Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, Асимптотика старших порядков теории возмущений: первая поправка к константам ренормировки $O(n)$ -симметричной теории в $(4 - \epsilon)$ -разложении, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 2, 211–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:19:33

© 2005 г.

М. В. Комарова*, М. Ю. Налимов*

АСИМПТОТИКА СТАРШИХ ПОРЯДКОВ
ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ: ПЕРВАЯ
ПОПРАВКА К КОНСТАНТАМ
РЕНОРМИРОВКИ $O(n)$ -СИММЕТРИЧНОЙ
ТЕОРИИ В $(4 - \epsilon)$ -РАЗЛОЖЕНИИ

Исследованы высокие порядки теории возмущений $O(n)$ -симметричной $\phi^4(4 - \epsilon)$ -модели в схеме минимальных вычитаний. С учетом специфики $(4 - \epsilon)$ -схемы минимальных вычитаний вычислены поправки к асимптотической формуле для коэффициентов разложения константы ренормировки Z_g и критического индекса η . Полученные поправки существенно улучшают асимптотическое описание результатов петлевых расчетов.

Ключевые слова: асимптотика высоких порядков, инстантон, ϕ^4 -модель, константы ренормировки, схема минимальных вычитаний, $(4 - \epsilon)$ -разложение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование высоких порядков теории возмущений (ТВ) является важной задачей при рассмотрении полевых моделей. В его основе лежит подход, разработанный в работе [1] и называемый *инстантонным*, состоящий в обобщении для функционального интеграла метода перевала. В связи с тем, что получаемые ряды оказываются расходящимися, необходимо некоторым образом пересуммировать полученный ответ. При этом результат процедуры пересуммирования существенно зависит как от значений начальных коэффициентов ряда, вычисленных в рамках ТВ, так и от результатов инстантонного анализа. Результаты работы [1] были применены в физике критических явлений при исследовании и пересуммировании рядов для критических индексов [2]. В работах [1], [2] использовалась Λ -регуляризация и так называемая “единичная” схема ренормировки (ренормировка в симметричной точке).

Позже в [3] был предложен способ вычисления асимптотик разложения критических индексов φ^4 -модели на основе инстантонного анализа ультрафиолетовых (UV) расходи-

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: mikhail.nalimov@pobox.spbu.ru

мостей, т.е. фактически способ вычисления констант ренормировки в высоких порядках ТВ. При этом использовалась схема минимальных вычитаний (МВ) в $(4-\epsilon)$ -разложении как наиболее продвинутой в техническом отношении (вычислено пять порядков ТВ); УФ-расходимости проявлялись в виде полюсов по ϵ . Было показано, что для корректного использования инстантонного подхода в теории ϕ^4 -модели в $(4-\epsilon)$ -схеме МВ необходимо аккуратное рассмотрение порядка предельных переходов N , $1/\epsilon \rightarrow \infty$ (N – порядок ТВ). Возникающие в данной схеме особенности приводят к отличиям от канонической техники [2] при вычислении амплитуды асимптотики высоких порядков для констант ренормировки и критических индексов.

Для обсуждения принципиального вопроса о точности результатов, получаемых методами пересуммирования [2], существенна скорость, с которой петлевые разложения ТВ приближаются к асимптотической формуле. Анализ этого вопроса для $(4-\epsilon)$ -схемы МВ, проведенный в работе [3], показал, что константы ренормировки монотонно приближаются к своей асимптотике, но достаточно далеки от нее (так, например, для константы ренормировки Z_g при $N = 5$ наблюдается отличие примерно в семьдесят пять раз). Этот факт ставит под сомнение точность результатов борелевского пересуммирования в данной схеме и вынуждает нас либо продолжать вычисление петлевых разложений, пока они не приблизятся в должной степени к асимптотике, либо интересоваться поправкой порядка $1/N$ к асимптотической формуле [3].

В работе [4] была рассмотрена поправка к асимптотической формуле Липатова [1], улучшающая выход на асимптотику петлевых разложений в единичной схеме ренормировки. Однако, чтобы получить такую поправку для констант ренормировки в $(4-\epsilon)$ -схеме МВ, необходимо, как и в [3], провести дополнительные вычисления, связанные с выделением УФ-расходимостей в N -м порядке ТВ.

Константа ренормировки Z_g (и связанная с ней ренормгрупповая функция $\beta(g)$) является главной характеристикой при определении асимптотического поведения критических индексов [3]. Именно она определяет скорость выхода на асимптотику петлевых результатов, поэтому мы ограничились лишь исследованием асимптотики высоких порядков константы ренормировки Z_g .

В данной работе мы, следуя разработанной в работе [3] идеологии, получим поправку к асимптотике высоких порядков для константы ренормировки Z_g и критического индекса η в $(4-\epsilon)$ -схеме МВ. Будет показано, что конкуренция параметров $1/N$ и ϵ приводит к тому, что в отличие от результатов работы [4] вклад в асимптотику высоких порядков вносят поправки по ϵ к инстантону.

Следует упомянуть еще одну предполагаемую область применения полученных результатов. В [5] был предложен модифицированный метод исследования φ^4 -модели, приводящий к принципиально сходящимся рядам ТВ (с конечным радиусом сходимости). Разработанный затем в [6], этот метод приспособлен к $(4-\epsilon)$ -схеме МВ. Результат работы [3] для главного члена асимптотики высоких порядков констант ренормировки был использован в [7] для улучшения сходимости рядов модели, рассмотренной в работах [5], [6]. Результат данной работы также может быть использован для дальнейшего улучшения сходимости рядов упомянутого метода.

Так как данная работа является естественным продолжением работы [3], мы будем согласовывать обозначения с обозначениями работы [3] и, опуская некоторые технические аспекты, подробно описанные при вычислении главного порядка разложения по $1/N$, ссылаться на соответствующие формулы из [3] в виде (I. номер формулы в [3]).

В разделе 2 коротко изложены основные положения липатовского подхода к вычислению асимптотик высоких порядков разложения по константе связи для частично ренормированной корреляционной функции. В разделе 3 обсуждаются особенности формализма ϵ -разложения. В разделе 4 описывается метод вычисления интеграла по флуктуациям в $(4 - \epsilon)$ -схеме MB, а затем, в разделе 5, вычисляется поправка по ϵ к этому интегралу (в гауссовом приближении по флуктуациям). В разделе 6 обсуждается техника расчета вычета в точке $\epsilon = 0$ для частично ренормированной четыреххвостой корреляционной функции (в асимптотике больших N в главном и поправочном порядках разложения по $1/N$). В разделе 7 мы вычисляем поправку к липатовской асимптотике для константы ренормировки Z_g и критического индекса η . В заключении мы анализируем полученные результаты.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛИПАТОВСКОГО ПОДХОДА

Напомним кратко ход вычислений и основные формулы работ [1], [3], используемые при расчете липатовских асимптотик для констант ренормировки и критических индексов. Рассматривается модель с действием

$$S_R(\vec{\phi}, g) = \frac{1}{2} Z_\phi^2 \partial_i \vec{\phi}_\alpha \partial_i \vec{\phi}_\alpha + \frac{1}{4!} Z_\phi^4 Z_g g \mu^\epsilon (\vec{\phi}^2)^2 \quad (1)$$

в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$. Здесь $\vec{\phi}$ — n -компонентное векторное поле, символ $\vec{}$ стоит над векторами в изотопическом n -мерном пространстве (в отличие от векторов в D -мерном пространстве, над которым задано поле $\vec{\phi}$ и элементы которого выделены жирным шрифтом). Свертки по повторяющимся векторным индексам и интегрирования по координатам здесь и в дальнейшем подразумеваются, $Z_i \equiv Z_i(g)$ — константы ренормировки ($i = g, \varphi$), μ — ренормировочная масса.

Для вычисления коэффициентов $G_k^{(N)}$ разложения k -хвостой функции Грина $G_k(g)$ по константе связи g в N -м порядке ТВ (для больших N) используется введенное в [1] интегральное представление для $G_k^{(N)}$, в основе которого лежит известная формула Коши, и исследуемое затем методом перевала. Как было замечено еще в [1], [8], вариационные уравнения, соответствующие точке перевала, не зависят от контрчленной части действия и имеют вид

$$\left. \frac{\delta J}{\delta \vec{\phi}_\alpha} \right|_{Z_i \equiv 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial J}{\partial g} \right|_{Z_i \equiv 1} = 0, \quad J(\vec{\phi}, g) = S_R(\vec{\phi}, g) + N \ln(-g). \quad (2)$$

Решение этих уравнений при $\epsilon = 0$ содержит зависимость от произвольных параметров x_0 , y и единичного вектора $\vec{u}$:

$$\vec{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, y, \vec{u}) = \frac{\vec{u}}{y^{(D-2)/2}} \left| \vec{\phi} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{y}, 0, 1, \vec{u} \right) \right|. \quad (3)$$

Параметры эти отражают, соответственно, трансляционную, масштабную и вращательную инвариантности модели. Методом Фаддеева–Попова по этим параметрам явно выделяются интегрирования, при этом значения самих параметров в точке перевала фиксируются ($\mathbf{x}_0 = 0$, $y = 1$) с помощью функции I , предложенной Липатовым [1],

$$I = \left(-\frac{\bar{g}}{4!} \int d^D \mathbf{x} \bar{\phi}^4(\mathbf{x}) \right)^{D+1} \delta^D \left(-\frac{\bar{g}}{4!} \int d^D \mathbf{x} \bar{\phi}^4(\mathbf{x}) \mathbf{x}^\mu \right) \times \\ \times \delta \left(-\frac{\bar{g}}{4!} \int d^D \mathbf{x} \bar{\phi}^4(\mathbf{x}) \ln(\mathbf{x}^2) \right) \delta^n \left(\bar{\mathbf{u}} - \frac{\int d^D \mathbf{x} \bar{\phi}_i(\mathbf{x}) |\bar{\phi}|^l(\mathbf{x})}{\sqrt{\sum_i \left(\int d^D \mathbf{x} \bar{\phi}_i |\bar{\phi}|^l \right)^2}} \right).$$

Для того чтобы решение методом перевала существовало и в пространстве размерности $4 - \epsilon$, необходимо, прежде чем варьировать функционал J , наложить дополнительное условие, фиксирующее масштабную инвариантность модели. Для этого используется одна из дельта-функций в I , и в результате появляется дополнительное слагаемое с множителем Лагранжа в первом из вариационных уравнений (2) [8]:

$$-\Delta^{(D)} \vec{\phi}_\alpha + \frac{g\mu^\epsilon}{3!} \vec{\phi}^2 \vec{\phi}_\alpha + 4\rho \vec{\phi}^2 \vec{\phi}_\alpha \ln(\mathbf{x}^2) = 0. \quad (4)$$

Здесь ρ – множитель Лагранжа, $\Delta^{(D)}$ – оператор Лапласа в D -мерном $\mathbf{x}$ -пространстве. Второе из вариационных уравнений (2) остается при этом неизменным и может быть записано в виде

$$\frac{g\mu^\epsilon}{4!} \int d\mathbf{x} (\vec{\phi}^2(\mathbf{x}))^2 = -N. \quad (5)$$

Сферически симметричное решение уравнений (4), (5) – инстантон g_{st} , $\vec{\phi}_{\text{st}}(\mathbf{x})$ – существует и может быть найдено аналитически в виде рядов по ϵ . Для нахождения множителя Лагранжа легко модифицировать способ, описанный в [9]: уравнение (4) домножается на $\vec{\phi}_{\text{st}}(x)$, интегрируется по $\mathbf{x}$ и рассматривается совместно с уравнением, отражающим специфику преобразования варьируемого функционала J при растяжении координат $x \mapsto \lambda x$ [10]:

$$\left. \frac{\partial J\{\vec{\phi}_{\text{st}}(\lambda \mathbf{x})\}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = \int d^D \mathbf{x} \left((D-2) \frac{\partial \vec{\phi}_{\text{st}} \partial \vec{\phi}_{\text{st}}}{2} + D \frac{g_{\text{st}} \mu^\epsilon (\vec{\phi}_{\text{st}}^2)^2}{4!} + 2\rho (\vec{\phi}_{\text{st}}^2)^2 \right) = 0.$$

Указанные уравнения совместны, если $\rho = -g_{\text{st}}\epsilon/48$.

В ходе реализации метода Фаддеева–Попова производятся масштабные растяжения поля и координат, что приводит к замене параметров μ и ρ на эффективные: $\mu \mapsto \mu y$, $\rho \mapsto \rho(\mu y)^\epsilon$. Как и в [3], чтобы указывать в последующих выражениях зависимость от N , y , μ явно, перейдем к переменным

$$\bar{\phi} = |\vec{\phi}|/\sqrt{N}, \quad \bar{g} = Ng(\mu y)^\epsilon, \quad \bar{\rho} = \rho(\mu y)^\epsilon N. \quad (6)$$

Для вычисления констант ренормировки в N -м порядке разложения по g рассматриваются функции Грина с R' -операцией, т.е. с вычитаниями расходимостей подграфов с

меньшим числом петель. Эта частичная ренормировка осуществляется константами Z_i в действии (1), вычисленными в теории возмущений по g вплоть до порядка, учитывающего контрчлены g^K , $K < N$. В размерной регуляризации константы Z_i содержат полюсы по ϵ , которые и устраняют все УФ-расходимости неренормированного объекта, кроме поверхностных [11].

Для коэффициента при g^N разложения частично ренормированной функции Грина ($N \rightarrow \infty$) после перехода в импульсное представление и интегрирования по $\vec{u}$, x_0 имеем [3]:

$$G_k^{(N)} = (-1)^N N^N N^{(k+n+3)/2} \int_0^\infty dy y^{k-5+\epsilon(k/2-1)} \times \\ \times \exp(-NJ(\bar{\phi}_{\text{st}}, \bar{g}_{\text{st}}(\mu y)^{-\epsilon})) \gamma_k(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k, y, \epsilon), \quad (7)$$

где γ_k — множитель, содержащий интеграл по флуктуациям вокруг инстантона. Интеграл в данном выражении требует специального исследования, так как именно в нем проявляются поверхностные расходимости (в виде полюсов по ϵ).

Разложение γ_k по $1/N$ имеет вид

$$\gamma_k(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k, y, \epsilon) = \gamma_k^{(0)} + \frac{1}{N} \gamma_k^{(1)} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad \left(\sum_{l=1}^k \mathbf{p}_l = 0\right), \quad (8)$$

$$\gamma_k^{(0)} = \exp\left(\frac{a\bar{g}}{16\pi^2\epsilon}\right) L_k D^* e^{\epsilon d} y^{k(2-\epsilon)} \bar{\phi}_{\text{st}}(y|\mathbf{p}_1|) \dots \bar{\phi}_{\text{st}}(y|\mathbf{p}_k|) + O(\epsilon^2). \quad (9)$$

Здесь и далее мы обозначаем фурье-образ от $\bar{\phi}_{\text{st}}(\mathbf{x})$ той же буквой ($\bar{\phi}_{\text{st}}(\mathbf{p})$), меняя лишь аргумент функции; выражения для констант L_k и D^* таковы:

$$L_k = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{(k-1)!!}{n(n+2) \dots (n+k-2)}, \\ D^* = 2^{(7-4n)/2} 3^{5n/2} \pi^{-(5+n)/2} 5^{-5/2} \times \\ \times \exp\left(-\frac{4(n+2)}{3} - \frac{7(n+8)}{18} - \frac{R}{12} + U_{\text{reg}}|_{\epsilon=0}\right),$$

где

$$R = -\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)(2l+3)}{p(l+1)^p(l+2)^p} (6^p + 2^p(n-1)), \\ U_{\text{reg}}(\epsilon) = \frac{n+8}{6} (\Psi(1) + 2 - \ln \pi) + \epsilon \frac{n+8}{6} \left(-\ln \pi - \frac{79}{16} \pi - \gamma + \frac{79}{32} \pi \gamma + \frac{79}{32} \pi \ln \pi - \right. \\ \left. - \frac{15}{64} \pi^3 (\ln \pi + \gamma) + \frac{1}{2} \gamma \ln \pi + \frac{1}{4} \ln^2 \pi - \frac{1}{8} \pi^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \frac{15}{32} \pi^3 + \frac{5}{2} \right), \quad (10)$$

Член $\gamma_k^{(0)}$ соответствует гауссовому приближению для интеграла по флуктуациям вокруг инстантона. Член $\gamma_k^{(1)}$ содержит первую поправку по $1/N$ к гауссовому приближению. Как и во многих последующих формулах, мы использовали в (9) экспоненциальную запись первой поправки по ϵ в выражении для $\gamma_k^{(0)}$ (см. член $e^{\epsilon d}$).

В отличие от предыдущих работ [1], [2], [4], [8] в $(4 - \epsilon)$ -схеме МВ, кроме члена $\gamma_k^{(1)}$, в поправочном по $1/N$ порядке исследуемой асимптотики существенными оказываются первые поправки по ϵ ко всем объектам в (7) (к инстантону и $\gamma_k^{(0)}$).

Вычисление вычета в $\epsilon = 0$ функции $G_k^{(N)}$ в асимптотике больших N (в главном и поправочном по $1/N$ порядках) начнем с формулы (7).

3. ОСОБЕННОСТИ ФОРМАЛИЗМА В ϵ -РАЗЛОЖЕНИИ

Как и в [3], отличие наших расчетов от расчетов, приведенных в работах [1], [2], [8], [4], будет заключаться в том, что большой параметр N метода стационарной фазы не будет самым большим: мы выделяем определенный с УФ точки зрения объект (полюс по ϵ) и только затем используем метод стационарной фазы по N . Технически это выражается в выделении из $G_k^{(N)}$ УФ-расходимостей (полюсов по ϵ), которые будут проявляться в виде расходящихся при малых ϵ интегралов по масштабному параметру y . При этом поправку к асимптотике больших N дает не только учтенный в [4] член $\gamma_k^{(1)}$, но и поправки по ϵ к инстантону $\{\bar{\phi}_{\text{st}}, g_{\text{st}}\}$ и к интегралу по гауссовским флуктуациям $\gamma_k^{(0)}$. Важным удобством схемы МВ является то, что полюс первого порядка по ϵ в корреляционных функциях – величина $\{G_k^{(N)}\}/\epsilon$ – содержит всю необходимую информацию о константах ренормировки и критических индексах, поэтому мы можем ограничиться лишь вычислением $\{G_k^{(N)}\}$ [3], [9] (здесь и далее фигурные скобки обозначают вычет в $\epsilon = 0$).

Так как константы ренормировки имеют смысл лишь в рамках теории возмущений, из функционала $J(\bar{\phi}_{\text{st}}, \bar{g}_{\text{st}}(\mu y)^{-\epsilon})$, входящего в (7), выделяется слагаемое

$$A = \frac{1}{2} \partial \bar{\phi}_{\text{st}} \partial \bar{\phi}_{\text{st}} + \frac{1}{4!} \bar{g}_{\text{st}} \bar{\phi}_{\text{st}}^4 + \ln(-\bar{g}_{\text{st}}(\mu y)^{-\epsilon}),$$

которое не содержит расходимостей и может быть рассмотрено при анализе выражения (7) как величина в показателе экспоненты: $\exp(-NA)$. Оставшееся слагаемое, контрчленная часть

$$B = \frac{1}{2} (Z_\phi^2 - 1) \partial \bar{\phi}_{\text{st}} \partial \bar{\phi}_{\text{st}} + \frac{1}{4!} (Z_\phi^4 Z_g - 1) \bar{g}_{\text{st}} \bar{\phi}_{\text{st}}^4,$$

содержит константы ренормировки и соответствующие им сингулярности по ϵ , которые могут быть рассмотрены только в рамках ТВ, и при инстантонном анализе (7) должны быть представлены в полиномиальном виде¹⁾:

$$e^{-NB} \rightarrow \sum_j \frac{(-NB)^j}{j!}.$$

¹⁾В работе [3] было показано, что в УФ-области интегрирования по масштабному параметру вклады левой и правой части данного равенства в ответ, полученный методом стационарной фазы, оказываются различными из-за погрешности вычисления (см. (I.20)).

При вычислении первой поправки по $1/N$ используем для A следующие члены разложения в ряд по ϵ :

$$A = 1 + \alpha\epsilon - \epsilon \ln(\mu y) + \frac{\beta\epsilon^2}{2!} + O(\epsilon^3), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\ln \pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - 1, \\ \beta &= -\frac{79}{16}\pi + \frac{56041\pi^2}{3072} - 1 + \frac{\gamma \ln \pi}{2} + \frac{675\pi^6}{4096} + \frac{15\pi^3}{32} + \frac{15\pi^3 \ln \pi}{64} - \frac{79\pi\gamma}{32} - \\ &\quad - \frac{79\pi \ln \pi}{32} + \frac{15\pi^3\gamma}{64} + \ln \pi + \gamma + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{3555\pi^4}{1024} + \frac{\ln^2 \pi}{4} \simeq -0.05045 \end{aligned}$$

(по сравнению с [3] мы учли в A слагаемое $\beta\epsilon^2/2!$). Мы также вычислили инстантон с точностью до членов порядка ϵ :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{\text{st}}(\mathbf{x}) &= \frac{\sqrt{3} \exp(-q\epsilon/2)}{\pi(1+\mathbf{x}^2)} + \epsilon \frac{\sqrt{3}(3\mathbf{x}^2 \ln(\mathbf{x}^2) + (3-\pi^2)\mathbf{x}^2 - 9 + \pi^2)}{6\pi(1+\mathbf{x}^2)^2} + O(\epsilon^2), \\ \bar{g}_{\text{st}} &= -16\pi^2 e^{q\epsilon} + O(\epsilon^2), \quad q = \frac{15\pi^3 - 158\pi}{64} \simeq -0.4887, \end{aligned} \quad (12)$$

а в константах ренормировки ограничились приближением

$$Z_g Z_\phi^4 = 1 + \frac{ag}{\epsilon 16\pi^2} + \frac{b_1 g^2}{\epsilon (16\pi^2)^2} + \frac{b_2 g^2}{\epsilon^2 (16\pi^2)^2}, \quad Z_\phi^2 = 1 + \frac{cg^2}{\epsilon (16\pi^2)^2}, \quad (13)$$

где

$$a = \frac{n+8}{3}, \quad b_1 = -\frac{5n+22}{9}, \quad b_2 = \frac{n^2+16n+64}{9}, \quad c = -\frac{n+2}{36}.$$

Подставляя в (7) описанные приближенные выражения, получаем

$$\begin{aligned} G_k^{(N)} &= \frac{(-1)^N}{(16\pi^2)^N} N^N N^{(k+n+3)/2} e^{-N-\alpha N\epsilon-\beta N\epsilon^2/2} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty dy y^{k-5} y^{\epsilon(k/2-1)} (\mu y)^{N\epsilon} \gamma_k \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left(-ae^{q\epsilon} \frac{(\mu y)^{-\epsilon}}{\epsilon} \right)^j. \end{aligned} \quad (14)$$

Контрчлен, пропорциональный a из (13), выделен в (14) явно, так как он дает вклад в главный по $1/N$ порядок (см. (I.19)–(I.21)). Вклады остальных контрчленов из (13) содержатся в $\gamma_k^{(1)}$.

Сингулярности по ϵ в (7), возникающие при вычислении γ_k (например, для слагаемого $\gamma_k^{(0)}$ см. член $\exp(a\bar{g}/(16\pi^2\epsilon))$ в формуле (9)), также могут быть проанализированы только в рамках ТВ и тоже должны быть представлены в полиномиальном виде в предэкспоненте. Это дает дополнительный вклад к слагаемым суммы по j в (14), так что интеграл в (14) заменится на

$$\int_0^\infty dy y^{k-5} y^{\epsilon(k/2-1)} (\mu y)^{N\epsilon} \bar{\gamma}_k \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left(-ae^{q\epsilon} \frac{(\mu y)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right)^j, \quad (15)$$

где $\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k^{(0)} + \bar{\gamma}_k^{(1)}/N$ – флуктуационный интеграл, расходимости которого устранены в соответствии с предписаниями схемы МВ ренормировки. Полученное в результате выражение аналогично (I.21), но содержит необходимые поправки по $1/N$, ϵ . Нашей целью является выделение в нем полюса первого порядка по ϵ и вычисление коэффициента при нем – вычета $\{G_k^{(N)}\}$ – в главном и поправочном по $1/N$ порядках. Мы проведем эти вычисления для $G_4^{(N)}$, т.е. в случае $k = 4$. Будет показано, что главный член разложения совпадает с результатами работы [3], а поправочный позволяет уточнить асимптотическое поведение константы ренормировки Z_g .

4. ОБ ИНТЕГРАЛЕ ПО ФЛУКТУАЦИЯМ В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ $4 - \epsilon$

Вычисление интеграла по флуктуациям γ_k проводилось в главном порядке разложения по $1/N$ в работах [1] (при $n = 1$), [2] (при произвольном n). Затем в [4] рассматривалась первая поправка по $1/N$ (в единичной схеме ренормировки). Однако в $(4 - \epsilon)$ -схеме МВ в ответ для $\{G_4^{(N)}\}$ дает вклад поправка по ϵ к флуктуационному интегралу (константа d из (9)). Вычислению этой константы и будут посвящены два следующих раздела.

Итак, обсудим флуктуации вокруг инстантона для выражения

$$\gamma_k = \frac{N^z}{\pi i} \oint \frac{d\bar{g}}{\bar{g}} \int d^n \vec{u} \frac{\int D\bar{\phi} I y^{2-\epsilon} \bar{\phi}(\mathbf{p}_1 y) \dots y^{2-\epsilon} \bar{\phi}(\mathbf{p}_k y) e^{-NJ(\bar{\phi}, \bar{g}(\mu y)^{-\epsilon})}}{\text{NORM}}, \quad (16)$$

где

$$\text{NORM} = \int D\bar{\phi} \exp\left(\frac{-N\partial\bar{\phi}\partial\bar{\phi}}{2} - \frac{N\bar{g}\bar{\phi}^4}{4!}\right). \quad (17)$$

Как и в [1], мы включили в (16) множитель N^z (где $z = (1 - n - D)/2$), чтобы величина γ_k не зависела от N при $N \rightarrow \infty$. Отметим здесь, что величина γ_k , вычисленная по формуле (16), в главном порядке разложения по $1/N$ соответствует слагаемому $\gamma_k^{(0)}$ в (8), а первая поправка по $1/N$ к γ_k дает, в свою очередь, $\gamma_k^{(1)}$.

Замена переменных $\bar{\phi} = \psi/\sqrt{-\bar{g}}$ расцепляет полевые флуктуации и флуктуации по параметру $\bar{g}$ [2]. Перейдя затем в интегралах (16) и (17) от интегрирования по переменным ψ , $\bar{g}$ к интегрированию по флуктуациям $\delta\psi$, $\delta\bar{g}$, где

$$\psi = \bar{\phi}_{\text{st}} \sqrt{-\bar{g}_{\text{st}}} + \delta\psi, \quad \bar{g} = \bar{g}_{\text{st}} + \delta\bar{g},$$

следует разложить функционал J по этим флуктуациям в окрестности инстантона вплоть до вариаций четвертого порядка [4]. Производя затем обычные для метода перевала растяжения $\delta\psi = \delta\varphi/\sqrt{N}$, $\delta\bar{g} = \delta g/\sqrt{N}$, получим

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{y^{(2-\epsilon)k}}{\text{NORM}} \frac{N^{z-1/2}}{\pi i \bar{g}_{\text{st}}} \int d^n \vec{u} \int D\delta\varphi_{\parallel} \int D\delta\varphi_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta g I \bar{\phi}_{\text{st}}(p_1 y) \dots \bar{\phi}_{\text{st}}(p_k y) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(\delta g)^2}{2\bar{g}_{\text{st}}^2} - \frac{\delta\varphi_{\parallel} M_{\parallel} \delta\varphi_{\parallel}}{2!} - \frac{\delta\varphi_{\perp} M_{\perp} \delta\varphi_{\perp}}{2!} - \frac{J_3}{3! \sqrt{N}} - \frac{J_4}{4! N}\right) \times \\ &\times \left[1 + \frac{P_1}{\sqrt{N}} + \frac{P_2}{2! N}\right], \end{aligned} \quad (18)$$

где символ $\|$ ($\perp$) означает проектирование (исключение проекции) на направление $\bar{\phi}_{\text{st}}$, операторы $M_{\parallel}$ и $M_{\perp}$ равны, соответственно,

$$M_{\parallel} = \frac{1}{(-\bar{g}_{\text{st}})} \left(-\Delta^{(D)} + \frac{\bar{g}_{\text{st}} \bar{\phi}_{\text{st}}^2}{2!} \right), \quad M_{\perp} = \frac{1}{(-\bar{g}_{\text{st}})} \left(-\Delta^{(D)} + \frac{\bar{g}_{\text{st}} \bar{\phi}_{\text{st}}^2}{3!} \right),$$

J_3 и J_4 – всевозможные вклады вариаций третьего и четвертого порядков функционала J по переменным $\delta\varphi_{\parallel}$, $\delta\varphi_{\perp}$, δg , зависимость от N при них указана явно. Аналогично, выражение в квадратных скобках в (18) содержит величины P_1 и P_2 , которыми обозначены вклады от первой и второй вариаций предэкспоненты выражения (16). Отметим, что в (17) достаточно положить

$$\text{NORM} = \int D\delta\varphi_{\parallel} D\delta\varphi_{\perp} \exp \left(\frac{\delta\varphi_{\parallel} \Delta^{(D)} \delta\varphi_{\parallel} + \delta\varphi_{\perp} \Delta^{(D)} \delta\varphi_{\perp}}{2\bar{g}_{\text{st}}} \right), \quad (19)$$

так как все отброшенные в последнем выражении вклады порядка $O(1/N)$ приводят лишь к диаграммам, содержащим вакуумные петли и обращающимся в нуль в размерной схеме регуляризации в безмассовой модели.

Обозначим через $\{\Phi_{\lambda a}^{\parallel}\}$, $\{\Phi_{\lambda b}^{\perp}\}$ полный набор собственных функций операторов

$$\bar{g}_{\text{st}} (\Delta^{(D)})^{-1} M_{\parallel}, \quad \bar{g}_{\text{st}} (\Delta^{(D)})^{-1} M_{\perp},$$

соответственно. Индекс λ собственной функции фиксирует собственное число (и собственное подпространство) для данной собственной функции, индекс, обозначенный латинской буквой, нумерует функции в данном собственном подпространстве. Разложим флуктуации $\delta\varphi_{\parallel}$, $\delta\varphi_{\perp}$ по указанным собственным функциям:

$$\delta\varphi_{\parallel} = \sum_{\lambda, a} C_{\lambda a}^{\parallel} \Phi_{\lambda a}^{\parallel}, \quad \delta\varphi_{\perp} = \sum_{\lambda, b} C_{\lambda b}^{\perp} \Phi_{\lambda b}^{\perp},$$

и перейдем от функционального интегрирования по $\delta\varphi_{\parallel}$, $\delta\varphi_{\perp}$ к произведению интегралов $\int \prod_{\lambda, a, b} dC_{\lambda a}^{\parallel} dC_{\lambda b}^{\perp}$ (как в интеграле (18), так и в интеграле (19)).

Среди собственных чисел обсуждаемых операторов некоторые равны нулю при $\epsilon = 0$. Интегралы по соответствующим коэффициентам разложения – нулевым модам $C_{0a}^{\parallel}$, $C_{0b}^{\perp}$ ($a = 0, \dots, D$, $b = 1, \dots, (n-1)$) – снимаются с помощью дельта-функций, содержащихся в I [1], [2]. Собственные функции, соответствующие нулевому собственному числу, легко получить, восстановив по выражению (12) (где параметры y , $\mathbf{x}_0$ были фиксированы дельта-функциями из I) при помощи формулы (3) исходное семейство инстантонов, зависящее от произвольных параметров y , $\mathbf{x}_0$, $\vec{u}$. Дифференцируя полученный результат по y или по каждой из компонент векторов $\mathbf{x}_0$, $\vec{u}$ и снова полагая $y = 1$, $\mathbf{x}_0 = 0$, получим

$$\Phi_{00}^{\parallel} = \vec{u} \frac{\partial \bar{\phi}_{\text{st}}}{\partial y}, \quad \Phi_{0a'}^{\parallel} = \vec{u} \frac{\partial \bar{\phi}_{\text{st}}}{\partial \mathbf{x}_0^{a'}}, \quad \Phi_{0b}^{\perp} = \vec{e}_b |\bar{\phi}_{\text{st}}|, \quad (20)$$

где $a' = 1, \dots, D$, $b = 1, \dots, n-1$ и $\vec{e}_b$ – ортонормированный базис в изотопическом подпространстве, ортогональном направлению инстантона $\vec{u}$.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВКИ ПО ϵ К ФЛУКТУАЦИОННОМУ ИНТЕГРАЛУ В ГАУССОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Пользуясь введенными в предыдущей главе обозначениями, вычислим теперь константу d в (9). При этом нам достаточно ограничиться гауссовым приближением для функционального интеграла, т. е. рассматривать выражение (18) в главном порядке по $1/N$.

Проиллюстрируем, как “работают” в старшем по $1/N$ порядке дельта-функции в формуле для I на примере $\delta^D(-\bar{g} \int d^D \mathbf{x} \mathbf{x}_\mu \bar{\phi}^4(\mathbf{x})/4!)$. Раскладывая аргумент дельта-функции в ряд по $1/N$ и переходя к переменным $C_{\lambda}^{\parallel}, C_{\lambda}^{\perp}$, получим для вклада обсуждаемой дельта-функции в (16) (в главном по $1/N$ порядке) выражения вида

$$N^{\frac{D}{2}} \prod_{\mu=1}^D \delta \left(\sum_{a'=1}^D C_{0a'}^{\parallel} B_{\mu a'}^0 + \sum_{\lambda \neq 0} \sum_c C_{\lambda c}^{\parallel} B_{\mu c}^{\lambda} \right), \quad (21)$$

где

$$B_{\mu c}^{\lambda} = \int d^D \mathbf{x} \frac{\sqrt{-\bar{g}_{\text{st}}} \bar{\phi}_{\text{st}}^3 \Phi_{\lambda c}^{\parallel} \mathbf{x}^{\mu}}{3!}; \quad B_{\mu a'}^0 = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}_{\text{st}}}} \delta_{\mu a'}.$$

Теперь видно, что коэффициенты $C_{0a'}^{\parallel}$, которые входят в числитель выражения (16), фиксируются обсуждаемой дельта-функцией, а соответствующие им интегралы в числителе формулы (16) снимаются.

Рассмотренная в качестве примера дельта-функция приводит в главном по $1/N$ порядке к множителю $\det(B_{\mu a'}^0)^{-1} = (-\bar{g}_{\text{st}})^{D/2}$. Интеграл по $C_0^{\parallel}$ в нормирующем знаменателе (19) является гауссовым и равен

$$\prod_{a=1}^D \sqrt{\frac{2\pi(-\bar{g}_{\text{st}})}{\sum_{\nu=1}^D (\partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel}, \partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel})}},$$

где символ скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ здесь и далее означает интегрирование по D -мерной координате.

Рассматривая аналогично остальные члены I и выполняя гауссово интегрирование по $\delta g, C_{\lambda a}^{\parallel}, C_{\lambda a}^{\perp}$, а также интегрирование по $\vec{u}$, получим для $\bar{\gamma}_4$ в главном по $1/N$ порядке

$$\bar{\gamma}_k^0 = \frac{e^{U_{\text{reg}} L_k}}{\sqrt{2\pi}} (\Pi(1)\Pi(3)^{n-1})^{-1/2} \sqrt{\sum_{b=1}^{n-1} \frac{(\partial_{\nu} \Phi_{0b}^{\perp}, \partial_{\nu} \Phi_{0b}^{\perp})}{2\pi}} \prod_{a=0}^D \sqrt{\sum_{\nu=1}^D \frac{(\partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel}, \partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel})}{2\pi}}, \quad (22)$$

где

$$\Pi(\alpha) = \prod_{\substack{S \\ \alpha \mu_s \neq 1}} \left| 1 - \frac{1}{\alpha \mu_s} \right| \prod_{s'} \exp \left[\frac{1}{\alpha \mu_{s'}} + \frac{1}{2\alpha^2 \mu_{s'}^2} \right]. \quad (23)$$

Здесь мы ввели μ_s – собственные числа задачи

$$\Delta^{(D)} \Psi_s(\mathbf{x}) = \mu_s \left(\frac{\bar{g}_{\text{st}} \bar{\phi}_{\text{st}}^2}{2!} + 12 \bar{\rho} \bar{\phi}_{\text{st}}^2 \ln(\mathbf{x}^2) \right) \Psi_s(\mathbf{x}), \quad \bar{\rho} = -\frac{\bar{g}_{\text{st}} \epsilon}{48}. \quad (24)$$

Произведения функций $\Pi(1)$, $\Pi(3)$ в (22) возникают при гауссовом интегрировании по всем модам, кроме нулевых. Как и в работах [1], [2], [4], [8], расходимости однопетлевых диаграмм целиком вычтены множителями $\exp((\alpha\mu_s)^{-1} + (\alpha\mu_s)^{-2}/2)$. Такое вычитание соответствует “единичной” схеме ренормировки. Для того чтобы результат был справедливым в схеме МВ, необходимо домножить его на $e^{U_{\text{reg}}}$, где U_{reg} представляет собой конечную часть упомянутых диаграмм. В работе [3] подробно описан способ вычисления константы U_{reg} . Этот результат приведен выше (см. формулу (10)) с необходимой по сравнению с [3] поправкой по ϵ . Как уже отмечалось, вклады, соответствующие нулевым модам (т. е. таким, что $\alpha\mu_s = 1 + O(\epsilon)$) должны быть исключены из произведения по s . Кроме того, оказывается, что одно из собственных чисел ($\mu_s = 1/3 + O(\epsilon)$) нарушает положительную определенность матрицы вторых производных функционала J . Для интегрирования по соответствующей моде произведен разворот контура в комплексной плоскости, уничтожающий мнимую единицу в (18) и приводящий к появлению модуля в выражении для $\Pi(\alpha)$.

Зависимость от ϵ в выражении (22) присутствует в скалярном произведении и нулевых модах $\Phi_0^{\parallel}$, $\Phi_0^{\perp}$. Зависимость эту легко восстановить явно при помощи формул (20):

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^D (\partial_{\nu} \Phi_{00}^{\parallel}, \partial_{\nu} \Phi_{00}^{\parallel}) &= \frac{12}{5} + \epsilon \left(-\frac{6}{5} \ln \pi - \frac{24}{5} - \frac{12}{5} q + \frac{6}{5} \Psi(1) \right) + O(\epsilon^2), \\ \sum_{\nu=1}^D (\partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel}, \partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel}) &= \frac{12}{5} + \epsilon \left(-\frac{6}{5} \ln \pi - \frac{12}{5} q - 8 + \frac{4\pi^2}{5} + \frac{6}{5} \Psi(1) \right) + O(\epsilon^2), \\ \sum_{\nu=1}^{n-1} (\partial_{\nu} \Phi_{0b}^{\perp}, \partial_{\nu} \Phi_{0b}^{\perp}) &= 4.\end{aligned}$$

Однако в (22) также имеется зависимость от ϵ , содержащаяся в собственных числах μ_s задачи (24). Собственные числа невозмущенной задачи ($\epsilon = 0$) хорошо известны [2]:

$$\mu_s^{(0)} = \frac{(l+n)(l+n+1)}{6}, \quad s \equiv [l, n], \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (25)$$

$$V = \frac{\Gamma(l+D-2)\Gamma(D+2l-2)}{\Gamma(D-1)\Gamma(l+1)} \equiv (l+1)^2 + \epsilon \aleph(l) + O(\epsilon^2), \quad (26)$$

где V – вырождение собственных чисел μ_s и

$$\aleph = \frac{\Psi(3)(l+1)^2}{2} - \frac{l+1}{1} - (l+1)^2 \Psi(l+2).$$

Следуя методу, описанному в [8], мы вычислили также собственные функции данной (невозмущенной) задачи:

$$\Psi_{l,n}^0(\mathbf{x}) = Y_l(\mathbf{x}) \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}^2 + 1} \right)^{n+l} \sum_{i=1}^{n/2} A_{n,i} (|\mathbf{x}|^{-n+2i-2} - |\mathbf{x}|^{n-2i})$$

при четном n ,

$$\Psi_{l,n}^0(\mathbf{x}) = Y_l(\mathbf{x}) \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}^2 + 1} \right)^{n+l} \left(\sum_{i=1}^{(n-1)/2} A_{n,i} (|\mathbf{x}|^{-n+2i-2} - |\mathbf{x}|^{n-2i}) + \frac{A_{n,(n+1)/2}}{|\mathbf{x}|} \right)$$

при нечетном n . Здесь $Y_l(\mathbf{x})$ – сферические функции, коэффициенты $A_{n,i}$ задаются формулой

$$A_{n,i} = \frac{(-1)^{i+1} (n-1)!}{(n-i)! (i-1)!} \frac{(l+n)! (l+1)!}{(l+n-i+1)! (l+i)!}.$$

Будем искать собственные числа в виде $\mu_s = \mu_s^0 + \epsilon \bar{\mu}_s + O(\epsilon^2)$, интересуясь первой поправкой по ϵ . Чтобы найти $\bar{\mu}_s$, домножим (24) на Ψ_s и проинтегрируем по D -мерной координате. Подставим затем в (24) разложение в ряд для инстантона (12). Используем также явное выражение для оператора Лапласа в сферических координатах (см., например, [2])

$$\Delta^{(D)} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{L^2}{r^2},$$

где L^2 – оператор Казимира D -мерной вращательной группы, который имеет собственные числа $l(l+D-2)$, $l = 0, 1, \dots$ с вырождением V (26). Представим D -мерный оператор Лапласа, действующий на собственную функцию (с собственным числом l) упомянутого оператора Казимира, в виде

$$\Delta^{(D)} = \Delta^{(4)} + \epsilon \bar{\Delta}, \quad \Delta^{(4)} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+2)}{r^2}, \quad \bar{\Delta} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l}{r^2}.$$

Кроме того, напишем формальное разложение для собственных функций $\Psi_s = \Psi_s^0 + \epsilon \bar{\Psi}_s$. Слагаемые в последнем равенстве следует понимать в смысле обобщенных функций, имея в виду естественное продолжение функции Ψ_s^0 в пространство размерности $4 - \epsilon$ (см., например, [12]). Выделив теперь линейные по ϵ члены и учитывая равенство

$$\mu_s \int d^4 \mathbf{x} \Psi_s^0 \frac{\bar{g}_{\text{st}} \bar{\phi}_{\text{st}}^2}{2!} \bar{\Psi}_s = \int d^4 \mathbf{x} \Psi_s^0 \Delta^{(4)} \bar{\Psi}_s$$

(которое легко может быть доказано, если разложить функцию $\bar{\Psi}_s$ по полному набору собственных функций $\{\Psi_s^0\}$ и учесть, что последние взаимно ортогональны относительно скалярного произведения $\sum_{\alpha=1}^4 \int d^4 \mathbf{x} \partial_\alpha \Psi_s^0 \partial_\alpha \Psi_{s'}^0$), получим, наконец, первую поправку по ϵ для собственных чисел задачи (24):

$$\bar{\mu}_s = \mu_s^0 \frac{(\Psi_s^0, \bar{\Delta} \Psi_s^0)}{(\Psi_s^0, \Delta^{(4)} \Psi_s^0)} - (\mu_s^0)^2 \frac{(\chi \Psi_s^0, \Psi_s^0)}{(\Psi_s^0, \Delta^{(4)} \Psi_s^0)}. \quad (27)$$

Здесь χ определяется равенством

$$12 \bar{\rho} \bar{\phi}_{\text{st}}^2 \ln \mathbf{x}^2 + \frac{\bar{g}_{\text{st}} \bar{\phi}_{\text{st}}^2}{2!} = \frac{\bar{g}_{\text{st}} \bar{\phi}_{\text{st}}^2}{2!} \Big|_{\epsilon=0} + \epsilon \chi + O(\epsilon^2),$$

тем самым,

$$\chi = -8 \frac{3 \ln(\mathbf{x}^2) \mathbf{x}^2 + 3 \mathbf{x}^2 - 9 + \pi^2 - \pi^2 \mathbf{x}^2}{(\mathbf{x}^2 + 1)^3} + \frac{12 \ln \mathbf{x}^2}{(\mathbf{x}^2 + 1)^2}.$$

Теперь несложно учесть зависимость от ϵ произведений по s и s' в (22):

$$\begin{aligned} \ln(\Pi(\alpha)) = \ln(\Pi(\alpha))|_{\epsilon=0} + \epsilon \left(\sum_{\alpha \mu_{l,n}^0 \neq 1} \left[(l+1)^2 \frac{\bar{\mu}_{l,n}}{\alpha(\mu_{l,n}^0)^2 - \mu_{l,n}^0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \left| 1 - \frac{1}{\alpha \mu_{l,n}^0} \right| \aleph(l) \right] - \sum_{l,n} \left[(l+1)^2 \left(\frac{\bar{\mu}_{l,n}}{\alpha(\mu_{l,n}^0)^2} + \frac{\bar{\mu}_{l,n}}{\alpha^2(\mu_{l,n}^0)^3} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{\alpha \mu_{l,n}^0} + \frac{1}{2\alpha^2(\mu_{l,n}^0)^2} \right) \aleph(l) \right] \right). \end{aligned} \quad (28)$$

С помощью формулы (27) мы получили численные значения поправок $\bar{\mu}_s$. Их подстановка в (28) дает

$$\begin{aligned} \ln \Pi(1) &\simeq \ln \Pi(1)|_{\epsilon=0} - 4.90\epsilon + O(\epsilon^2), \\ \ln \Pi(3) &\simeq \ln \Pi(3)|_{\epsilon=0} - 0.340\epsilon + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Окончательно, собрав в константу d все поправки по ϵ из (22), с учетом выражения для U_{reg} (см. формулу (10)), имеем

$$\begin{aligned} d = \frac{4.90}{2} + \frac{(n-1)0.340}{2} - \frac{3}{2} \ln \pi + \frac{395}{32} \pi - \frac{75}{64} \pi^3 - \frac{46}{3} + \frac{4}{3} \pi^2 - \frac{5}{2} \gamma + \ln \frac{5}{6} + \\ + \frac{n+8}{6} \left(-\ln \pi - \frac{79}{16} \pi - \gamma + \frac{79}{32} \pi \gamma + \frac{79}{32} \pi \ln \pi - \frac{15}{64} \pi^3 \gamma - \right. \\ \left. - \frac{15}{64} \pi^3 \ln \pi + \frac{1}{2} \gamma \ln \pi + \frac{1}{4} \ln^2 \pi - \frac{1}{8} \pi^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \frac{15}{32} \pi^3 + \frac{5}{2} \right) \simeq -0.59 + 0.195n. \end{aligned}$$

6. АСИМПТОТИКА $G_4^{(N)}$ ПРИ БОЛЬШИХ N

6.1. Вклад гауссовой части интеграла по флуктуациям. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением вклада в исследуемую асимптотику, связанного с гауссовым приближением для интеграла по флуктуациям, т.е. положим пока в (7) $\gamma_4 \equiv \gamma_4^{(0)}$. Этот вклад является наиболее интересным, так как демонстрирует взаимодействие параметров y , N и ϵ в схеме МВ, и его рассмотрение отсутствует в предыдущих работах (посвященных другим схемам). Для дальнейших вычислений нам понадобится входящее в $\gamma_4^{(0)}$ фурье-преобразование в пространстве размерности D функции $\bar{\phi}_{\text{st}}(x)$ (12). Приведем результат в пределе $\epsilon, p \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{\text{st}}(\mathbf{p}) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{\mathbf{p}^2} \left(e^{Q\epsilon} |\mathbf{p}|^\epsilon + \epsilon \left[\Psi'(1) - \frac{\ln(\mathbf{p}^2)}{2} + \frac{3-\pi^2}{6} \right] + O(\epsilon^2) \right) + O(\ln(\mathbf{p}^2)), \\ Q = -\Psi(1) - \frac{3 \ln 2}{2} - \frac{\ln \pi}{2} - \frac{q}{2} \simeq -0.791, \end{aligned} \quad (29)$$

здесь и далее $\Psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Разложим выражение $((\mu y)^{-\epsilon} - 1)^j$ в (15) по формуле бинома Ньютона, введя дополнительную сумму по m от нуля до j . Все образовавшиеся интегралы берутся интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} y^\epsilon y^{(N-u)\epsilon} [y^{2-\epsilon} \bar{\phi}_{\text{st}}(y|\mathbf{p}_1|) \dots y^{2-\epsilon} \bar{\phi}_{\text{st}}(y|\mathbf{p}_4|)] &\simeq \\ &\simeq \frac{(4\sqrt{3}\pi)^4}{\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 \mathbf{p}_3^2 \mathbf{p}_4^2} \left(\frac{1}{(N-u)\epsilon} + \frac{f}{(N-u)} + \frac{3}{(N-u)^2 \epsilon} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$f = 2 - 6 \ln 2 - 2 \ln \pi + \frac{79\pi}{16} - \frac{2\pi^2}{3} - \frac{15\pi^3}{32} \simeq -10.05. \quad (31)$$

По сравнению с выражениями (I.22), (I.23) мы учли в (30) дополнительные поправки по $1/N$ и ϵ . Последующие поправки к (30) дают в исследуемую асимптотику вклад порядка $O(1/N^2)$, т.е. являются несущественными. Затем с помощью формулы

$$\sum_{m=0}^j \frac{(-1)^m C_j^m}{(N-m)^z} = (-1)^j \left(\frac{(j+z-1)!}{(z-1)! N^{j+z}} + \frac{2(j+z)!}{(z-1)! N^{j+z+1}} \right) + O\left(\frac{1}{N^{j+z+2}}\right)$$

при $z = 1, 2$ нетрудно осуществить суммирование по m . Получившаяся формула отражает явно зависимость $G_4^{(N)}$ в (14) от параметра ϵ : в каждом слагаемом суммы по j полюсы различного порядка по ϵ умножены на экспоненциальный фактор $\exp(\alpha N \epsilon + \beta N \epsilon^2/2 + d\epsilon + qj\epsilon)$. Теперь необходимо в каждом слагаемом суммы по j выделить полюс первого порядка по ϵ и просуммировать все вклады. Окончательно получим

$$\frac{\{G_4^{(N)}\}_0}{\epsilon} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N |\mathbf{p}|^8} \frac{e^{\alpha a}}{N\epsilon} \left(1 - \frac{W_4}{N} \right), \quad (32)$$

где

$$W_4 = da + qa + qa^2\alpha + \frac{\beta a^2}{2} - 5 - 5\alpha a + fa \simeq -3.58 + 1.48n + 0.16n^2,$$

$$C_4^{(N)} = (-1)^N D^* L_4 (4\sqrt{3}\pi)^4 N^N N^{(n+7)/2} e^{-N},$$

символом $\{G_4^{(N)}\}_0$ обозначен вклад слагаемого $\gamma_4^{(0)}$ в вычет в $\epsilon = 0$ частично ренормированной функции Грина $G_4^{(N)}$, который и обсуждался в данном пункте.

6.2. Асимптотика $G_4^{(N)}$ при больших N : поправка к гауссовому приближению в интеграле по флуктуациям. В данном разделе мы обсудим вклад в исследуемую асимптотику, связанный с учетом первого поправочного члена метода стационарной фазы к интегралу по флуктуациям, т.е. положим теперь в (7) $\gamma_4 \equiv \gamma_4^{(1)}/N$. Такой вклад содержит дополнительную малость порядка $1/N$ по сравнению со вкладом, рассмотренным в предыдущем пункте, что дает нам возможность не учитывать здесь поправки порядка ϵ к конечным при $\epsilon \rightarrow 0$ объектам. Первый поправочный член к корреляционной функции $G_4^{(N)}$ вычислялся в работе [4] при использовании размерной

регуляризации и единичной схемы ренормировки. Для поправки по $1/N$ к асимптотике функции Грина $G_4^{(N)}$ (и, соответственно, к вершинной функции $\Gamma_4^{(N)}$) в [4] должен был быть получен ответ вида $\tilde{A} \ln^2(\mathbf{p}^2/\mu^2) + \tilde{B} \ln(\mathbf{p}^2/\mu^2) + \tilde{C}$. К сожалению, в [4] ответ для асимптотики коэффициента $G_4^{(N)}$ не приведен. Приводится лишь асимптотика функции Гелл-Манна–Лоу $\beta(g)$, которая связана с вершинной функцией Γ_4 соотношением [1]

$$\beta(g) = -\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \ln(\mathbf{p}^2/\mu^2)},$$

где μ – симметричная импульсная точка вычитания в единичной схеме ренормировки. При вычислении $\beta^{(N)}$ на основании $\Gamma_4^{(N)}$ член из $\Gamma_4^{(N)}$, пропорциональный $\ln^2(\mathbf{p}^2/\mu^2)$, который, как известно, не дает вклада в β , был отброшен. Затем в работе [4] была проведена замена переменных

$$\frac{\partial}{\partial \ln(p^2/\mu^2)} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \ln(\mu y)^2},$$

после чего осуществлялось интегрирование по частям под знаком интеграла по y .

Чтобы восстановить результат работы [4] для функции Грина $G_4^{(N)}$, мы рассмотрели вклады контрчленов

$$\left(a \frac{4\bar{g}_{\text{st}}^2 \bar{\phi}_{\text{st}}^3 \delta\bar{\phi}}{N\epsilon 16\pi^2 4!} \right)^2, \quad b_2 \frac{\bar{g}_{\text{st}}^3 \bar{\phi}_{\text{st}}^4}{N\epsilon^2 (16\pi^2)^2 4!},$$

которые и соответствуют отброшенному коэффициенту $\tilde{A}$. Коэффициент $\tilde{B}$ при $\ln(p^2/\mu^2)$ состоит из вклада контрчленов

$$b_1 \frac{\bar{g}_{\text{st}}^3 \bar{\phi}_{\text{st}}^4}{N\epsilon (16\pi^2)^2 4!}, \quad c \frac{\bar{g}_{\text{st}}^3 \bar{\phi}_{\text{st}}^4}{N\epsilon (16\pi^2)^2 4!}$$

и вклада X диаграмм, связанных с вариациями по ϕ флуктуациям функции I . С помощью приведенного в [4] результата для функции β мы восстановили коэффициент X :

$$-a(X + 2(b_1 - 2c)) = -\frac{n^2 + 10n + 36}{6} \quad (33)$$

(ср. правую часть последнего равенства с выражением для I_1 в [4]). Последний шаг – конечная ренормировка результатов работы [4], чтобы преобразовать их к схеме МВ – был осуществлен нами следующим образом. В единичной схеме параметры a, b_1, c в (13) оказываются функциями ϵ , что добавляет некоторые конечные вклады к константам ренормировки (13) в пределе малых ϵ . Чтобы ликвидировать эти вклады мы, воспользовавшись приведенными в [4] выражениями для констант ренормировки в единичной схеме, положили, что симметричная точка вычитаний есть $\mu = 2(\pi \exp(\Psi(1) + 2))^{1/2}$. Это привело к исчезновению линейного по ϵ члена в функции $a(\epsilon)$ и, тем самым, уничтожило соответствующий вклад в константы ренормировки (13) в пределе малых ϵ . Кроме того, мы домножили результат, приведенный в работе [4], на $\exp(U^{(1)}/N) = 1 + U^{(1)}/N + O(1/N^2)$,

$$U^{(1)} = \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{216}\pi^2 \right) n^2 + \left(\frac{2}{27}\pi^2 + \frac{5}{9}\tau - \frac{35}{36} - \frac{1}{36}\gamma \right) n + \frac{22}{9}\tau + \frac{8}{27}\pi^2 - \frac{1}{18}\gamma - \frac{7}{2},$$

здесь и далее $\tau \simeq 0.749$ [4]. Это уничтожило вклад линейных по ϵ членов зависимостей $b_1(\epsilon)$, $c(\epsilon)$ в константы ренормировки (13). Окончательно преобразованный к схеме МВ результат работы [4] для вклада в функцию Грина, связанного с членом $\gamma^{(1)}$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 G_4^{(N)}\left(\gamma_4 \rightarrow \frac{\gamma_4^{(1)}}{N}\right) &= \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \frac{e^{-\alpha N\epsilon}}{(4\sqrt{3}\pi)^4} \int_0^\infty \frac{dy}{y} (\mu y)^{N\epsilon} \left(-\frac{[y^2 \bar{\phi}_{\text{st}}(y|\mathbf{p}|)]^4}{N} \times \right. \\
 &\times \left[\frac{a^2((\mu y)^{-\epsilon} - 1)^2}{\epsilon^2} + \frac{b_2((\mu y)^{-2\epsilon} - 1)^2}{\epsilon^2} + \frac{X((\mu y)^{-\epsilon} - 1)}{\epsilon} + \right. \\
 &+ \left. \frac{(b_1 - 2c)((\mu y)^{-2\epsilon} - 1)}{\epsilon} + \tilde{C} - U^{(1)} \right] + \frac{[y^2 \bar{\phi}_{\text{st}}(y|\mathbf{p}|)]^3}{N\mathbf{p}^2} (S - 2 \ln y) + \\
 &+ \left. \frac{24}{5} \frac{[y^2 \bar{\phi}_{\text{st}}(y|\mathbf{p}|)]^2}{N\mathbf{p}^4} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-a)^j}{j!} \frac{((\mu y)^{-\epsilon} - 1)^j}{\epsilon^j}, \tag{34}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 S &= -\frac{1}{80} \frac{1289 + 55n}{n + 8} + 4 \ln 2 - 3\gamma - \frac{T}{16}, \\
 T &\equiv \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty dt_3 \ln t_3 \frac{1}{(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3)^2} \times \\
 &\times \exp\left(-\frac{7t_1 t_3/3 + 4t_3^2/3 + t_1^2 + t_1 t_2 + t_2 t_3}{4(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3)/(t_1 + t_3)}\right) \approx 17.6, \\
 \tilde{C} &= -\frac{(180\gamma - 219 - 90 \ln 3)n^3}{360(n + 8)^2} + \\
 &- \frac{(-1560 \ln 3 + 12 + 35\pi^2 - 120 \ln 2 - 600\tau + 3240\gamma)n^2}{360(n + 8)^2} + \\
 &+ \frac{(22272 + 20880\gamma + 560\pi^2 - 9840 \ln 3 - 1200 \ln 2 - 7440\tau)n}{360(n + 8)^2} + \\
 &+ \frac{86880 + 2240\pi^2 + 51840\gamma - 1920 \ln 2 - 21120\tau - 24960 \ln 3}{360(n + 8)^2},
 \end{aligned}$$

а X задается соотношением (33).

Аналогично разделу 6.1 найдем вклад в $G_4^{(N)}$ выражения (34). Вместо (30), (32) нам потребуется использовать следующие формулы (справедливые в требуемом порядке разложения по $1/N$ и ϵ):

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dy}{y} y^{(N-u)\epsilon} [y^2 \bar{\phi}_{\text{st}}(y|\mathbf{p}|)]^z &\simeq \frac{(4\sqrt{3}\pi)^z}{|\mathbf{p}|^{2z}} \frac{1}{(N-u)\epsilon}, \quad z = 2, 3, 4, \\
 \int \frac{dy}{y} y^{(N-u)\epsilon} \ln y [y^2 \bar{\phi}_{\text{st}}(y|\mathbf{p}|)]^3 &\simeq -\frac{(4\sqrt{3}\pi)^3}{|\mathbf{p}|^6} \frac{1}{(N-u)^2 \epsilon^2}.
 \end{aligned}$$

Окончательно для вклада $\gamma^{(1)}$ в полюс первого порядка по ϵ функции Грина $G_4^{(N)}$ получим

$$\frac{\{G_4^{(N)}\}_1}{\epsilon} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \frac{e^{\alpha a}}{|\mathbf{p}|^8 N^2 \epsilon} \widetilde{W}_4, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_4 &= \alpha^2 a^2 + 4b_2 \alpha^2 - X\alpha - 2\alpha(b_1 - 2c) + \widetilde{C} - U^{(1)} + \frac{\sqrt{3}(S - 2\alpha)}{12\pi} + \frac{1}{10\pi^2} \simeq \\ &\simeq \frac{7879.39 + 3982.50n + 755.17n^2 + 63.07n^3 + 1.924n^4}{(n+8)^2}. \end{aligned}$$

Суммируя (32) и (35), находим вычет в $\epsilon = 0$ частично ренормированной функции $G_4^{(N)}$ в $(4 - \epsilon)$ -схеме МВ в главном и поправочном члене $1/N$ -разложения.

7. КОНСТАНТЫ РЕНОРМИРОВКИ И КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

Конечность ренормированной функции G_{4R} позволяет вычислить асимптотику константы ренормировки Z_g .

Для ренормированной вершинной функции Грина вплоть до N -го порядка по g имеем

$$G_{4R} = Z_\varphi^4 \left[- \text{X} g Z_g + \frac{(n+8)}{6} \text{X} g^2 Z_g^2 + \dots + g^N Z_g^N G_4^{(N)} \right]. \quad (36)$$

В последнем равенстве подразумевается, что диаграммы содержат лишь поверхностные расходимости (при их вычислении учитываются контрчлены вплоть до порядка g^{N-1}), а первый полюс констант ренормировки Z_g , Z_φ содержит лишь слагаемые, соответствующие контрчленам порядка g^N .

Вклады в правую часть (36) порядка g^N , имеющие полюсы первого порядка по ϵ , должны сокращаться. Это приводит к следующему выражению для константы ренормировки Z_g в асимптотике больших N (см. (I.30)–(I.31)):

$$-\frac{\{Z_g^{(N-1)}\}}{\epsilon} + \frac{\{G_4^{(N)}\}}{\epsilon} = 0. \quad (37)$$

Мы перешли здесь к ампутированной функции $\{G_4^{(N)}\}$, опустив очевидный множитель $1/|\mathbf{p}|^8$. Подставляя вычисленную нами функцию $\{G_4^{(N)}\}$ (сумму выражений (32) и (35)), а также учитывая, что

$$C_4^{(N+1)} \approx -N C_4^{(N)} \left(1 + \frac{3 + n/2}{N} \right),$$

получаем окончательный результат для асимптотики $\{Z_g\}$:

$$\{Z_g^{(N)}\}_{\text{asympt}} = -\frac{C_4^{(N)}}{16\pi^2} e^{\alpha a} \left(1 + \frac{3 + n/2 + \widetilde{W}_4 - W_4}{N} \right). \quad (38)$$

Здесь и далее $Z_i^{(N)}$ в окончательных выражениях обозначает коэффициент при u^N в выражении для Z_i , $u \equiv g/(16\pi^2)$, как это принято в схеме МВ [11].

Получив данный результат, интересно выяснить, насколько учет поправки по $1/N$ к асимптотике (38) улучшает аппроксимацию коэффициентов $Z_g^{(N)}$. В табл. 1 приведены для сравнения точные $(\{Z^{(N)}\}_{\text{exact}})$ [11], а также асимптотические $(\{Z^{(N)}\}_{\text{asympt}})$ значения коэффициентов в случае $n = 1$ без учета и с учетом поправочного члена. Можно видеть, что учет вычисленной в данной работе поправки к асимптотической формуле Липатова приводит к существенному улучшению результатов – последний точно вычисленный вклад $\{Z^{(5)}\}_{\text{exact}}$ отличается от соответствующего асимптотического значения теперь уже не в семьдесят пять, а примерно в два раза, причем наблюдается монотонность в приближении $\{Z^{(N)}\}_{\text{exact}}$ к $\{Z^{(N)}\}_{\text{asympt}}$. Аналогичная ситуация имеет место и для $n = 2, 3, \dots$.

ТАБЛИЦА 1. Точно вычисленные члены разложения констант ренормировки $\{Z^{(N)}\}_{\text{exact}}$ (однокомпонентное поле) и асимптотические значения членов разложения констант ренормировки $\{Z^{(N)}\}_{\text{asympt}}$.

$n = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
точное значение Z_g по ТВ	−2.833	10.85	−67.90	569.7
асимпт. значение Z_g в гл. порядке по $1/N$	−0.0049	0.062	−0.68	7.51
асимпт. значение Z_g с поправкой по $1/N$	−0.405	3.42	−28.4	251

Итоговая формула (38) позволяет также провести сравнение известных порядков $(4 - \epsilon)$ -разложения и соответствующих асимптотических значений для критического индекса η . Упомянутый индекс определяется, как известно, соотношениями

$$\eta = 2\gamma_\varphi(g_*), \quad \gamma_i^{(N)}{}_{\text{asympt}} = -N\{Z_i^{(N)}\}_{\text{asympt}},$$

положение фиксированной точки g_* задается уравнением $\beta(g_*) = -g_*(\epsilon + \gamma_g(g_*)) = 0$. При вычислении первой поправки по $1/N$ в выражении для $\eta_{\text{asympt}}^{(N)}$ константу ренормировки $Z_\varphi^{(N)}$ достаточно учесть лишь в главном по $1/N$ порядке; соответствующее выражение

$$Z_\varphi^{(N)}{}_{\text{asympt}} = -\frac{C_4^{(N)}(n+2)e^{\alpha a}}{2304\pi^2 N^2}$$

было вычислено в [3]²⁾. Окончательно для асимптотики высоких порядков разложения

²⁾ При цитировании упомянутой формулы мы исправили опечатку в [3] (потерянный множитель $1/N$ в первом слагаемом формулы (I.35)) и несколько упростили ответ, используя введенные в данной статье константы.

индекса η мы получили

$$\eta_{\text{asymp}}^{(N)} = -\frac{C_4^{(N)} Z_\varphi^{(2)}}{2\pi^2 a^{N+1}} e^{\alpha a + 2Z_g^{(2)}/a} \left[1 + \frac{\Omega}{N} \right],$$

$$\Omega = -\widetilde{W}_4 + W - \frac{7+n}{2} [e^{-2Z_g^{(2)}/a} + 1] + \frac{3Z_g^{(3)}}{a} - \frac{4Z_g^{(2)}}{a^2} +$$

$$+ \frac{3Z_g^{(2)}}{a} + 4 \left(\frac{Z_g^{(2)}}{a} \right)^2 - \frac{n}{2} - \frac{9Z_\varphi^{(3)}}{4Z_\varphi^{(2)}} + \frac{(n+2)a}{576}.$$

Входящие в это выражение начальные коэффициенты разложения констант ренормировки в $(4-\epsilon)$ -схеме МВ имеют следующий вид:

$$Z_g^{(1)} \equiv a, \quad Z_g^{(2)} = -\frac{3n+14}{6}, \quad Z_g^{(3)} = \frac{33n^2 + 922n + 2960 + 96\zeta(3)(5n+22)}{648},$$

$$Z_\varphi^{(2)} = -\frac{n+2}{72}, \quad Z_\varphi^{(3)} = \frac{(n+2)(n+8)}{1296}.$$

Как и в случае константы ренормировки Z_g , поправка к асимптотике для критического индекса η существенно улучшает асимптотический результат (см. табл. 2).

ТАБЛИЦА 2. Точно вычисленные члены разложения критического индекса $\{\eta^{(N)}\}_{\text{exact}}$ (однокомпонентное поле) и асимптотические значения членов разложения критического индекса $\{\eta^{(N)}\}_{\text{asymp}}$ ³⁾

$n = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
точное значение η по ТВ	0.0185	0.0187	−0.00833	0.02566
асимпт. значение η в гл. порядке	$9.2 \cdot 10^{-6}$	$-3.9 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$-5.2 \cdot 10^{-4}$
асимпт. значение η с поправкой	$-8.2 \cdot 10^{-4}$	0.00229	−0.00626	0.01821

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы вычислили поправку к асимптотической формуле Липатова с учетом особенностей $(4-\epsilon)$ -схемы МВ. Данная поправка существенно улучшает выход коэффициентов ТВ на асимптотический режим: уже пятипетлевые результаты удовлетворительно описываются теперь асимптотической формулой. Таким образом, мы вынуждены заключить, что учет данной поправки необходим для улучшения точности вычислений при пересуммировании результатов методами Бореля, Бореля–Лероя.

Кроме того, мы продемонстрировали, что дальнейшее улучшение точности вычисления критических индексов может осуществляться не только при помощи вычисления

³⁾ В таблице по сравнению с [3] исправлены опечатки.

последующих порядков ТВ, но и путем расчета последующих поправок по $1/N$ к липатовской асимптотике, причем в рамках $(4 - \epsilon)$ -схемы МВ значение последнего метода особенно велико. Действительно, согласно прогнозу, данному для данной схемы в работе [3], ряды $(4 - \epsilon)$ -разложений выйдут на главный член липатовской асимптотики лишь в десятом – одиннадцатом порядке ТВ. Поскольку количество диаграмм и, следовательно, объем вычислений лавинообразно растут с ростом порядка ТВ, не исключено, что поиск дальнейших поправок к липатовской асимптотике является перспективной задачей на данном этапе исследований.

Список литературы

- [1] Л. Н. Липатов. ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 411.
- [2] E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 1544.
- [3] М. В. Комарова, М. Ю. Налимов. ТМФ. 2001. Т. 126. С. 409.
- [4] Ю. А. Кубышин. ТМФ. 1983. Т. 57. С. 363.
- [5] А. Г. Ушверидзе. Ядерная физика. 1983. Т. 38. С. 798.
- [6] J. Honkonen, M. Nalimov. Phys. Lett. B. 1999. V. 459. P. 582.
- [7] J. Honkonen, M. Komarova, M. Nalimov. Acta Physica Slovaca. 2002. V. 52. P. 303.
- [8] И. М. Сулов. ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 220.
- [9] М. В. Комарова, М. Ю. Налимов. ТМФ. 2001. Т. 129. С. 387.
- [10] V. G. Makhankov. Phys. Lett. A. 1977. V. 61. P. 431.
- [11] А. Н. Васильев. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. С-Пб.: Изд-во ПИЯФ, 1998.
- [12] A. J. McKane, D. J. Wallace. J. Phys. A. 1978. V. 11. P. 2285.

Поступила в редакцию 30.VII.2004 г.