Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Л. Луо, Квантовая и классическая неопределенности, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 2, 231–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:03:32

КВАНТОВАЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Неопределенность наблюдаемой в квантовом состоянии обычно описывается дисперсией. Это описание хорошо приспособлено к случаю, когда состояния являются чистыми. Однако для смешанных состояний ситуация становится более сложной, и дисперсия оказывается гибридом, в котором квантовая и классическая неопределенности смешаны друг с другом. Приняв в качестве мотивировки понятие информации Фишера в теории статистического вывода, устанавливается разложение дисперсии на квантовую и классическую части. Ключевое наблюдение состоит в том, что косую информацию Вигнера–Янаса (выделенный вид квантовой информации Фишера) можно интерпретировать как меру квантовой неопределенности. Устанавливается также разложение обычной ковариации на квантовую и классическую части. Результаты, открывающие новые перспективы в понимании неопределенностей и корреляций, применяются к количественному выражению запутывания, а также к установлению нового соотношения неопределенностей в чисто квантовых терминах.

Ключевые слова: классическая неопределенность, квантовая неопределенность, косая информация, квантовая корреляция, запутывание, принцип неопределенности

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционно, с фундаментальной точки зрения, квантовое состояние обычно молчаливо предполагается чистым на том основании, что смешанные состояния возникают только при наличии создающей шум среды и их можно выразить как выпуклые комбинации чистых состояний (но не наоборот). По ряду причин эта точка зрения серьезно осложняет анализ тонких и фундаментальных свойств смешанных состояний.

Во-первых, в то время как смешанное состояние можно представить как выпуклую комбинацию чистых состояний, такое представление всегда не единственно! Из-за этого редукция смешанных состояний в чистые вызывает неожиданные трудности и нелегкие проблемы в исследовании неопределенностей и запутывания смешанных состояний. Для смешанных состояний поведение запутываний и нарушения неравенств Белла являются гораздо более интригующими и ускользающими от понимания, чем для чистых состояний [1].

* Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China; School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Canada. E-mail: luosl@amt.ac.cn

Во-вторых, когда составная квантовая система находится в чистом состоянии, которое является запутанным, ее подсистемы оказываются в смешанных состояниях. Такова типичная картина, определяющую роль в которой играют редуцированные операторы плотности, имеющие место при квантовых измерениях, а также при количественном выражении запутывания [2].

В-третьих, как недавно было показано Хендерсоном и др. [3], не все смешанные состояния можно получить из чистых посредством введения локального шума. Это весьма сильно ограничивает класс смешанных состояний многочастичных систем, которые возникают в средах с шумом, если шум является локальным.

Наконец, в классических теориях игр и статистического вывода хорошо известно, что стратегии, основанные на смешанных состояниях, могут быть предпочтительнее любых чистых в общих ситуациях, и в знаменитой теореме существования равновесия Нэша требуются смешанные стратегии (основанные на смешанных состояниях) в качестве фундаментальных ингредиентов [4]. Если мы примем точку зрения, что квантовая теория относится не столько к природе, сколько к статистическому знанию и синтезу информации о природе (см., например, [5], [6] и приведенную там библиографию), и будем следовать подходу к квантовой теории в рамках теории статистического вывода, нам придется рассматривать смешанные состояния как определяющий составной элемент. Это подтверждается также теоремой Глисона, которая утверждает, что в очень общем смысле любое квантовое состояние имеет вид смешанного состояния [7]. Мермин даже подчеркивал, что смешанные состояния, как и проистекающие из них корреляции, составляют единственную фундаментальную, неприводимую и объективную физическую реальность [8].

К несчастью (или к счастью), свойство смешанных состояний состоит в том, что они включают в себя информацию и о классическом смешивании, и о квантовом состоянии. Эти два весьма различных вида информации переплетены, и совместно с суперпозицией и интерференцией они обычно приводят к сложным и неоднозначным результатам. Задача их распутывания имеет как теоретическое значение, так и практическую важность из-за возросшего в последнее время интереса к квантовой теории информации [9]. Несколько авторов обращались к этой теме в контексте разделения корреляций на квантовую и классическую части [10], и значительный объем литературы посвящен количественному выражению запутывания как нелокальной квантовой корреляции [2]. Основные средства, применяемые во всех этих работах, представляют собой ряд понятий, связанных с энтропией фон Неймана (или относительной энтропией) и теорией общения. В данной работе мы обратимся к задаче распутывания в контексте неопределенности, индуцированной смешанными состояниями, используя квантовый аналог информации Фишера.

В рамках стандартной практики и формализма квантовой механики неопределенность наблюдаемой A в квантовом состоянии ρ обычно выражается дисперсией как

$$V(\rho, A) := \text{tr } \rho A_0^2 = \text{tr } \rho A^2 - (\text{tr } \rho A)^2.$$

Здесь tr обозначает след, $A_0 := A - \text{tr } \rho A$. В частности, если состояние $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ является чистым,

$$V(|\psi\rangle\langle\psi|, A) = \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2.$$

Описание неопределенности в терминах дисперсии вполне пригодно, когда состояния являются чистыми, но принимает сложный вид, когда состояния являются смешанными, поскольку тогда два вида вкладов, один *квантовый*, а другой *классический*, смешаны вместе в полную дисперсию. Желательно разделить неопределенность (дисперсию) на две части:

$$\text{неопределенность} = \text{квантовая часть} + \text{классическая часть}.$$

Как только такое достигнуто, полезно также разделить корреляции на квантовую и классическую части посредством процедуры поляризации.

Поэтому мы будем искать разложение

$$V(\rho, A) = Q(\rho, A) + C(\rho, A),$$

в котором $Q(\rho, A)$ соответствует *квантовой* неопределенности, а $C(\rho, A)$ — *классической*, тогда как $V(\rho, A)$ обозначает полную неопределенность (дисперсию). Разумеется, не следует ожидать единственного и универсального решения такой задачи, но для того чтобы разложение было интуитивно обоснованным и разумным, необходимо выполнение следующих требований.

1. Являясь мерой *квантовой* неопределенности, $Q(\rho, A)$ должна быть выпуклой (субаддитивной) функцией ρ , поскольку *классическое* смешивание не увеличивает квантовую неопределенность. Таким образом,

$$Q\left(\sum_i \lambda_i \rho_i, A\right) \leq \sum_i \lambda_i Q(\rho_i, A)$$

для $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, и квантового состояния ρ_i . Наоборот, будучи мерой *классической* неопределенности, $C(\rho, A)$ должна быть вогнутой (супераддитивной) функцией ρ , поскольку к классическое смешивание увеличивает классическую неопределенность. Таким образом,

$$C\left(\sum_i \lambda_i \rho_i, A\right) \geq \sum_i \lambda_i C(\rho_i, A).$$

2. В предельном случае, когда состояние ρ является чистым, должно быть $Q(\rho, A) = V(\rho, A)$ и $C(\rho, A) = 0$, поскольку при этом нет классического смешивания и все неопределенности являются квантовыми.

3. Когда ρ и A коммутируют, должно быть $Q(\rho, A) = 0$ и $C(\rho, A) = V(\rho, A)$, поскольку можно использовать представление, где ρ и A одновременно диагональны. В этом представлении и ρ , и A ведут себя как классические переменные, и таким образом все неопределенности являются классическими. Альтернативным образом можно показать, что, когда ρ и A коммутируют, любое собственное состояние ρ также является собственным состоянием наблюдаемой A . Но в любом собственном состоянии неопределенность наблюдаемой A обращается в нуль, а ρ является классическим смешиванием своих собственных состояний, и поэтому квантовая неопределенность также должна обращаться в нуль, потому что классическое смешивание не увеличивает квантовую неопределенность.

Приняв эти интуитивно обоснованные требования и взяв за мотивировку понятие информации Фишера в теории статистического вывода [11], [12], в разделе 2 мы сначала предлагаем два естественных разветвления понятия дисперсии для квантовых состояний. Далее в разделе 3 мы используем новую меру неопределенности для изучения квантовых корреляций (запутываний) и принципа неопределенностей Гейзенберга. Наконец, завершающие статью обсуждения приведены в разделе 4.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ: КВАНТОВЫЕ ПРОТИВ КЛАССИЧЕСКИХ

Мы предлагаем следующие две величины в качестве меры неопределенности наблюдаемой A в квантовом состоянии ρ :

$$P(\rho, A) := \frac{1}{2} \operatorname{tr} \{ \rho^{1/2}, A_0 \}^2,$$

$$Q(\rho, A) := -\frac{1}{2} \operatorname{tr} [\rho^{1/2}, A_0]^2.$$

Здесь $\{A, B\} := AB + BA$ – антикоммутатор, $[A, B] := AB - BA$ – коммутатор, а $A_0 = A - \operatorname{tr} \rho A$. Заметим, что, поскольку коммутатор двух самосопряженных операторов является косым относительно сопряжения, знак минус в определении $Q(\rho, A)$ требуется для того, чтобы гарантировать положительность этой величины. Как мы увидим, $P(\rho, A)$ и $Q(\rho, A)$ обладают важным информационным и физическим содержанием. Ясно, что $Q(\rho, A)$ тоже можно записать в виде

$$Q(\rho, A) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} [\rho^{1/2}, A]^2.$$

Другими словами, нам нет нужды сдвигать A с целью добиться нулевого среднего. Но не такова ситуация для $P(\rho, A)$. Формально $Q(\rho, A)$ и $P(\rho, A)$ также можно записать как

$$P(\rho, A) = \operatorname{tr} \rho A_0^2 + \operatorname{tr} \rho^{1/2} A_0 \rho^{1/2} A_0, \quad (1)$$

$$Q(\rho, A) = \operatorname{tr} \rho A_0^2 - \operatorname{tr} \rho^{1/2} A_0 \rho^{1/2} A_0. \quad (2)$$

Введем далее

$$C(\rho, A) := \frac{1}{2} (P(\rho, A) - Q(\rho, A)).$$

Очевидно, что

$$C(\rho, A) = \operatorname{tr} \rho^{1/2} A_0 \rho^{1/2} A_0. \quad (3)$$

Введенные величины удовлетворяют следующим соотношениям:

- а) $P(\rho, A) = Q(\rho, A) = V(\rho, A)$, если ρ является чистым;
- б) $P(\rho, A) \geq V(\rho, A) \geq Q(\rho, A)$ для любого смешанного состояния;
- в) $P(\rho, A) + Q(\rho, A) = 2V(\rho, A)$ для любого смешанного состояния;
- г) $P(\rho, A) - Q(\rho, A) = 2C(\rho, A)$ для любого смешанного состояния.

Только соотношение б) требует доказательства. По циклическому свойству следа имеем

$$\mathrm{tr} \rho^{1/2} A_0 \rho^{1/2} A_0 = \mathrm{tr} (\rho^{1/4} A_0 \rho^{1/4}) (\rho^{1/4} A_0 \rho^{1/4}),$$

что неотрицательно, потому что $\rho^{1/4} A_0 \rho^{1/4}$ является самосопряженным. Следовательно, в силу уравнения (2)

$$Q(\rho, A) \leq \mathrm{tr} \rho A_0^2 = V(\rho, A).$$

Второе неравенство может быть получено аналогично.

Теперь мы имеем три меры неопределенности: $V(\rho, A)$, $P(\rho, A)$ и $Q(\rho, A)$. Они совпадают для чистого состояния, но различаются для смешанных состояний. В отношении обычной дисперсии $V(\rho, A)$ две последние занимают симметричное положение. Целесообразно сфокусироваться на $V(\rho, A)$ и $Q(\rho, A)$, поскольку первая величина является хорошо известной и вездесущей, тогда как вторая включает коммутатор и, более того, является в действительности старой концепцией, обладающей внутренним информационным содержанием, хотя большинство физиков им и пренебрегают: $Q(\rho, A)$ является в точности кривой информации, введенной Вигнером и Янасе в 1963 г. при изучении информационного содержания квантовых состояний [13]. Их интерпретация состоит в том, что $Q(\rho, A)$ выражает информационное содержание квантового состояния ρ по отношению к наблюдаемым, не коммутирующим с наблюдаемой A , которая служит сохраняющейся величиной (т.е. косым по отношению к ней). Эта интерпретация уходит корнями и в квантовую теорию измерений [14], и в теорию статистического вывода как разновидность квантовой информации Фишера [12].

Наше ключевое наблюдение состоит в том, что $Q(\rho, A)$ можно также рассматривать как выражение *информации* о наблюдаемых, не коммутирующих с A в состоянии ρ (косых, сопряженных по отношению к ней); при этом ввиду принципа дополнительности Бора мы можем интерпретировать $Q(\rho, A)$ как некий вид *неопределенности* самой A в состоянии ρ . Действительно, $Q(\rho, A)$ есть как раз дисперсия $V(\rho, A)$, если ρ – чистое состояние.

Из уравнений (2) и (3) получаем следующее разложение обычной дисперсии, которая составляет центральный предмет нашего внимания:

$$V(\rho, A) = Q(\rho, A) + C(\rho, A). \quad (4)$$

Мы интерпретируем $Q(\rho, A)$ как *квантовую*, а $C(\rho, A)$ – как *классическую* часть полной неопределенности (дисперсии) $V(\rho, A)$. Проверая впрямую и принимая во внимание результаты Вигнера–Янасе [13] и Либа [15], мы видим, что приведенное выше разложение удовлетворяет требованиям, постулированным в требованиях 1–3. Далее, $Q(\rho, A)$ и $C(\rho, A)$ имеют следующие замечательные свойства [12], [14], [15].

1. Для любого унитарного оператора U выполнено

$$Q(U\rho U^\dagger, UAU^\dagger) = Q(\rho, A).$$

В частности, $Q(U\rho U^\dagger, A) = Q(\rho, A)$, если U коммутирует с A . Особый интерес представляет случай $U = e^{-itA}$, $t \in \mathbb{R}$, когда состояние ρ эволюционирует в $\rho_t = e^{-itA} \rho e^{itA}$ согласно уравнению Ландау–фон Неймана. При этом $Q(\rho_t, A) = Q(\rho, A)$; это означает,

что квантовая неопределенность остается постоянной для изолированной системы, которая подчиняется динамике Ландау–фон Неймана.

2. Пусть ρ_1 и ρ_2 – два квантовых состояния, описывающих первую и вторую системы, соответственно, а A_1 и A_2 – две наблюдаемых. Тогда

$$Q(\rho_1 \otimes \rho_2, A_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes A_2) = Q(\rho_1, A_1) + Q(\rho_2, A_2).$$

Здесь I_1 и I_2 являются тождественными операторами на первой и второй системах, соответственно.

3. Пусть ρ – квантовое состояние на составной квантовой системе, $\rho_1 = \text{tr}_2 \rho$ – маргинальное квантовое состояние, полученное взятием следа ρ по второй подсистеме. Пусть A_1 – наблюдаемая для первой квантовой подсистемы. Тогда

$$Q(\rho, A_1 \otimes I_2) \geq Q(\rho_1, A_1).$$

Для $C(\rho, A)$ все приведенные выше соотношения верны с обращенными неравенствами.

Поэтому, если мы будем использовать двумерный вектор $(Q(\rho, A), C(\rho, A))$ для выражения неопределенности наблюдаемой A в состоянии ρ , то получим более прозрачную картину, в которой видны различные вклады квантовой и классической неопределенностей в полную неопределенность (дисперсию).

Проиллюстрируем уравнение (4) на типичном примере. Рассмотрим составную квантовую систему $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, где $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = N$. Пусть H_1 и H_2 – две наблюдаемые на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, соответственно, со спектральными разложениями

$$H_1 = \sum_i \alpha_i |i_1\rangle\langle i_1|, \quad H_2 = \sum_i \beta_i |i_2\rangle\langle i_2|. \quad (5)$$

Без потери общности полагаем, что $\{|i_1\rangle\}$ и $\{|i_2\rangle\}$ составляют ортонормированные базисы для $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, соответственно. Положим $A = H_1 \otimes H_2$ и выберем два квантовых состояния составной системы в виде

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle; \quad (6)$$

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{i}} |\mathbf{i}\rangle\langle\mathbf{i}|, \quad |\mathbf{i}\rangle = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle. \quad (7)$$

С точки зрения корреляций состояния ρ и σ весьма различны: первое есть максимально запутанное состояние типа Белла, а второе – просто классическая смесь состояний в произведении. Состояние ρ является чистым, и все неопределенности неприводимым образом квантовые, а потому следует ожидать, что $Q(\rho, A) = V(\rho, A)$ и $C(\rho, A) = 0$. Состояние σ является *классической* смесью собственных состояний наблюдаемой A . Поскольку неопределенность наблюдаемой A в любом из ее собственных состояний равна нулю, а классическое смешивание не может создать квантовую неопределенность, следует ожидать, что $Q(\sigma, A) = 0$. С другой стороны, классическое смешивание учитывает всю неопределенность наблюдаемой A в состоянии σ , и, таким образом, мы должны

иметь $C(\sigma, A) = V(\sigma, A)$. Прямое вычисление согласно уравнениям (2) и (3) действительно приводит к

$$\begin{aligned} V(\rho, A) &= \frac{1}{N} \sum_i \alpha_i^2 \beta_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_i \alpha_i \beta_i \right)^2, \\ Q(\rho, A) &= \frac{1}{N} \sum_i \alpha_i^2 \beta_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_i \alpha_i \beta_i \right)^2, \\ C(\rho, A) &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} V(\sigma, A) &= \frac{1}{N} \sum_i \alpha_i^2 \beta_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_i \alpha_i \beta_i \right)^2, \\ Q(\sigma, A) &= 0, \\ C(\sigma, A) &= \frac{1}{N} \sum_i \alpha_i^2 \beta_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_i \alpha_i \beta_i \right)^2, \end{aligned}$$

что полностью совпадает с нашими ожиданиями. Поэтому мы видим, что с помощью квантовой неопределенности можно отличить ρ от σ , тогда как обычная дисперсия не дает возможности провести различие между ними, поскольку $V(\rho, A) = V(\sigma, A)$.

3. КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Неопределенности тесно связаны с корреляциями. Простые формальные обобщения квантовых и классических неопределенностей приводят к соответствующим мерам для квантовых и классических корреляций. Пусть ρ – квантовое состояние, а A и B – любые два оператора (не обязательно наблюдаемые). В отличие от обычной ковариации

$$\text{Cov}_\rho(A, B) := \text{tr } \rho A_0^\dagger B_0$$

(где $A_0 = A - \text{tr } \rho A$, $B_0 = B - \text{tr } \rho B$, $\dagger$ обозначает сопряжение), исходя из мотивировки, подсказываемой уравнениями (2) и (3), мы определим две новые меры корреляций посредством формальной поляризации квантовой неопределенности $Q(\rho, A)$ и классической неопределенности $C(\rho, A)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\rho(A, B) &:= \text{tr } \rho A_0^\dagger B_0 - \text{tr } \rho^{1/2} A_0^\dagger \rho^{1/2} B_0, \\ \mathcal{C}_\rho(A, B) &:= \text{tr } \rho^{1/2} A_0^\dagger \rho^{1/2} B_0. \end{aligned}$$

В соответствии с этим имеем разложение обычной ковариации в виде

$$\text{Cov}_\rho(A, B) = \mathcal{Q}_\rho(A, B) + \mathcal{C}_\rho(A, B).$$

Мы называем $\mathcal{Q}_\rho(A, B)$ квантовой корреляцией, поскольку она в определенном смысле отвечает за квантовую часть ковариации, а $\mathcal{C}_\rho(A, B)$ — классической корреляцией, поскольку она учитывает ее классическую часть. Квантовая корреляция $\mathcal{Q}_\rho(A, B)$ представляет собой мощное средство для обнаружения квантовых корреляций, поскольку она является чисто квантовой мерой, освобожденной от классических корреляций, и, кроме того, имеется произвол в выборе измерительных (“пробных”) наблюдаемых A и B . В частности, когда A и B коммутируют, квантовая корреляция $\mathcal{Q}_\rho(A, B)$ допускает следующую интерпретацию в виде формального обобщения перекрестной информации Фишера для совместных плотностей вероятности: если $\rho_{s,t}$ удовлетворяет уравнениям Ландау–фон Неймана с каждым из параметров s и t ,

$$i \frac{\partial \rho_{s,t}}{\partial s} = [A, \rho_{s,t}], \quad i \frac{\partial \rho_{s,t}}{\partial t} = [B, \rho_{s,t}], \quad \rho_{0,0} = \rho,$$

то

$$\mathcal{Q}_\rho(A, B) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \sqrt{\rho_{s,t}}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{\rho_{s,t}}}{\partial t} \right),$$

что напоминает классическую перекрестную информацию Фишера. Чтобы доказать утверждение, заметим, что A и B коммутируют и, таким образом, $\mathcal{Q}_\rho(A, B) = \mathcal{Q}_\rho(B, A)$. Более того, из приведенных выше уравнений Ландау–фон Неймана следует, что

$$\rho_{s,t} = e^{-isA - itB} \rho e^{isA + itB}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

и поэтому из циклического свойства следа немедленно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{\rho_{s,t}}}{\partial s} &= i e^{-isA - itB} [\rho^{1/2}, A] e^{isA + itB}, \\ \frac{\partial \sqrt{\rho_{s,t}}}{\partial t} &= i e^{-isA - itB} [\rho^{1/2}, B] e^{isA + itB}. \end{aligned}$$

Квантовые корреляции имеют следующие свойства:

- а) $\mathcal{Q}_\rho(A, B) = \overline{\mathcal{Q}_\rho(B, A)}$;
- б) $\mathcal{Q}_\rho(A - a, B - b) = \mathcal{Q}_\rho(A, B)$ для любых вещественных констант a, b ;
- в) $\mathcal{Q}_\rho(aA, bB) = ab \mathcal{Q}_\rho(A, B)$ для любых вещественных констант a, b ;
- г) $\mathcal{Q}_{U\rho U^{-1}}(A, B) = \mathcal{Q}_\rho(U^{-1}AU, U^{-1}BU)$ для любого унитарного оператора U .

Как можно использовать нашу меру $\mathcal{Q}_\rho(A, B)$ квантовой корреляции для характеристики запутывания? Обращаясь к этой задаче, следует подчеркнуть, что запутывание является *нелокальной* квантовой корреляцией. Если мы используем квантовую корреляцию $\mathcal{Q}_\rho(A, B)$ для выражения запутывания, нам следует выбрать A и B в виде *локальных* наблюдаемых, определенных на различных системах, имеющих компоненты. Тогда $\mathcal{Q}_\rho(A, B)$ есть квантовая корреляция состояния ρ , определенная на двух локальных “пробных” наблюдаемых A и B . При этом естественно ввести новую меру запутывания

$$\mathcal{E}(\rho) := \sup_{A, B} \mathcal{Q}_\rho(A, B),$$

где точная верхняя грань берется по всем A и B вида $A = H_1 \otimes I_2$, $B = I_1 \otimes H_2$, H_1 и H_2 являются наблюдаемыми на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, соответственно, с *нормой меньше 1*, и ρ – квантовое состояние в составной квантовой системе $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Рассмотрим пример. Пусть H_1 и H_2 такие же, как в уравнении (5), и состояния ρ и σ даются уравнениями (6) и (7). Пусть

$$A = H_1 \otimes I_2, \quad B = I_1 \otimes H_2.$$

Тогда прямое вычисление приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \text{Cov}_\rho(A, B) &= \text{Cov}_\sigma(A, B) = \frac{1}{N} \sum_i (\alpha_i - \bar{\alpha})(\beta_i - \bar{\beta}), \\ \mathcal{Q}_\rho(A, B) &= \frac{1}{N} \sum_i (\alpha_i - \bar{\alpha})(\beta_i - \bar{\beta}), \quad \mathcal{Q}_\sigma(A, B) = 0, \\ \mathcal{C}_\rho(A, B) &= 0, \quad \mathcal{C}_\sigma(A, B) = \frac{1}{N} \sum_i (\alpha_i - \bar{\alpha})(\beta_i - \bar{\beta}). \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\alpha} = (1/N) \sum_i \alpha_i$, $\bar{\beta} = (1/N) \sum_i \beta_i$. Таким образом, мы видим, что квантовая корреляция (а тем самым и классическая корреляция) способна различить состояния ρ и τ , тогда как обычная ковариация не может это сделать. Более того, простой анализ показывает, что $\mathcal{E}(\sigma) = 0$ для всех N , $\mathcal{E}(\rho) = 1$ для четных N и $\mathcal{E}(\rho) = 1 - 1/N^2$ для нечетных N .

В качестве еще одного применения меры квантовой неопределенности и квантовой корреляции мы имеем следующее соотношение неопределенностей, которое выражается в чисто квантовых терминах и, более того, включает и несовместность, и корреляцию между наблюдаемыми:

$$Q(\rho, A)Q(\rho, B) \geq |\text{Re}(\mathcal{Q}_\rho(A, B))|^2.$$

Здесь Re обозначает вещественную часть комплексного числа. Доказательство следует из того, что $\text{Re } \mathcal{Q}_\rho(\cdot, \cdot)$ является внутренним произведением, к которому применимо неравенство Шварца.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, мы предложили некоторые новые меры неопределенностей и корреляций, используя косую информацию Вигнера–Янаса. Это приводит к разложениям, разбивающим обычную дисперсию и ковариацию на квантовую и классическую части и, кроме того, предлагает новое средство для исследования соотношений между квантовыми и классическими аспектами смешанных состояний и корреляций. Данный подход лежит в общем русле понимания квантовой механики в рамках информационной перспективы [6], [16]–[19].

Благодарности. Работа поддержана NSERC Canada Grant (университет Карлтона, Оттава, Канада). Автор благодарен профессору М. Ксого и профессору В. Жиш-кович за приглашение.

Список литературы

- [1] *R. F. Werner*. Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 4277; *S. Popescu*. Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 797; 1995. V. 74. P. 2619; *M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki*. Phys. Lett. A. 1995. V. 200. P. 340; Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 5239; *N. Gisin*. Phys. Lett. A. 1996. V. 210. P. 151; *H. Barnum, C. M. Caves, C. A. Fuchs, R. Jozsa, B. Schumacher*. Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 2818; *C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters*. Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 3824.
- [2] *V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, P. L. Knight*. Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 2275; *V. Vedral, M. B. Plenio*. Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 1619; *G. Vidal*. J. Mod. Opt. 2000. V. 47. P. 355; *G. Vidal, R. F. Werner*. Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 032314; *M. Horodecki*. Quantum Inf. Comput. 2001. V. 1 (1). P. 3; *W. K. Wootters*. Quantum Inf. Comput. 2001. V. 1 (1). P. 27; *R. F. Werner, M. M. Wolf*. Quantum Inf. Comput. 2001. V. 1 (3). P. 1.
- [3] *L. Henderson, N. Linden, S. Popescu*. Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 237901.
- [4] *J. von Neumann, O. Morgenstern*. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton Univ. Press, 1944; *R. D. Luce, H. Raiffa*. Games and Decisions. N.Y.: Wiley, 1957.
- [5] *J. Summhammer*. Found. Phys. Lett. 1988. V. 1. P. 113; Int. J. Theor. Phys. 1994. V. 33. P. 171.
- [6] *A. Peres*. Quantum Theory: Concepts and Methods. Dordrecht: Kluwer, 1993; *C. M. Caves, C. A. Fuchs, R. Schack*. Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 022305; *C. A. Fuchs*. J. Mod. Opt. 2003. V. 50. P. 987; *A. M. Gleason*. J. Math. Mech. 1957. V. 6. P. 885; *P. Busch*. Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 120403.
- [7] *B. R. Frieden*. Physics from Fisher Information: A Unification. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1998.
- [8] *N. D. Mermin*. Pramana. 1998. V. 51. P. 549; quant-ph/960913; Am. J. Phys. 1998. V. 66. P. 753.
- [9] *M. A. Nielsen, I. L. Chuang*. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2000.
- [10] *L. Henderson, V. Vedral*. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 6899; Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 2263; *V. Vedral*. Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. P. 050401; *H. Ollivier, W. H. Zurek*. Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 017901; *W. H. Zurek*. Phys. Rev. A. 2003. V. 67. P. 012320.
- [11] *R. A. Fisher*. Proc. Camb. Phil. Soc. 1925. V. 22. P. 700.
- [12] *S. L. Luo*. Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 180403.
- [13] *E. P. Wigner, M. M. Yanase*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1963. V. 49. P. 910.
- [14] *E. P. Wigner*. Z. Phys. 1952. V. 133. P. 101; *H. Araki, M. M. Yanase*. Phys. Rev. 1960. V. 120. P. 622; *M. M. Yanase*. Phys. Rev. 1961. V. 123. P. 666.
- [15] *E. H. Lieb*. Adv. Math. 1973. V. 11. P. 267; *A. Wehrl*. Rev. Mod. Phys. 1978. V. 50. P. 221.
- [16] *E. Schrödinger*. Sitzungsberg Preuss. Acad. Wiss. Berlin (Phys. Math.). 1930. V. 19. P. 296; *A. Angelow, M.-C. Batoni*, transl. and annot. About Heisenberg uncertainty relation (by E. Schrödinger); quant-ph/9903100.
- [17] *J. Wheeler*. Information physics, quantum: the search for links. In: Complexity, Entropy, and Physics of Information. Ed. W.H. Zurek. Reading, MA: Addison-Wesley, 1990. P. 3.
- [18] *A. Zeilinger*. Found. Phys. 1999. V. 29. P. 631.
- [19] *S. L. Luo*. Found. Phys. 2002. V. 32. P. 1757.

Поступила в редакцию 29.VI.2004 г.