eta_j(z)| \leq C_{j,N} (1 + |x|)^{-N} e^{|y|} \quad (12)$$

при любом N . Остается доказать, что существует решение системы уравнений (11) с должным поведением на бесконечности. Мы охарактеризуем это поведение плюрисубгармонической функцией, что позволит применить теорему существования Хермандера [13].

ЛЕММА 2. Пусть U' , U — открытые конусы в $\mathbb{R}^d$ такие, что $U' \Subset U$, и пусть $\alpha > 1$. Для любого набора функций η_j , $j = 1, \dots, d$, удовлетворяющих оценке (12) и имеющих носители в ϵ -окрестности границы конуса U , найдется такая плюрисубгармоническая функция $\rho(z)$ со значениями в $(-\infty, +\infty)$, что при любых $B > \sqrt{d}$ и $N = 0, 1, 2, \dots$ соблюдаются следующие неравенства:

$$\rho(z) \geq \max_j \ln |\eta_j(z)| \quad \text{при } x \in \partial U + B_\epsilon, \quad (13)$$

$$\rho(z) \leq -N \ln(1 + |x|) + B|y| + C_{B,N} \quad \text{всюду}, \quad (14)$$

$$\rho(z) \leq -|x|^{1/\alpha} + B|y| + C_B \quad \text{при } x \in U', \quad (15)$$

где $C_{B,N}$, C_B — константы.

Доказательство леммы 2 изложим в следующем разделе, а сейчас продолжим вывод формулы (7). Выберем конус U' так, чтобы $V \subseteq U' \subseteq U$, и положим $\varrho(z) = 2\rho(z) + (d+1)\ln(1+|z|^2)$, где ρ определяется леммой 2. В силу неравенства (13) функции η_j принадлежат $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-\varrho} d\lambda)$, где $d\lambda = dx dy$ — лебегова мера на $\mathbb{C}^d$. По определению функций n_j выполнены условия совместности

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial \eta_k}{\partial \bar{z}_j} \quad (16)$$

и согласно теореме 15.1.2 из монографии [13] система уравнений (11) имеет решение ψ такое, что

$$2 \int |\psi|^2 e^{-\varrho} (1 + |z|^2)^{-2} d\lambda \leq \int |\eta|^2 e^{-\varrho} d\lambda. \quad (17)$$

Отсюда следует, что

$$\psi \in L^2(\mathbb{C}^d, (1 + |x|)^{2(N-d-3)} e^{-2B'|y|} d\lambda), \quad \psi \in L^2(\mathbb{C}^d, e^{2(|x/A|^{1/\alpha} - \delta_V(x) - B'|y|)} d\lambda)$$

при любых N , $A > 1$ и $B' > B$. Первая принадлежность обеспечивается неравенством (14), а вторая следует из неравенства (15), поскольку при $x \notin U'$ мы имеем $\delta_V(x) \geq \gamma'|x|$ с некоторым $\gamma' > 0$ и, очевидно, $2(|x/A|^{1/\alpha} - \delta_V(x) - B'|y|) \leq -\varrho(z) - 2\ln(1+|z|^2)$ опять-таки в силу (14). Вспоминая оценки (9), (10) и определения (3), (5), мы видим, что аналитические функции f'_1 и f'_2 принадлежат соответственно пространствам S^0 и $S^0_\alpha(V)$. Тем самым соотношение (8) доказано.

ЛЕММА 3. S^0_α плотно в пересечении $S^0 \cap S^0_\alpha(K)$, снабженном проективной топологией.

Действительно, аппроксимирующую последовательность для $f \in S^0 \cap S^0_\alpha(K)$ легко построить, полагая $f_\nu = \sigma_\nu f$, где $\sigma_\nu(z)$ — последовательность римановых сумм для интеграла $\int \sigma_0(z - \xi) d\xi$ и σ_0 — функция из S^0_α с равным единице интегралом. Последовательность $f_\nu \in S^0_\alpha$ ограничена в каждом из пространств S^0 и $S^0_\alpha(K)$ и сходится к f равномерно на компактных множествах $\mathbb{C}^d$ по теореме Витали–Монтеля. Значит, согласно стандартной аргументации (см. [3], § II.2.1) $f_\nu \rightarrow f$ по топологии этих пространств.

Теперь воспользуемся леммой 1, учитывая при этом, что индуктивная топология $\mathcal{T}$ на $S^0(K)$ относительно отображений $S^0 \rightarrow S^0(K)$, $S^0_\alpha(K) \rightarrow S^0(K)$ совпадает с собственной топологией τ этого пространства в силу теоремы об открытом отображении в форме Гротендика [17] (см. также приложение 1 Райкова к монографии [18]). Действительно, τ не сильнее топологии $\mathcal{T}$ просто по определению последней, и теорема Гротендика применима, поскольку пространство $(S^0(K), \tau)$, являясь отделимым индуктивным пределом пространств Фреше, принадлежит классу (β) (пространства этого класса

называют также ультраборнологическими), а $(S^0(K), T)$ входит в класс $\mathcal{UF}$, т.е. покрывается счетным семейством своих подпространств Фреше²⁾. Последнее вытекает из принадлежности классу $\mathcal{UF}$ каждого из пространств S^0 , $S_\alpha^0(K)$ и из представления T как фактортопологии внешней суммы $S^0 \oplus S_\alpha^0(K)$ по замкнутому подпространству (см. предложение 28, гл. V в монографии [18] и лемму 6 в приложении 1 там же). Этим доказательство теоремы 1 завершается.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо соотношение*

$$S'^0(K_1 \cap K_2) = S'^0(K_1) \cap S'^0(K_2), \quad (18)$$

где K_1, K_2 — любая пара замкнутых конусов в $\mathbb{R}^d$. Среди замкнутых несущих конусов каждого элемента S'^0 имеется наименьший.

Ввиду теоремы 1 формула (18) немедленно вытекает из установленной в работе [6] аналогичной формулы для пространств $S'_\alpha(K)$, которая, в свою очередь, есть следствие формул (1) и при выводе которой существенным образом используется принадлежность этих пространств классу FS. Существование наименьшего несущего конуса у $v \in S'^0$ также прямо следует из его существования у ограничения $v|_{S_\alpha^0}$, как и из формулы (18) по обычным соображениям компактности.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНДИКАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИМИ

Возможность описания топологии пространств, используемых в теории преобразования Фурье—Лапласа, с помощью плюрисубгармонических функций подробно обсуждается в монографии [13] (см. § 15.2). В нашем случае, где возникает другой класс пространств, этот вопрос требует отдельного рассмотрения. Излагаемая ниже конструкция, опирающаяся на использование аналитической пробной функции со специальными свойствами и систематическое построение верхних огибающих семейств плюрисубгармонических функций, носит довольно общий характер и может использоваться также в других задачах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть e — единичный вектор в $\mathbb{R}^d$ и $\theta > 0$. Обозначим через R_e луч $\{\lambda e: \lambda \geq 0\}$ и через $K_{e,\theta}$ круговой конус $\{\lambda x: |x - e| \leq \theta, \lambda \geq 0\}$. Предположим, что θ меньше углового расстояния между конусами U, U' . Достаточно доказать, что для каждого e найдется плюрисубгармоническая функция $\rho_e(z)$, удовлетворяющая ограничению (14) (с константой, не зависящей от e), а также оценкам вида (13) и (15), но для $x \in R_e + B_\epsilon$ и для $x \notin K_{e,\theta}$, соответственно. Тогда верхняя огибающая

$$\rho(z) = \overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \sup\{\rho_e(z'): e \in \partial U, |e| = 1\} \quad (19)$$

²⁾Так называют векторные подпространства отделимого локально-выпуклого пространства E , которые можно снабдить топологией, превращающей их в полные метризуемые локально-выпуклые пространства и мажорирующей топологию, индуцированную из E .

удовлетворяет всем требуемым условиям, поскольку $U' \subset \mathbb{C}K_{e,\theta}$ при любом $e \in \partial U$. Подчеркнем, что согласно монографии [14] (см. § 10.3) функция (19) будет плюрисубгармонической, поскольку семейство $\{\rho_e\}$ локально равномерно ограничено сверху. Пространство $S_0^\alpha(\mathbb{R})$, которое является фурье-образом $S_\alpha^0(\mathbb{R})$, содержит неотрицательную четную функцию ω такую, что $\text{supp } \omega \subset [-\delta, \delta]$, $\int \omega(t) dt = 1$ и $|\omega^{(\nu)}(t)| \leq C_0 A_0^\nu \nu^{\alpha\nu}$, где A_0 и δ могут быть взяты сколь угодно малыми (см. [3], § IV.8.3). Пусть Ω – свертка ω с характеристической функцией сегмента $|t| \leq 1 + \delta$, и пусть $1 + 2\delta < \pi/3$. Тогда $\cos(\xi t) > 1/2$ при $|\xi| < 1$ и $t \in \text{supp } \Omega$. Оценим преобразование Лапласа $\tilde{\Omega}(\zeta)$ функции Ω в полосе $|\text{Re } \zeta| < 1$. Учитывая, что $\int \Omega(t) dt = 2(1 + \delta)$, получаем

$$\begin{aligned} |\tilde{\Omega}(\zeta)| &\geq \text{Re} \int e^{it\zeta} \Omega(t) dt \geq \frac{1}{2} \int_{|t|>1} e^{-t \text{Im } \zeta} \Omega(t) dt \geq \\ &\geq \frac{1}{2} e^{|\text{Im } \zeta|} \int_{t>1} \Omega(t) dt = \frac{\delta}{2} e^{|\text{Im } \zeta|}. \end{aligned} \quad (20)$$

Поэтому субгармоническая функция $\rho_0(\zeta) = \ln(2|\tilde{\Omega}(\zeta)|/\delta)$ в этой полосе не меньше, чем $|\text{Im } \zeta|$. Согласно книге [3] имеем $\tilde{\Omega} \in E_{\alpha,A}^{0,1+2\delta}$, где A пропорционально A_0 и, значит,

$$\rho_0(\zeta) \leq -\left| \frac{\text{Re } \zeta}{A} \right|^{1/\alpha} + (1 + 2\delta)|\text{Im } \zeta| + \text{Const}. \quad (21)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H(r) = \sup_y \sup_{|x|=r} \max_j \{ \ln |\eta_j(x, y)| - |y| \}. \quad (22)$$

Из оценки (12) следует, что

$$H(r) \leq C'_N - N \ln(1 + r). \quad (23)$$

Теперь мы подготовлены к построению функций ρ_e . Будем вначале считать e первым базисным ортом и определим ρ_1 как верхнюю огибающую семейства

$$\rho_0(z_1 - r) + \sum_{j>1} \rho_0(z_j) + H(r), \quad r \geq 0.$$

Поскольку $H(r) \not\equiv -\infty$, $\rho(z) > -\infty$ всюду. Если $x = \text{Re } z$ лежит в ϵ -окрестности точки λe , то $|x_1 - |x|| \leq |x_1 - \lambda| + |\lambda - |x|| < 2\epsilon$ и $|x_j| < \epsilon$ при всех $j > 1$. Далее, считаем $\epsilon < 1/2$. Тогда по нашему построению

$$\rho_1(z) \geq \sum_j |y_j| + H(|x|) \geq |y| + H(|x|) \geq \max_j \ln |\eta_j(x, y)|,$$

т.е. требуемое ограничение снизу выполнено. Используя неравенства (21), (23) и элементарные неравенства $|x_j/A|^{1/\alpha} \geq N \ln(1 + |x_j|) - C_{N,A}$, $|x_1| \leq |x_1 - r| + r$ и $\sum |y_j| \leq$

$\sqrt{d}|y|$, заключаем, что ρ_1 удовлетворяет неравенству (14), если δ достаточно мало. Наконец, если $x \notin \pm K_{e,\theta}$, то $\sum_{j>1} |x_j|^{1/\alpha} \geq |\theta'x|^{1/\alpha}$ с некоторым $\theta' > 0$, и если $x \in -K_{e,\theta}$, то $|x_1 - r| \geq |x_1|$. Следовательно, при достаточно малых δ и A_0 последнее требуемое ограничение на ρ_1 также выполнено. Пусть теперь e – произвольный единичный вектор на границе конуса U и пусть T_e – ортогональное преобразование, переводящее его в первый координатный орт. Функция $\rho_e(z) = \rho_1(T_e z)$ плюрисубгармонична и также удовлетворяет всем требуемым ограничениям, поскольку правые части неравенств (14), (15) инвариантны относительно вращений, как и функция $|y| + H(|x|)$, мажорирующая $\max_j \ln |\eta_j(x, y)|$. Тем самым лемма 2 доказана.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ–ЛАПЛАСА ФУНКЦИОНАЛОВ КЛАССА S'^0

Применением теоремы 1 в сочетании с теоремой типа Пэли–Винера–Шварца для функционалов класса $S'_\alpha{}^0$, доказанной в работе [12], легко устанавливается следующее.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть V – открытый связный конус в $\mathbb{R}^d$ и $\alpha > 1$. Предположим, что функция $\mathbf{u}(\zeta)$ аналитична в трубчатой области $T^V = \mathbb{R}^d + iV$ и такова, что при любых $\varepsilon, R > 0$ и любом конусе $W \Subset V$ соблюдается неравенство

$$|\mathbf{u}(\zeta)| \leq C_{\varepsilon,R}(W) \exp\{\varepsilon |\operatorname{Im} \zeta|^{-1/(\alpha-1)}\}, \quad \operatorname{Im} \zeta \in W, \quad |\zeta| \leq R. \quad (24)$$

Если граничное значение функции $\mathbf{u}$ является распределением Шварца (т.е. принадлежит $\mathcal{D}'$), то она удовлетворяет более сильному ограничению

$$|\mathbf{u}(\zeta)| \leq C_R(W) |\operatorname{Im} \zeta|^{-N_{R,W}}, \quad \operatorname{Im} \zeta \in W, \quad |\zeta| \leq R. \quad (25)$$

Действительно, как показано в работе [12], каждая аналитическая в T^V функция со свойством (24) является преобразованием Лапласа некоторого функционала $v \in S'_\alpha{}^0(V^*)$, где $V^* = \{x: x\eta \geq 0 \ \forall \eta \in V\}$ – дуальный V конус³⁾, и ее граничное значение есть фурье-образ v . Поскольку преобразование Фурье изоморфно отображает S^0 на $\mathcal{D}$ (см. [3], § III.2), применение теоремы 1 немедленно дает, что $v \in S'^0(V^*)$. Теперь ограничение (25) устанавливается элементарной оценкой

$$|\mathbf{u}(\zeta)| = |(v, e^{iz\zeta})| \leq \|v\|_{U,B,N} \|e^{iz\zeta}\|_{U,B,N}$$

по нормам (4). Здесь B сколь угодно велико, U – любой открытый конус, в котором V^* компактен, и N зависит, вообще говоря, от B, U . Конус U и еще один вспомогательный конус U' следует выбрать так, чтобы $V^* \Subset U \Subset U' \Subset \operatorname{Int} W^*$ (здесь $\operatorname{Int} W^*$ – внутренность W^*). Это возможно, поскольку $W \Subset V$ влечет $V^* \Subset \operatorname{Int} W^*$. Полагая $\zeta = \xi + i\eta$, имеем

$$\|e^{iz\zeta}\|_{U,B,N} = \sup_{x,y} \exp\{-x\eta - y\xi + N \ln(1 + |x|) - B\delta_U(x) - B|y|\}. \quad (26)$$

³⁾ Отметим, что этот конус является замкнутым, выпуклым и, поскольку V открыт, острым.

Считая, что $|\xi| \leq R < B$, можно опустить члены, зависящие от y . Если $x \notin U'$, то $\delta_U(x) > \theta|x|$ с некоторым $\theta > 0$, и при $|\eta| \leq R < \theta B$ выражение в экспоненте мажорируется константой. Наконец, пусть $x \in U'$. Из включения $U' \in \text{Int } W^*$ следует, что найдется $\theta' > 0$ такое, что $x\eta \geq \theta'|x||\eta|$ при всех $x \in U'$, $\eta \in W$. Вставляя это неравенство в (26), опуская член $\delta_U(x)$ и вычисляя экстремум, мы приходим к ограничению (25) с константой $C_R(W)$, пропорциональной $\|v\|_{U,B,N}$.

Еще одним следствием того же сочетания теоремы 1 с теоремой 4 из работы [12] является теорема типа Пэли–Винера–Шварца для обобщенных функций класса S'^0 . Обозначим через $\mathcal{A}_0(V)$ пространство функций, аналитических в T^V и удовлетворяющих оценке (25) при любых $W \in V$ и $R > 0$. Оно очевидно является алгеброй относительно операции умножения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть V – открытый связный конус в $\mathbb{R}^d$ и V^* – дуальный ему. Преобразование Лапласа $v \rightarrow (v, e^{iz\zeta})$ устанавливает изоморфизм между пространством $S'^0(V^*)$ и алгеброй $\mathcal{A}_0(V)$. Как следствие, элементы S'^0 с заданным острым замкнутым выпуклым несущим конусом образуют сверточную алгебру. При $\text{Im } \zeta \rightarrow 0$ внутри фиксированного конуса $W \in V$ функция $\mathbf{u}(\zeta)$ из $\mathcal{A}_0(V)$, являющаяся преобразованием Лапласа функционала $v \in S'^0(K)$, стремится к его фурье-образу $\tilde{v}$ по топологии $\mathcal{D}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы только что видели, что любой функционал из $S'^0(V^*)$ имеет преобразование Лапласа, определенное в T^V и удовлетворяющее ограничению (25). Его аналитичность в этой области гарантируется теоремой 4 из работы [12], примененной к ограничению функционала на S_α^0 . Как уже говорилось, по той же теореме каждая аналитическая в T^V функция со свойством (24), и тем более $\mathbf{u} \in \mathcal{A}_0(V)$, является преобразованием Лапласа некоторого $v \in S_\alpha'^0(V^*)$, и $\int \mathbf{u}(\xi + i\eta)f(\xi) d\xi \rightarrow (\tilde{v}, f)$ при $W \ni \eta \rightarrow 0$ для любой $f \in S_0^\alpha$. С другой стороны, хорошо известно, что всякая аналитическая в T^V функция со свойством (25) имеет граничное значение, принадлежащее $\mathcal{D}'$, из равенства нулю которого следует ее равенство нулю (см. теорему 3.1.15 в монографии [19]). Поэтому v принадлежит S'^0 , а согласно теореме 1 и пространству $S'^0(V^*)$. Таким образом, преобразование Лапласа отображает $S'^0(V^*)$ на $\mathcal{A}_0(V)$ сюръективно и инъективно. Слабая сходимость $\mathbf{u}(\xi + i\eta) \rightarrow \tilde{v}$ на элементах $\mathcal{D}$ влечет сходимость в сильной топологии $\mathcal{D}'$ ввиду монтелевости этого пространства. Теорема 4 из работы [12] показывает также, что $S_\alpha'^0(V^*)$ является сверточной алгеброй, и свертке $v_1 * v_2$ двух ее элементов соответствует произведение $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$ их преобразований Лапласа. Если $v_1, v_2 \in S'^0(V^*)$, то $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \in \mathcal{A}_0(V)$ и, значит, $v_1 * v_2 \in S'^0(V^*)$. Таким образом, и $S'^0(V^*)$ является сверточной алгеброй. Отметим, что произвольный острый выпуклый замкнутый конус $K \subset \mathbb{R}^d$ дуален внутренности конуса K^* . Теорема 2 доказана. Отметим еще, что из теоремы 2 и соотношения $V^* = (\text{ch } V)^*$, где ch обозначает выпуклую оболочку, следует равенство $\mathcal{A}_0(V) = \mathcal{A}_0(\text{ch } V)$.

Алгебра $\mathcal{A}_0(V)$ обобщает алгебру Владимирова [14], [20], образуемую преобразованиями Лапласа распределений умеренного роста с носителями в выпуклом замкну-

том остром конусе, на случай аналитических функционалов произвольно высокой сингулярности, что соответствует произвольному росту преобразования Лапласа на бесконечности. Алгебра $\mathcal{A}_0(V)$ становится топологической при наделении ее топологией проективного предела семейства пространств $A_{0,r}(W)$, $r > 0$, $W \in V$, определяемых, в свою очередь, как индуктивные пределы банаховых пространств $A_{0,R,N}(U)$, $R > r$, $N = 0, 1, 2, \dots$, $U \ni W$, состоящих из функций, аналитических в области $T_R^U = \{\zeta \in \mathbb{C}^d: |\zeta| < R, \operatorname{Im} \zeta \in U\}$, где U – открытый конус, и обладающих конечной нормой

$$\|u\|_{U,R,N} = \sup_{\zeta \in T_R^U} |\operatorname{Im} \zeta|^N |u(\zeta)|. \quad (27)$$

Пространства $A_{0,r}(W)$ принадлежат классу DFS, поскольку канонические вложения $A_{0,R',N'}(U') \rightarrow A_{0,R,N}(U)$, $R' > R$, $N' < N$, $U' \ni U$, компактны, т.е. образ единичного шара пространства $A_{0,R',N'}(U')$ относительно компактен в $A_{0,R,N}(U)$. Действительно, по теореме Монтеля из любого бесконечного подмножества этого образа можно выделить последовательность u_ν , равномерно сходящуюся к некоторой аналитической функции u на любом компакте в $T_{R'}^{U'}$. В частности, для любого $\epsilon > 0$ при достаточно больших ν имеем

$$\sup_{\zeta \in \overline{T_R^U}, |\operatorname{Im} \zeta| \geq \epsilon} |\operatorname{Im} \zeta|^N |u - u_\nu| \leq \epsilon.$$

С другой стороны, $\|u\|_{U',R',N'} \leq 1$ и, значит,

$$\sup_{\zeta \in T_R^U, |\operatorname{Im} \zeta| \leq \epsilon} |\operatorname{Im} \zeta|^N |u - u_\nu| \leq \epsilon \|u - u_\nu\|_{U',R',N'} \leq 2\epsilon.$$

Таким образом, $u_\nu \rightarrow u$ по норме $\|\cdot\|_{U,R,N}$. Преобразование Лапласа $S'^0(V^*) \rightarrow \mathcal{A}_0(V)$ непрерывно при наделении пространства $S'^0(V^*)$ сильной топологией. Более того, оно непрерывно при наделении его топологией проективного предела семейства DFS пространств $S'^0,b(U)$, $b > 0$, $U \ni V^*$. Это вытекает из того, что константу $C_R(W)$ в ограничении (25) можно считать пропорциональной $\|v\|_{U,B,N}$, как было показано выше. Отметим, что топология проективного предела согласована с двойственностью пространств $S^0(V^*)$, $S'^0(V^*)$ (см. [15], § IV.4.5).

В простейшем, но важном случае, когда конусом V служит полуось $\mathbb{R}_+$, а $V^* = \overline{\mathbb{R}_+}$, пространство $S'^0(\overline{\mathbb{R}_+})$ совпадает с $S'^0(\mathbb{R}_+)$ и можно утверждать, что его сильная топология тождественна указанной топологии проективного предела ввиду регулярности инъективной последовательности пространств $S^{0,\nu}(\mathbb{R}_+)$. Это свойство, которое означает, что всякое ограниченное множество $S^0(\mathbb{R}_+)$ содержится и ограничено в некотором $S^{0,\nu}(\mathbb{R}_+)$, обеспечивается, в свою очередь, ациклическостью последовательности (см. [21]). Можно также утверждать, что сильная топология ультраборнологична и снабженное ею $S'^0(\mathbb{R}_+)$ есть пространство класса $\mathcal{PUF}$. Последнее выводится из полноты $S^0(\mathbb{R}_+)$ и принадлежности его классу (S) Гротендика тем же способом, что и аналогичное утверждение для $\mathcal{D}'$ (см. [18], приложение 2, теоремы 1 и 2). Применяя далее

теорему об открытом отображении в форме Райкова, доказанную там же, мы заключаем, что сильная топология $S'^0(\mathbb{R}_+)$ совпадает с борнологической топологией, ассоциированной с прообразом топологии $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_+)$. Тем самым прообраз всякого ограниченного множества в $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_+)$ сильно ограничен в $S'^0(\mathbb{R}_+)$. Иначе говоря, преобразование Лапласа является в данном случае не только алгебраическим, но и борнологическим изоморфизмом. Это рассмотрение наглядно демонстрирует тонкости, возникающие при работе с аналитическими функционалами класса S'^0 . В противоположность этому, в случае DFN-пространств S'^0_α тот факт, что преобразование Лапласа $S'^0_\alpha(V^*) \rightarrow \mathcal{A}^\alpha_0(V)$ есть топологический изоморфизм, прямо следует из стандартной формы теоремы об открытом отображении [12].

6. ОБОБЩЕНИЕ НА ПРОСТРАНСТВА S^0_a

В ряде ситуаций вместо S^0_α необходимо использовать более общие пространства S^0_a . Напомним [3], что S^0_a задается последовательностью положительных чисел $\{a_\nu\}$ и состоит из гладких функций на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k \partial^q f(x)| \leq C A^{|k|} B^{|q|} a_{|k|}, \quad (28)$$

где C, A, B — зависящие от f константы и приняты обычные мультииндексные обозначения. Поведение $f \in S^0_a$ при $|x| \rightarrow \infty$ характеризуется функцией $1/\mathbf{a}(|x/A|)$, где $|x| = \max_j |x_j|$ и

$$\mathbf{a}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_\nu \frac{r^\nu}{a_\nu}.$$

Функция $\mathbf{a}(r)$ выпукла и монотонно растет быстрее любого полинома. Без ограничения общности можно считать, что задающая последовательность $\{a_\nu\}$ также удовлетворяет некоторым условиям регулярности, а именно:

$$a_0 = 1, \quad a_{\nu+1} \geq a_\nu, \quad a_\nu^2 \leq a_{\nu-1} a_{\nu+1}. \quad (29)$$

Первое из них — просто нормировка, а двумя вторыми свойствами обладает регуляризованная последовательность $a^*_\nu = \sup_{r \geq 1} r^\nu / \mathbf{a}(r)$, которая приводит к той же (при $r \geq 1$) индикаторной функции, поскольку $a^*_\nu \leq a_\nu$, $a^*_\nu \geq r^\nu / \mathbf{a}(r)$. В определение S^0_a включается также требование

$$a_{\nu+1} \leq C h^\nu a_\nu, \quad (30)$$

где C, h — константы, обеспечивающее замкнутость пространства относительно операции умножения на x_j . При этом же условии⁴⁾ оператор Фурье изоморфно отображает S^0_a на пространство S^0_0 , совпадающее с пространством $\mathcal{D}^{\{a_\nu\}}$, положенным Румье [23] в

⁴⁾В книге [3] предполагались более жесткие ограничения, но они излишни; простая схема преобразования Фурье в пространствах типа S при условии (29) изложена в работе [22].

основу теории ультрараспределений (ими называют элементы сопряженного пространства $\mathcal{D}'^{\{a_\nu\}}$). Пространство S_0^a нетривиально в том и только том случае, если соблюдается критерий неквазианалитичности (см. [19], § 1.3), который в версии Мандельбройта имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{-1/\nu} < \infty. \quad (31)$$

Отсюда при учете (29) вытекает неравенство

$$\mathbf{a}(r) \leq C_\epsilon e^{\epsilon r}, \quad (32)$$

где ϵ сколь угодно мало. Действительно, условия (29) означают, что $\ln a_\nu$ является выпуклой функцией индекса, монотонно растущей с нуля, поэтому члены ряда (31) монотонно убывают. В частности,

$$\sum_{\mu > \nu/2}^{\nu} a_\mu^{-1/\mu} \geq \left(\frac{\nu}{2}\right) a_\nu^{-1/\nu},$$

и из сходимости ряда следует, что $\nu^\nu \leq \epsilon^\nu a_\nu$ при достаточно больших ν . Каждая функция из S_a^0 очевидно имеет аналитическое продолжение в $\mathbb{C}^d$, для которого справедлива оценка

$$|f(x + iy)| \leq C e^{-\ln \mathbf{a}(|x/A|) + B \sum |y_j|}. \quad (33)$$

Применяя формулу Коши и используя неравенства (32) и

$$\mathbf{a}((1 - \lambda)r_1 + \lambda r_2) \leq \mathbf{a}(r_1)\mathbf{a}(r_2), \quad (34)$$

вытекающее из выпуклости и монотонности $\mathbf{a}(r)$ (с учетом нормировки $\mathbf{a}(0) = 1$) и верное при любом $\lambda \in [0, 1]$, легко убедиться, что и, наоборот, неравенство (33) влечет оценку (28) для производных ограничения целой функции f на $\mathbb{R}^d$ с другими, вообще говоря, но сколь угодно близкими к участвующим в (33) константами A и B . Таким образом, неравенство (33) можно положить в основу определения S_a^0 и затем определить $H_{a,A}^{0,B}(U)$, $E_{a,A}^{0,B}(U)$, а также $S_a^0(U)$ и $S_a^0(K)$ путем замены

$$\left|\frac{x}{A}\right|^{1/\alpha} \longmapsto \ln \mathbf{a}\left(\left|\frac{x}{A}\right|\right) \quad (35)$$

в формулах (5), (6). Тем самым понятие несущего конуса естественным образом распространяется на эти пространства. Важно, что при условии (30) пространства $S_a^0(U)$ и $S_a^0(K)$ принадлежат классу DFN. Это устанавливается по той же схеме, что и для $S_\alpha^0(U)$ в работе [12], с той разницей, что каноническое вложение $H_{\alpha,A}^{0,B}(U) \rightarrow H_{\alpha,A'}^{0,B'}(U)$ является ядерным при любых $A' > A$, $B' > B$, а аналогичное утверждение для $H_{a,A}^{0,B}(U)$ верно

при A' и B' , достаточно больших по сравнению с A и B , однако это не влияет на окончательный вывод. С учетом сказанного доказательство теоремы 1 распространяется на пространства S_a^0 почти дословно, с заменой (35) в неравенстве (15) и далее. Теорема 1.3.5 из монографии [19] показывает, что при условии (31) пространство $S_0^a(\mathbb{R})$ содержит неотрицательную четную функцию ω с носителем в сколь угодно малом сегменте $[-\delta, \delta]$, обладающую свойствами

$$\int \omega(t) dt = 1, \\ |\omega^{(\nu)}(t)| \leq C_0 A_0^\nu a_\nu, \quad (36)$$

где A_0 достаточно велико по сравнению с $1/\delta$. Однако согласно работе [23] (гл. II, лемма 1), для любой последовательности a_ν , удовлетворяющей условиям (29) и (31), найдется последовательность a'_ν , удовлетворяющая тем же условиям и такая, что $a'_\nu \leq C_\varepsilon \varepsilon^\nu a_\nu$ при любом $\varepsilon > 0$. Значит, A_0 в неравенстве (36) можно считать сколь угодно малым (с должным увеличением C_0), что позволяет построить аналог функции ρ_0 , используемой при выводе леммы 2. При проверке наличия желаемых свойств у аналога функции ρ_1 следует воспользоваться неравенством

$$\sum_{j=1}^d \ln \mathbf{a}(|x_j|) \geq \ln \mathbf{a}\left(\left|\frac{x}{d}\right|\right),$$

которое следует из тех же свойств регулярности $\mathbf{a}$, что и (34). В итоге мы получаем следующее обобщение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Ограничение функционала $v \in S'^0$ на любое нетривиальное пространство S_a^0 , задаваемое последовательностью a_ν , удовлетворяющей условиям (29), (30), имеет те же несущие конусы, что и сам функционал v .*

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [7], где развита теория рассеяния для нелокальных полей, определенных на пространстве S^0 (обозначаемом там Z), и, в частности, выведен аналог редукционных формул Лемана–Симанзика–Циммермана, аксиома локальности заменялась некоторыми свойствами регулярности функций Грина в импульсном пространстве. Одно из возможных важных приложений полученных здесь результатов состоит в выяснении связи между условиями Штейнмана и сформулированным во введении обобщением локальной коммутативности, более близким к интуитивному пониманию причинности и обеспечивающим, как уже говорилось, нормальную связь спина со статистикой и PCT -инвариантность теории. Предварительный ответ состоит в том, что они, по существу, эквивалентны. Поскольку S^0 является одним из основных пространств функционального анализа, с математической точки зрения несомненно представляет интерес

более глубокое изучение топологических свойств пространств $S^0(K)$ и $S'^0(K)$, включая анализ возможности распространения на них сформулированных в конце раздела 5 результатов, касающихся $S'^0(\mathbb{R}_+)$. Однако одна из целей данной работы состояла в том, чтобы показать, как можно обойти возникающие здесь топологические тонкости в конкретных приложениях, рассматривая ограничения функционалов на подходящие функциональные пространства с более удобными свойствами. Отметим, что аналог теоремы 1 справедлив [24] и для ограничений функционалов, принадлежащих S'^0_α , на более узкие пространства того же класса.

Благодарности. Автор благодарен А. Г. Смирнову за полезные обсуждения. Работа поддержана грантом РФФИ № 02-01-00556 и грантом НШ-1578.2003.2.

Список литературы

- [1] М. А. Соловьев. ТМФ. 1999. Т. 121. С. 139.
- [2] Г. В. Ефимов. Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985.
- [3] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев. Обобщенные функции. Т. 2. М.: Физматгиз, 1958.
- [4] Р. Стриттер, А. Вайтман. PCT, спин и статистика и все такое. М.: Наука, 1966.
- [5] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [6] М. А. Soloviev. Lett. Math. Phys. 1995. V. 33. P. 49.
- [7] O. Steinmann. Commun. Math. Phys. 1970. V. 18. P. 179.
- [8] W. Lücke. J. Math. Phys. 1986. V. 27. P. 1901.
- [9] А. Вайтман. Проблемы в релятивистской динамике квантовых полей. М.: Наука, 1968.
- [10] М. А. Soloviev. J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 2635.
- [11] H. Komatsu. J. Math. Soc. Japan. 1967. V. 19. P. 366.
- [12] М. А. Soloviev. Commun. Math. Phys. 1997. V. 184. P. 579.
- [13] Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1986.
- [14] В. С. Владимиров. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
- [15] Х. Шефер. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [16] М. А. Соловьев. ТМФ. 2001. Т. 128. С. 492.
- [17] A. Grothendieck. Mem. Am. Math. Soc. 1955. V. 16. P. 1.
- [18] А. Робертсон, В. Робертсон. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
- [19] Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.
- [20] В. С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
- [21] В. П. Паламодов. УМН. 1971. Т. 26. С. 3.
- [22] М. А. Соловьев. ТМФ. 1982. Т. 52. С. 363.
- [23] C. Roumieu. Ann. Sci. 'Ecole Norm. Sup. 1960. V. 77. P. 41.
- [24] М. А. Soloviev. J. Math. Phys. 2004. V. 45. P. 1944.

Поступила в редакцию 2.VII.2004 г.