Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий, Построение формфакторов составных систем с помощью обобщенной теоремы Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 2, 258–277

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:12:55

© 2005 г.

А. Ф. Крутов*, В. Е. Троицкий†

ПОСТРОЕНИЕ ФОРМФАКТОРОВ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРЕМЫ ВИГНЕРА–ЭККАРТА ДЛЯ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Релятивистский подход к описанию электрослабых свойств двухчастичных составных систем, развитый ранее, применен к случаю ненулевого спина. Подход основан на мгновенной форме релятивистской гамильтоновой динамики. Используется специальная математическая техника параметризации матричных элементов операторов электрослабых токов в терминах формфакторов. Процедура параметризации представляет собой реализацию обобщенной теоремы Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре, используемой при рассмотрении формфакторов составных систем как обобщенных функций, а формфакторы являются приведенными матричными элементами. Матричный элемент электрослабого тока удовлетворяет условиям релятивистской ковариантности, а в случае электромагнитного тока автоматически удовлетворяет закону сохранения.

Ключевые слова: теорема Вигнера–Эккарта, группа Пуанкаре, формфакторы, составные системы, релятивистская гамильтонова динамика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение корректных количественных методов расчета структуры составных систем представляет собой важное направление исследования физики частиц. Современные экспериментальные исследования структуры частиц проводятся с такой степенью точности и при таких высоких энергиях, что обязательно требуют для описания результатов применения релятивистских теоретических методов. Важным моментом всех таких методов является выделение кинематических частей и инвариантных частей (формфакторов) матричных элементов тока. Представление матричного элемента тока в терминах формфакторов будем называть параметризацией. Следует отметить, что именно формфакторы – лоренц-инвариантные функции – определяются, как правило, из экспериментальных данных.

*Самарский государственный университет, Самара, Россия. E-mail: krutov@ssu.samara.ru

†Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: troitsky@theory.sinp.msu.ru

В релятивистской теории описания составных систем можно выделить два основных, но весьма различных подхода (см., например, [1], а также наглядную схему, приведенную на рис. 11 в обзоре [2]).

Первый – это метод теории поля. Основанный на принципах квантовой теории поля – квантовой хромодинамики (КХД), он справедливо считается наиболее последовательным подходом к решению этой проблемы. Однако стандартная пертурбативная КХД дает достаточно надежные вычислительные рецепты только для описания так называемых “жестких” процессов, которые характеризуются большими переданными импульсами, и не позволяет вычислять характеристики, определяемые “мягкими” процессами. Более того, существуют сильные доводы в пользу того, что пертурбативная КХД неприемлема для описания существующих на сегодняшний день экспериментальных фактов в эксклюзивных процессах. Это касается, в частности, описания упругих формфакторов таких хорошо изученных составных систем, как пион, нуклон, дейтрон.

Второй метод в релятивистской теории составных систем, получивший в последние годы широкое развитие, базируется на прямой реализации алгебры группы Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых в гильбертовом пространстве состояний системы. Этот подход называют теорией прямого взаимодействия, или релятивистской гамильтоновой динамикой (РГД). Обсуждение этого подхода может быть найдено, например, в работах [2], [3]. Метод исходит из совершенно других стартовых позиций в сравнении с первым. И это одна из причин трудности сопоставления результатов этих подходов. Мы не будем останавливаться подробно на описании РГД, а отошлем читателя к работе [4] и ссылкам, приведенным в ней.

Хотя упомянутые выше методы описания составных систем и весьма различны, в каждом из них необходимо решить три весьма важные проблемы.

1. Необходимо дать рецепт релятивистского учета непертурбативных эффектов. Заметим, что в случае РГД, в рамках которой мы и будем действовать, учет этих эффектов заключен непосредственно в структуре самого метода (см. [1], [4]).

2. Необходимо построить матричный элемент электрослабого тока, обладающий корректными трансформационными свойствами, и провести процедуру релятивистской параметризации матричного элемента тока, т.е. выделить релятивистски-инвариантные формфакторы.

3. Необходимо учитывать, что формфакторы составной системы имеют, вообще говоря, смысл обобщенных функций (даже в нерелятивистском случае).

В простых случаях параметризация проводится достаточно легко из общих соображений. Но в более сложных случаях (например, для составных систем с ненулевым полным моментом) необходимо построение специальной математической техники.

Целью настоящей работы является построение общего метода параметризации для случая составных систем с ненулевым спином. Он был анонсирован нами в кратком сообщении [5]. Здесь мы приведем последовательное изложение метода, дающее возможность непосредственно применять его к конкретным составным системам. Наш метод в некотором смысле подобен методу канонической параметризации одночастичных матричных элементов полевых операторов [6]. Подчеркнем, что сейчас мы имеем дело с

РГД, а не с теорией поля, как в [6].

По своей сути наш метод параметризации представляет собой реализацию теоремы Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре, а формфакторы являются приведенными матричными элементами. Эта теорема широко используется в различных областях теоретической и математической физики, начиная с хорошо известной теории углового момента и вплоть до алгебры Хопфа и квантовой супералгебры [7].

В настоящей работе мы говорим об обобщенной теореме Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре, используемой при рассмотрении формфакторов составных систем как обобщенных функций. Необходимость такого рассмотрения была показана в [1], [4] при исследовании формфакторов составных систем с нулевым полным спином.

Содержание работы следующее.

В разделе 2 описывается процедура канонической параметризации матричных элементов локальных операторов, взятых между состояниями одной частицы любого спина, т.е. процедура выделения приведенных матричных элементов на группе Пуанкаре. Получены формулы для матричного элемента оператора электромагнитного тока частицы спина $1/2$.

В разделе 3 дается процедура построения оператора электромагнитного тока для системы двух свободных частиц спина $1/2$. Матричный элемент тока вычисляется в базисе с отделенным движением центра инерции. Электромагнитные свойства системы описываются приведенными матричными элементами, или так называемыми свободными двухчастичными формфакторами, которые имеют смысл обобщенных функций. Это означает, например, что статические моменты задаются как слабые пределы при $Q^2 \rightarrow 0$ ($Q^2 = -q^2$, q – переданный импульс). Отдельно рассмотрен частный случай, когда полный спин системы равен 1, а орбитальный момент равен нулю. В этом случае электромагнитные свойства описываются четырьмя свободными двухчастичными формфакторами – зарядовым, квадрупольным, магнитным, а также магнитным квадрупольным формфактором второго рода (см. обзор [8] и приведенные там ссылки).

В разделе 4 разрабатывается процедура построения матричного элемента оператора электромагнитного тока системы из двух взаимодействующих частиц. Предложенный метод канонической параметризации матричного элемента оператора тока на всех этапах удовлетворяет условию лоренц-ковариантности и закону сохранения тока. Для формфакторов составной системы получаются некоторые интегральные представления через волновые функции системы, построенные в РГД.

В разделе 5 суммируются результаты и содержатся основные выводы работы.

2. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Изложим метод канонической параметризации матричных элементов локальных операторов. В настоящей работе мы будем рассматривать только матричные элементы, диагональные по полному моменту количества движения.

Основная идея параметризации может быть сформулирована следующим образом. Из переменных, от которых зависят векторы состояния в обкладках матричных эле-

ментов, необходимо построить объекты двух типов.

1. Набор линейно независимых матриц, которые являются лоренцевскими скалярами (скалярами и псевдоскалярами). Набор этих матриц описывает матричные элементы переходов, недиагональных по проекциям спина в начальном и конечном состояниях, а также свойства матричных элементов при дискретных преобразованиях пространства-времени.

2. Набор линейно независимых объектов, имеющих такую же тензорную размерность, как и оператор (это может быть, например, 4-вектор или 4-тензор некоторого ранга). Этот набор описывает поведение матричного элемента при преобразованиях Лоренца.

Матричный элемент оператора записывается в виде некоторой суммы всех возможных произведений объектов первого типа на объекты второго типа. Коэффициенты перед членами в этой сумме и будут искомыми приведенными матричными элементами – формфакторами.

Получившееся представление модифицируется при наложении дополнительных условий на оператор тока, например законов сохранения. Для соблюдения этих дополнительных условий в некоторых случаях часть коэффициентов – формфакторов – нужно полагать равными нулю.

Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим параметризацию матричных элементов операторов, взятых между состояниями свободной частицы массы M для нескольких простых случаев. Для векторов состояния частицы примем следующую нормировку:

$$\langle \vec{p}, m | \vec{p}', m' \rangle = 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{mm'}, \quad (1)$$

здесь $\vec{p}, \vec{p}'$ – 3-импульсы частицы, $p_0 = \sqrt{M^2 + \vec{p}^2}$, m, m' – проекции спина частицы.

Начнем с параметризации матричного элемента скалярного оператора $A(x)$, взятого между состояниями свободной бесспиновой частицы. В силу трансляционной инвариантности достаточно рассмотреть оператор $A(0)$. Из переменных, от которых зависят векторы состояния в начальном и конечном состояниях частицы, можно построить два линейно независимых скаляра: $p^2 = p'^2 = M^2$, $(p - p')^2 = q^2 = -Q^2$. Нетривиальным скаляром будет только второй – квадрат переданного импульса. Опуская тривиальную зависимость от M , матричный элемент скалярного оператора можно записать следующим образом:

$$\langle \vec{p}, M | A(0) | \vec{p}', M \rangle = f(Q^2). \quad (2)$$

Рассмотрим теперь матричный элемент скалярного оператора между состояниями частицы со спином j :

$$\langle \vec{p}, M, j, m | A(0) | \vec{p}', M, j, m' \rangle. \quad (3)$$

Тензорная размерность оператора не изменилась, однако матричный элемент представляет собой матрицу по проекциям спина в начальном и конечном состояниях.

Для параметризации матричного элемента (3) необходимо построить набор лоренцевских скаляров, которые являются линейно независимыми матрицами по проекциям спина. Для построения матриц будем использовать ковариантный оператор спина

$\Gamma_\mu(p)$. В системе покоя этот оператор совпадает с оператором спина частицы:

$$\Gamma^0(0) = 0, \quad \vec{\Gamma}(0) = M\vec{j}, \quad [j_i, j_k] = i\varepsilon_{ikl}j_l. \quad (4)$$

Ковариантный оператор спина может быть определен через вектор Паули–Любанского w_μ (см., например, [9]). В терминах матричных элементов эта связь имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{mm'}^\mu(p) &= \langle \vec{p}, m | w^\mu | \vec{p}, m' \rangle = \langle 0, m | \hat{U}^{-1}(\Lambda_p) w^\mu \hat{U}(\Lambda_p) | 0, m' \rangle = \\ &= (\Lambda_p)^\mu_\nu \langle 0, m | w^\nu | 0, m' \rangle = (\Lambda_p)^\mu_\nu \Gamma_{mm'}^\nu(0). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь Λ_p – буст, связывающий лабораторную систему отсчета с системой покоя частицы, $U(\Lambda_p)$ – соответствующий оператор представления. Явный вид матрицы Λ_p может быть получен из матрицы преобразования Лоренца общего вида, переводящей вектор p' в вектор p :

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \frac{2}{M^2} p^\mu p'_\nu - \frac{(p^\mu + p'^\mu)(p_\nu + p'_\nu)}{M^2 + p^\lambda p'_\lambda}. \quad (6)$$

В нашем случае Λ_p задается равенством (6), если положить $p' = (M, 0, 0, 0)$.

Используя явный вид Λ_p , получаем

$$\Gamma_0(p) = (\vec{p}\vec{j}), \quad \vec{\Gamma}(p) = M\vec{j} + \frac{\vec{p}(\vec{p}\vec{j})}{p_0 + M}, \quad \Gamma^2 = -M^2 j(j+1). \quad (7)$$

Как известно [9], спин при преобразованиях из группы Лоренца преобразуется по представлению так называемой малой группы, изоморфной группе вращений, так что соответствующие преобразования реализуются матрицами трехмерных вращений.

Оператор 4-спина, таким образом, при преобразованиях Лоренца $p^\mu = \Lambda_\nu^\mu p'^\nu$ преобразуется следующим образом:

$$\Gamma^\mu(p) = \Lambda_\nu^\mu D^j(p, p') \Gamma^\nu(p') D^j(p', p). \quad (8)$$

С помощью (8) прямыми выкладками можно показать, что матричные элементы операторов $D^j(p, p') \Gamma^\mu(p')$ и $\Gamma^\mu(p) D^j(p, p')$ преобразуется как 4-псевдовекторы, а матричные элементы операторов $D^j(p, p') p_\mu \Gamma^\mu(p')$ и $p'_\mu \Gamma^\mu(p) D^j(p, p')$ – как 4-псевдоскаляры.

Мы будем конструировать набор линейно независимых лоренц-скалярных матриц из векторов p^μ , p'^μ и псевдовектора $D^j(p, p') \Gamma^\mu(p')$. Заметим, что в образовании скаляров не участвует псевдовектор $\Gamma^\mu(p) D^j(p, p')$, так как он является линейно зависимым. Это можно показать, если воспользоваться соотношением (8) и явным видом матрицы Λ_ν^μ (6), переводящей вектор p' в p . После простых выкладок получаем

$$\Gamma^\mu(p) D^j(p, p') = D^j(p, p') \left\{ \Gamma^\mu(p') - \frac{p^\mu + p'^\mu}{M^2 + p_\mu p'^\mu} [p_\nu \Gamma^\nu(p')] \right\}. \quad (9)$$

Так как $p'_\mu \Gamma^\mu(p') = 0$, то искомый набор линейно независимых матриц по проекциям спина в начальном и конечном состояниях задается набором из $2j + 1$ независимых лоренцевских скаляров:

$$D^j(p, p') (p_\mu \Gamma^\mu(p'))^n, \quad n = 0, 1, \dots, 2j. \quad (10)$$

Число линейно независимых скаляров в (10) ограничено тем, что произведение, содержащее большее, чем $2j$, число множителей $\Gamma^\mu(p')$, сводится к произведениям с меньшим числом сомножителей, т.е. не является линейно независимым. При четном n полученные величины будут скалярами, а при нечетном n – псевдоскалярами. Таким образом, матричный элемент тока (3) будет линейной комбинацией полученных линейно независимых скаляров. Коэффициенты в этой линейной комбинации $f_n(Q^2)$ и будут искомыми формфакторами. Эти формфакторы в силу своей инвариантности относительно вращений не должны зависеть от проекций спина, т.е. они будут зависеть только от одной скалярной комбинации переменных – квадрата переданного импульса.

Наложение на оператор $A(0)$ условия самосопряженности требует минимальной модификации набора (10), а именно, в скалярном произведении в (10) возникает дополнительный множитель – мнимая единица i . Итак, с учетом условия самосопряженности матричный элемент тока запишется в виде

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, M, j, m | A(0) | \vec{p}', M, j, m' \rangle = \\ = \sum_{n=0}^{2j} \sum_{m''=-j}^j \langle m | D^j(p, p') | m'' \rangle \langle m'' | \{i p_\mu \Gamma^\mu(p')\}^n | m' \rangle f_n(Q^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Самосопряженность построенного оператора можно доказать, используя следующее из (9) соотношение:

$$p'_\mu \Gamma^\mu(p) D^j(p, p') = -D^j(p, p') p_\mu \Gamma^\mu(p'). \quad (12)$$

Для скалярного оператора n будет принимать только четные значения, для псевдоскалярного – нечетные.

Рассмотрим теперь оператор $j_\mu(0)$, являющийся 4-вектором. Для параметризации матричного элемента этого оператора из переменных, от которых зависят векторы обкладок, необходимо построить набор величин соответствующей тензорной размерности. Из имеющихся в векторах состояний переменных можно составить один псевдовектор $\Gamma^\mu(p')$ и три независимых вектора:

$$K_\mu = (p - p')_\mu = q_\mu, \quad K'_\mu = (p + p')_\mu, \quad R_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\nu p'^\lambda \Gamma^\rho(p'), \quad (13)$$

$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ – абсолютно антисимметричный псевдотензор 4-го ранга, $\epsilon_{0123} = -1$.

Матричный элемент оператора будет выражаться через матричные элементы указанных величин, умноженных слева на $D^j(p, p')$. При этом каждый такой объект должен быть умножен на сумму линейно независимых скаляров, построенных при параметризации (11):

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, M, j, m | j_\mu(0) | \vec{p}', M, j, m' \rangle = \\ = \sum_{m''} \langle m | D^j(p, p') | m'' \rangle \langle m'' | F_1 K'_\mu + F_2 \Gamma_\mu(p') + F_3 R_\mu + F_4 K_\mu | m' \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

здесь

$$F_i = \sum_{n=0}^{2j} f_{in}(Q^2) (i p_\mu \Gamma^\mu(p'))^n. \quad (15)$$

Наложим на оператор ряд дополнительных условий.

1. Потребуем, чтобы оператор был самосопряжен.

Проверку этого условия можно осуществить с помощью формулы (12). В правой части равенства (14) мы должны модифицировать вектор, умножаемый на F_2 . Новый вектор будет линейной комбинацией уже введенных в (14) 4-векторов и имеет следующий вид:

$$\Gamma^\mu(p') \rightarrow \Gamma^\mu(p') - \frac{K'^\mu}{K'^2} (p_\mu \Gamma^\mu(p')). \quad (16)$$

Члены, содержащие F_2 и F_3 , должны модифицироваться так:

$$F_i A^\mu \rightarrow \frac{1}{2} (F_i A^\mu + A^\mu F_i) = \{F_i A^\mu\}_+, \quad i = 2, 3. \quad (17)$$

Здесь A^μ – соответствующие векторы в (14) и уже модифицированные способом, указанным в равенстве (16). Члены, содержащие F_3 и F_4 , должны быть домножены на мнимую единицу.

2. Для удобства использования параметризации наложим условие ортогональности векторов при F_i .

Это приведет еще к одной модификации вектора при F_2 :

$$\Gamma^\mu(p') \rightarrow \left(\frac{K'^\mu}{K'^2} + \frac{K^\mu}{K^2} \right) (p_\mu \Gamma^\mu(p')). \quad (18)$$

3. Наложим на оператор условие сохранения четности.

Это условие будет выполнено, если все слагаемые в сумме (15) будут содержать только четное число псевдовекторных множителей Γ^μ . Таким образом, суммирование в F_1 и F_4 происходит по четным n : $2j \geq n \geq 0$, в F_3 – по четным n : $2j - 1 \geq n \geq 0$, а в F_2 – по нечетным n : $2j - 1 \geq n > 0$.

4. Наложим на оператор условие сохранения, т.е. $j_\mu K^\mu = j_\mu q^\mu = 0$.

Легко видеть, что это условие будет выполняться только при $F_4 = 0$.

Таким образом, параметризация матричного элемента при наложении вышеперечисленных условий имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, M, j, m | j_\mu(0) | \vec{p}', M, j, m' \rangle &= \sum_{m''} \langle m | D^j(p, p') | m'' \rangle \times \\ &\times \left\langle m'' \left| F_1 K'_\mu + \left\{ F_2 \left[\Gamma_\mu(p') - (p_\mu \Gamma^\mu(p')) \left(\frac{K'_\mu}{K'^2} + \frac{K_\mu}{K^2} \right) \right] \right\}_+ + i \{ F_3 R_\mu \}_+ \right| m' \right\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Описанная процедура может быть применена, например, для построения матричного элемента электромагнитного тока для частицы со спином $1/2$.

Перечислим условия, которым должен удовлетворять оператор электромагнитного тока в релятивистском случае (см. [4] и ссылки, приведенные там).

1. Лоренц-ковариантность:

$$\hat{U}^{-1}(\Lambda) \hat{j}^\mu(x) \hat{U}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \hat{j}^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (20)$$

Здесь Λ – матрица преобразования Лоренца, $\hat{U}(\Lambda)$ – оператор унитарного представления группы Лоренца.

2. Трансляционная инвариантность:

$$\hat{U}^{-1}(a)\hat{j}^\mu(x)\hat{U}(a) = \hat{j}^\mu(x-a), \quad (21)$$

$\hat{U}(a)$ – оператор унитарного представления трансляций.

3. Закон сохранения тока:

$$[\hat{P}_\nu \hat{j}^\nu(0)] = 0. \quad (22)$$

На языке матричных элементов оператора $\langle \hat{j}^\mu \rangle$ закон сохранения можно записать так:

$$q_\mu \langle \hat{j}^\mu(0) \rangle = 0. \quad (23)$$

Здесь q_μ – 4-вектор переданного импульса.

4. Преобразование оператора тока при пространственно-временных отражениях:

$$\begin{aligned} \hat{U}_P(\hat{j}^0(x^0, \vec{x}), \hat{\vec{j}}(x^0, \vec{x}))\hat{U}_P^{-1} &= (\hat{j}^0(x^0, -\vec{x}), -\hat{\vec{j}}(x^0, -\vec{x})), \\ \hat{U}_R\hat{j}^\mu(x)\hat{U}_R^{-1} &= \hat{j}^\mu(-x). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $\hat{U}_P$ – унитарный оператор представления пространственных отражений, $\hat{U}_R$ – антиунитарный оператор представления пространственно-временных отражений $R = PT$.

Наша процедура параметризации матричного элемента удовлетворяет всем перечисленным условиям. Параметризация (19) для электромагнитного тока частицы со спином $1/2$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, M, 1/2, m | j_\mu(0) | \vec{p}', M, 1/2, m' \rangle = \\ = \sum_{m''} \langle m | D^{1/2}(p, p') | m'' \rangle \langle m'' | f_{10}(Q^2) K'_\mu + i f_{30}(Q^2) R_\mu | m' \rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

Формфакторы $f_{10}(Q^2) = f_1(Q^2)$ и $f_{30}(Q^2) = f_2(Q^2)$ имеют смысл электрического и магнитного формфакторов частицы, соответственно. Вполне аналогично, хотя и несколько более громоздко, данная процедура выглядит при построении матричных элементов операторов более высокой тензорной размерности.

3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА

Для описания системы взаимодействующих конститuentов в нашем подходе необходимо знать приведенные матричные элементы на группе Пуанкаре (формфакторы), описывающие свойства составной системы из невзаимодействующих частиц. В настоящем разделе мы обобщим метод параметризации, описанный в предыдущем разделе, на случай таких систем.

Рассмотрим систему из двух свободных частиц со спином $1/2$ и проведем параметризацию матричных элементов операторов, описывающих переходы в такой системе, на примере построения матричного элемента оператора электромагнитного тока. Матричный элемент можно рассматривать в обкладках из следующих двухчастичных векторов состояний:

$$|\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2\rangle = |\vec{p}_1, m_1\rangle \otimes |\vec{p}_2, m_2\rangle, \quad (26)$$

где $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ – 3-импульсы частиц, m_1, m_2 – проекции спинов на ось z . Одночастичные векторы нормированы соотношением (1).

Наряду с базисом (26) можно использовать другой базис, в котором отделено движение центра масс двух частиц, $|\vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', l', S', m_{J'} \rangle = \\ = N_{CG} \delta^{(3)}(\vec{P} - \vec{P}') \delta(\sqrt{s} - \sqrt{s'}) \delta_{JJ'} \delta_{ll'} \delta_{SS'} \delta_{m_J m_{J'}}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$N_{CG} = \frac{(2P_0)^2}{8k\sqrt{s}}, \quad k = \frac{\sqrt{\lambda(s, M_1^2, M_2^2)}}{2\sqrt{s}},$$

где $P_\mu = (p_1 + p_2)_\mu$, $P_\mu^2 = s$, $\sqrt{s}$ – инвариантная масса системы двух частиц, l – орбитальный момент в системе центра инерции (с.ц.и.), S – суммарный спин в с.ц.и., J – полный момент количества движения, m_J – проекция полного момента, M_1, M_2 – массы конститuentов, $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ac)$.

Базис (27) связан с базисом (26) посредством разложения Клебша–Гордона для группы Пуанкаре. Это разложение может быть записано в несколько более общем виде, чем в [4]:

$$\begin{aligned} |\vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J\rangle = \\ = \sum_{m_1, m_2} \int \frac{d\vec{p}_1}{2p_{10}} \frac{d\vec{p}_2}{2p_{20}} |\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2\rangle \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J\rangle, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J\rangle = \sqrt{2s} [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)]^{-1/2} 2P_0 \delta(P - p_1 - p_2) \times \\ \times \sum \langle m_1 | D^{1/2}(p_1, P) | \tilde{m}_1 \rangle \langle m_2 | D^{1/2}(p_2, P) | \tilde{m}_2 \rangle \times \\ \times \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 | S m_S \right\rangle Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi) \langle S l m_s m_l | J m_J \rangle. \end{aligned}$$

Здесь ϑ, φ – сферические углы вектора $\vec{p} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2$ в с.ц.и., $Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi)$ – сферические функции, $\langle (1/2)(1/2) \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 | S m_S \rangle$, $\langle S l m_s m_l | J m_J \rangle$ – коэффициенты Клебша–Гордона группы $SU(2)$, D^j – известные матрицы вращений, необходимые для релятивистски-инвариантного сложения спинов частиц, суммирование идет по переменным $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, m_l, m_s$.

Разложение по сферическим гармоникам и сложение моментов в (28) осуществляется в с.ц.и., а полученное выражение сдвигается в произвольную систему при помощи D -функций.

Матричный элемент электромагнитного тока системы из двух свободных частиц в базисе (26) может быть записан в виде суммы матричных элементов одночастичных токов:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | j_\mu^{(0)}(0) | \vec{p}'_1, m'_1; \vec{p}'_2, m'_2 \rangle = \\ = \langle \vec{p}_2, m_2 | j_\mu^{(0)}(0) | \vec{p}'_2, m'_2 \rangle \langle \vec{p}_1, m_1 | j_{1\mu}(0) | \vec{p}'_1, m'_1 \rangle + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (29)$$

Каждый из одночастичных матричных элементов токов в (29) можно записать через формфакторы, как это описано в предыдущем разделе. В случае системы частиц спина $1/2$ соответствующее выражение имеет вид (25). Таким образом, электромагнитные свойства системы будут описываться формфакторами f_1, f_2 .

Рассмотрим теперь матричный элемент электромагнитного тока двух свободных частиц в базисе (27). Для построения матричного элемента будем использовать процедуру, развитую в предыдущем разделе. Рассмотрим сначала простой случай $J = J' = S = S' = l = l' = 0$ (в обозначениях векторов состояний будем опускать соответствующие переменные). Данный набор квантовых чисел возникает, например, при описании в рамках РГД пиона [4]. При проведении параметризации с данным набором квантовых чисел отсутствует псевдовектор Γ^μ , однако наряду со скаляром $(P - P')^2 = -Q^2$ появляются еще два нетривиальных скаляра $s' = P'^2$ и $s = P^2$, которые имеют смысл квадратов инвариантной массы свободной двухчастичной системы в начальном и конечном состояниях. Таким образом, формфакторы будут функциями Q^2, s, s' . Матричный элемент тока будет линейной комбинацией 4-векторов P_μ и P'_μ :

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_\mu^{(0)}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'} \rangle = (P_\mu + P'_\mu) g_1(s, Q^2, s') + (P_\mu - P'_\mu) g_2(s, Q^2, s'). \quad (30)$$

Наложим на оператор тока условие сохранения (23):

$$j_\mu^{(0)}(0)(P - P')^\mu = 0. \quad (31)$$

Параметризация матричного элемента примет после этого следующий вид:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_\mu^{(0)}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'} \rangle = A_\mu(s, Q^2, s') g_0(s, Q^2, s'). \quad (32)$$

Здесь приведенный матричный элемент $g_0(s, Q^2, s')$ — инвариант, который мы будем называть свободным двухчастичным формфактором. Вектор $A_\mu(s, Q^2, s')$ определяется трансформационными свойствами тока (лоренц-ковариантностью и законом сохранения):

$$A_\mu(s, Q^2, s') = (1/Q^2) [(s - s' + Q^2) P_\mu + (s' - s + Q^2) P'_\mu]. \quad (33)$$

Свободный двухчастичный формфактор можно выразить через одночастичные формфакторы (25). Для этого в (32) необходимо произвести разложение Клебша—Гордона

неприводимого представления (27) на прямое произведение двух неприводимых представлений (26), (28) и подставить равенства (25), (29). Так как формфакторы являются инвариантами, интегрирование в (32) можно выполнить в частной системе координат $\vec{P}' = 0$, $\vec{P} = (0, 0, P)$. Явное выражение для $g_0(s, Q^2, s')$ в случае двух частиц спина $1/2$ массы M можно найти в [4].

Проведем теперь аналогичную параметризацию для набора квантовых чисел в базе (27) для случая $J, J' \neq 0$. Будем считать далее, что $J = J'$.

Лоренц-ковариантные свойства матричного элемента описываются по аналогии с (13) тремя 4-векторами и одним псевдовектором:

$$K'_\mu = (P + P')_\mu, \quad K_\mu = (P - P')_\mu, \quad R_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} P^\nu P'^\lambda \Gamma^\rho(P'), \quad \Gamma_\mu(P'). \quad (34)$$

Псевдовектор $\Gamma_\mu(P)$ не используется в параметризации, так как связан с $\Gamma_\mu(P')$ соотношением, аналогичным (9):

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \Gamma(P)_\mu D^j(P, P') = D^j(P, P') \left\{ \frac{1}{\sqrt{s'}} \Gamma_\mu(P') - \frac{1}{\sqrt{ss'}} \cdot \frac{\sqrt{s'} P_\mu + \sqrt{s} P'_\mu}{P_\nu P'^\nu + \sqrt{ss'}} [P_\nu \Gamma^\nu(P')] \right\}.$$

Набор линейно независимых матриц, по которым будет раскладываться матричный элемент тока, будем строить из векторов P_μ и $\Gamma(P')_\mu$, как это описано в (10):

$$D^J(P, P') (P_\mu \Gamma^\mu(P'))^n, \quad n = 0, 1, \dots, 2J. \quad (35)$$

При дополнительных условиях самосопряженности, сохранения тока (31), сохранения четности, а также взаимной ортогональности векторов (по аналогии с (19)) параметризация матричного элемента принимает вид (см. также (17))

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | j_\mu^{(0)} | \vec{P}', \sqrt{s'}, J, l', S', m'_J \rangle = \\ = \sum_{m'_J} \langle m_J | D^J(P, P') | m''_J \rangle \left\langle m''_J \left| \sum_{i=1}^3 \{ F_i^{ll'SS'} A_\mu^i(s, Q^2, s') \}_+ \right| m'_J \right\rangle, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} A_\mu^1 &= \frac{1}{Q^2} [(s - s' + Q^2) P_\mu + (s' - s + Q^2) P'_\mu], \\ A_\mu^2 &= \frac{1}{\sqrt{s'}} \left\{ \Gamma_\mu(P') - \frac{1}{2\sqrt{s}} \left[-(\sqrt{s} + \sqrt{s'}) \frac{K_\mu}{Q^2} + \frac{\sqrt{s'} P_\mu + \sqrt{s} P'_\mu}{P P' + \sqrt{ss'}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}{\lambda(s, -Q^2, s')} [(\sqrt{s} + \sqrt{s'})^2 + Q^2] A_\mu^1 \right] [P_\lambda \Gamma^\lambda(P')] \right\}, \\ A_\mu^3 &= \frac{i}{\sqrt{s'}} R_\mu. \end{aligned} \quad (37)$$

Величины $F_i^{ll'SS'}$ в (36) определяются по аналогии с (15):

$$F_i^{ll'SS'} = \sum_{n=0}^{2J} f_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') (i P_\mu \Gamma^\mu(P'))^n. \quad (38)$$

Суммирование в (38) осуществляется с учетом условия сохранения четности, как в равенстве (19).

Обратим внимание, что приведенные матричные элементы – инвариантные формфакторы – в отличие от формфактора (32) зависят от дополнительных инвариантных величин l, l', S, S' – инвариантных параметров вырождения в базисе (27).

Отметим, что условие самосопряженности в (36) будет выполняться при следующих ограничениях на формфакторы $f_{in}^{ll'SS'}$:

$$f_{in}^{ll'SS'^*}(s, Q^2, s') = f_{in}^{l'lS'S}(s', Q^2, s). \quad (39)$$

Здесь звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения.

Отдельно рассмотрим случай $M_1 = M_2 = M$, $J = J' = S = S' = 1$, $l = l' = 0$. Соответствующие приведенные матричные элементы могут быть использованы при описании ρ -мезона без учета возможного d -состояния. С указанным набором квантовых чисел функции $F_i^{ll'SS'}$ в равенстве (38) имеют следующий вид (ср. с (15), (19)):

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{10}(s, Q^2, s') + f_{12}(s, Q^2, s')(iP_\nu \Gamma^\nu(P'))^2, \\ F_2 &= f_{21}(s, Q^2, s')(iP_\nu \Gamma^\nu(P')), \quad F_3 = f_{30}(s, Q^2, s'). \end{aligned} \quad (40)$$

В равенствах (40) опущены фиксированные переменные l, l', S, S' . Требование инвариантности относительно временных отражений накладывает дополнительные условия на формфакторы:

$$f_{in}^* = f_{in}, \quad i = 1, 3; \quad f_{21}^* = -f_{21}. \quad (41)$$

Рассматривая условия (39) и (41) совместно, получаем

$$f_{in}(s, Q^2, s') = f_{in}(s', Q^2, s), \quad i = 1, 3; \quad f_{21}(s, Q^2, s') = -f_{21}(s', Q^2, s). \quad (42)$$

Из (42) видно, что формфактор f_{21} возник в параметризации из-за неравенства инвариантных масс в начальном и конечном состояниях. Как мы увидим далее, этот формфактор не дает вклада в упругие процессы, например в рассеяние электронов на составной частице; однако, например, в процессы радиационных переходов он будет давать вклад.

Перепишем равенства (40) не в терминах формфакторов f_{in} , а в терминах общепринятых формфакторов:

$$\begin{aligned} F_1 &= g_{0C}(s, Q^2, s') + g_{0Q}(s, Q^2, s') \times \\ &\times \{ (iP_\nu \Gamma^\nu(P'))^2 - (1/3) \text{Sp}(iP_\nu \Gamma^\nu(P'))^2 \} \frac{2}{\text{Sp}(P_\nu \Gamma^\nu(P'))^2}, \\ F_2 &= g_{0MQ}(s, Q^2, s')(iP_\nu \Gamma^\nu(P')), \quad F_3 = g_{0M}(s, Q^2, s'). \end{aligned} \quad (43)$$

Скалярный множитель перед g_{0Q} выбран в таком виде, чтобы g_{0Q} можно было интерпретировать как квадрупольный формфактор системы двух свободных частиц. Остальные свободные двухчастичные формфакторы имеют следующий физический смысл: g_{0C} – зарядовый формфактор, $g_{0MQ} = f_{21}$ – магнитный квадрупольный формфактор

2-го рода, классическим аналогом которого является так называемый тороидный магнитный момент [8], $g_{0M} = f_{30}$ — магнитный формфактор.

Как и в случае (32), свободные двухчастичные формфакторы в (43) можно выразить через формфакторы конститuentов (подробности см. в работе [4]). Соответствующие формулы имеют довольно громоздкий вид, поэтому мы их здесь не будем приводить.

Свободные двухчастичные формфакторы в (32) и в (36), (40) должны рассматриваться как обобщенные функции. Например, $g_0(s, Q^2, s')$ необходимо интерпретировать как лоренц-инвариантную регулярную обобщенную функцию, заданную на пространстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ [10].

Функционал, задающий регулярную обобщенную функцию, определим следующим образом:

$$\langle g_0(s, Q^2, s'), \varphi(s, s') \rangle = \int d\mu(s, s') g_0(s, Q^2, s') \varphi(s, s'). \quad (44)$$

Здесь

$$d\mu(s, s') = 16\theta(s - 4M^2)\theta(s' - 4M^2)\sqrt{s s'} d\mu(s) d\mu(s'), \quad d\mu(s) = \frac{1}{4}k d\sqrt{s}, \quad (45)$$

величина Q^2 играет роль параметра обобщенной функции, $M_1 = M_2 = M$, $\theta(x)$ — ступенчатая функция, $\varphi(s, s')$ — функция из пространства основных. Таким образом, например, предел $Q^2 \rightarrow 0$ (статический предел) в $g_0(s, Q^2, s')$ (32) существует только в слабом смысле как предел функционала:

$$\lim_{Q^2 \rightarrow 0} \langle g_0, \varphi \rangle = \langle (e_q + e_{\bar{q}})\delta(\mu(s') - \mu(s)), \varphi \rangle, \quad (46)$$

e_q и $e_{\bar{q}}$ — заряды конститuentов, δ — дельта-функция Дирака.

Именно предел в смысле (46) дает электрический заряд двухчастичной системы. Обычный поточечный предел формфактора g_0 при $Q^2 \rightarrow 0$ равен нулю. Соотношения, аналогичные (46), имеют место и для статических пределов свободных двухчастичных формфакторов в равенстве (43).

Отметим также, что условия на свободные двухчастичные формфакторы, следующие из требований (39) и (42), налагаемых на оператор электромагнитного тока, также необходимо рассматривать в слабом смысле.

4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРОВ СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

В настоящем разделе мы проведем обобщение изложенного в предыдущих разделах метода параметризации матричных элементов на случай составных частиц, внутренняя структура которых определяется взаимодействием ее составляющих.

Пусть оператор $j_\mu(0)$ описывает переход между двумя состояниями составной двухчастичной системы и является диагональным по полному моменту импульса. Для простоты изложения не будем пока накладывать на оператор дополнительных условий самосопряженности, сохранения четности и т. д., как это мы делали при построении матричного элемента (14) в разделе 2. Разложение типа Вигнера–Эккарта для матричного

элемента этого оператора имеет вид (14), (15). Чтобы подчеркнуть, что речь идет о частице, имеющей составную природу, перепишем эти равенства с очевидными изменениями в обозначениях:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c, m_{Jc} | j_\mu(0) | \vec{p}_c', m_{Jc}' \rangle = \\ = \langle m_{Jc} | D^{Jc}(p_c, p_c') [F_1^c K_\mu' + F_2^c \Gamma_\mu(p_c') + F_3^c R_\mu + F_4^c K_\mu] | m_{Jc}' \rangle, \end{aligned} \quad (47)$$

здесь

$$F_i^c = \sum_{n=0}^{2J_c} f_{in}^c(Q^2) (ip_{c\mu} \Gamma^\mu(p_c'))^n. \quad (48)$$

В равенствах (47), (48) $(p_c - p_c')^2 = -Q^2$, $p_{c\mu}^2 = p_{c\mu}'^2 = M_c^2$, M_c – масса составной частицы. В обозначениях векторов состояний по сравнению с (14) опущены спин и масса частицы.

В рамках РГД формфакторы f_{in}^c должны быть выражены через волновые функции РГД (50), (51) (см. ниже) и формфакторы конstituентов.

В РГД состояние двухчастичной связанной системы описывается вектором, принадлежащим прямому произведению двух одночастичных гильбертовых пространств (см., например, [4]). В соответствии с этим матричный элемент в рамках РГД может быть разложен по базису (27):

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c, m_J | j_\mu(0) | \vec{p}_c', m_{Jc}' \rangle = \sum \int \frac{d\vec{P} d\vec{P}'}{N_{CG} N_{CG}'} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \langle \vec{p}_c, m_{Jc} | \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J \rangle \times \\ \times \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | j_\mu(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', l', S', m_{J'} \rangle \times \\ \times \langle \vec{P}', \sqrt{s'}, J', l', S', m_{J'} | \vec{p}_c', m_{Jc}' \rangle. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь суммирование проводится по переменным $J, J', l, l', S, S', m_J, m_{J'}, \langle \vec{P}', \sqrt{s'}, J', l', S', m_{J'} | \vec{p}_c', m_{Jc}' \rangle$ – волновая функция в смысле мгновенной формы РГД.

Волновая функция может быть записана в несколько более общем, чем в [4], виде:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | \vec{p}_c, m_{Jc} \rangle = N_C \delta(\vec{P} - \vec{p}_c) \delta_{JcJ} \delta_{m_{Jc}m_J} \varphi_{lS}^{Jc}(k), \\ N_C = \sqrt{2p_{c0}} \sqrt{\frac{N_{CG}}{4k}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Волновая функция конstituентов в смысле РГД при фиксированных полном моменте количества движения и полном спине имеет следующую структуру:

$$\varphi_{lS}^{Jc}(k(s)) = \sqrt{\sqrt{s}(1 - \eta^2/s^2)} u_{lS}(k) k \quad (51)$$

и нормирована условием

$$\sum_{lS} \int u_{lS}^2(k) k^2 dk = 1. \quad (52)$$

Здесь $\eta = M_1^2 - M_2^2$, $u_{lS}(k)$ – модельная феноменологическая волновая функция.

Для вычисления формфакторов в равенствах (47), (48) необходимо провести разложение Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре матричного элемента в правой части (49). Однако при этом возникают некоторые трудности.

Дело в том, что в предыдущих разделах мы занимались параметризацией матричных элементов локальных операторов в случаях, когда векторы состояний в обкладках матричных элементов и операторы преобразуются по одному и тому же представлению квантово-механической группы Пуанкаре. При описании составных систем в рамках мгновенной формы РГД может реализовываться и другая ситуация, когда векторы состояний и оператор преобразуются по разным представлениям этой группы.

Именно такая ситуация имеет место для матричного элемента в правой части (49). Оператор в этом матричном элементе описывает систему двух взаимодействующих частиц и преобразуется по представлению, генераторы лоренцевских бустов которого зависят от взаимодействия [4]. Векторы обкладок физически описывают систему двух свободных частиц и являются базисом представления, генераторы которого не зависят от взаимодействия. В силу этого техника, развитая в разделе 2, напрямую не применима к матричному элементу под знаком интеграла в правой части (49) разложения Вигнера–Эккарта. Связано это с тем, что мы не можем из переменных, от которых зависят векторы состояний, построить 4-векторы, описывающие трансформационные свойства матричного элемента при лоренцевских бустах, как это делается, например, в (47). В самом деле, возможность представления матричного элемента в виде (47) базируется фактически на следующем. Выполним преобразование Лоренца над оператором:

$$\hat{U}^{-1}(\Lambda)j^\mu(0)\hat{U}(\Lambda) = \tilde{j}^\mu(0). \quad (53)$$

Получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c, m_{Jc} | \tilde{j}^\mu(0) | \vec{p}_c', m_{Jc}' \rangle &= \langle \vec{p}_c, m_{Jc} | \hat{U}^{-1}(\Lambda)j^\mu(0)\hat{U}(\Lambda) | \vec{p}_c', m_{Jc}' \rangle = \\ &= \sum_{\tilde{m}_{Jc}, \tilde{m}_{Jc}'} \langle m_{Jc} | [D^{Jc}(R_\Lambda)]^{-1} | \tilde{m}_{Jc} \rangle \langle \Lambda \vec{p}_c, \tilde{m}_{Jc} | j^\mu(0) | \Lambda \vec{p}_c', \tilde{m}_{Jc}' \rangle \times \\ &\times \langle \tilde{m}_{Jc}' | D^{Jc}(R_\Lambda) | m_{Jc}' \rangle. \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь $D^{Jc}(R_\Lambda)$ — матрица вращений, осуществляющая преобразование момента импульса при преобразованиях Лоренца. Равенство (54) показывает, что трансформационные свойства тока как 4-вектора (20) можно описывать, используя 4-векторы начального и конечного состояний. Таким образом, для матричного элемента оператора можно применить процедуру канонической параметризации, реализующую теорему Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре.

Для матричного элемента в правой части (49) соотношение (54) не имеет места и, следовательно, теорема Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре напрямую не применима. Можно показать, однако, что если рассматривать матричный элемент в правой части (49) как обобщенную функцию (т.е. объект, имеющий смысл только под знаками интегралов и сумм в (49)), то соотношение (54) будет для него выполняться в слабом смысле.

Итак, будем рассматривать указанный матричный элемент как некоторую регулярную лоренц-ковариантную обобщенную функцию (см., например, [10]). С помощью (50) редуцируем выражение (49) к следующему:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c, m_{Jc} | j_\mu(0) | \vec{p}_c', m'_{Jc} \rangle = \sum_{l, l', S, S'} \int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi_{lS}^{Jc}(s) \varphi_{l'S'}^{Jc}(s') \times \\ \times \langle \vec{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{Jc} | j_\mu(0) | \vec{p}_c', \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{Jc} \rangle. \end{aligned} \quad (55)$$

В (55) учтено, что оператор тока $j_\mu(0)$ является диагональным по полному моменту количества движения составной системы.

Воспользуемся полнотой набора состояний (27) в РГД:

$$\hat{I} = \sum \int \frac{d\vec{P}}{N_{CG}} d\sqrt{s} | \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J \rangle \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J |. \quad (56)$$

Здесь суммирование проводится по всем дискретным переменным базиса (27).

Для матричного элемента преобразованного тока под знаком интеграла в силу соотношений (50), (56) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi_{lS}^{Jc}(s) \varphi_{l'S'}^{Jc}(s') \times \\ \times \langle \vec{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{Jc} | \hat{U}^{-1}(\Lambda) j_\mu(0) \hat{U}(\Lambda) | \vec{p}_c', \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{Jc} \rangle = \\ = \langle \vec{p}_c, m_{Jc} | \hat{U}^{-1}(\Lambda) \hat{I} j_\mu(0) \hat{U}(\Lambda) | \vec{p}_c', m'_{Jc} \rangle = \sum_{\tilde{m}_{Jc}, \tilde{m}'_{Jc}} \langle m_{Jc} | [D^{Jc}(R_\Lambda)]^{-1} | \tilde{m}_{Jc} \rangle \times \\ \times \langle \Lambda \vec{p}_c, \tilde{m}_{Jc} | \hat{I} j^\mu(0) \hat{I} | \Lambda \vec{p}_c', \tilde{m}'_{Jc} \rangle \langle \tilde{m}'_{Jc} | D^{Jc}(R_\Lambda) | m'_{Jc} \rangle = \\ = \sum \int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi_{lS}^{Jc}(s) \varphi_{l'S'}^{Jc}(s') \sum_{\tilde{m}_{Jc}, \tilde{m}'_{Jc}} \langle m_{Jc} | [D^{Jc}(R_\Lambda)]^{-1} | \tilde{m}_{Jc} \rangle \times \\ \times \langle \Lambda \vec{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, \tilde{m}_{Jc} | j_\mu(0) | \Lambda \vec{p}_c', \sqrt{s'}, J_c, l', S', \tilde{m}'_{Jc} \rangle \langle \tilde{m}'_{Jc} | D^{Jc}(R_\Lambda) | m'_{Jc} \rangle. \end{aligned} \quad (57)$$

Видно, что матричный элемент тока под знаком интеграла удовлетворяет аналогу соотношений (54), и, значит, к нему применим развитый в предыдущих разделах метод параметризации, т.е. применима теорема Вигнера–Эккарта в слабом смысле.

Проведем теперь параметризацию матричного элемента в правой части равенства (55). Запишем ее как функционал на пространстве основных функций следующего вида (см. также (51)):

$$\psi^{ll'SS'}(s, s') = u_{lS}(k(s)) u_{l'S'}(k(s')), \quad (58)$$

заданный на $\mathbb{R}^2$ по переменным (s, s') (см. также (44), (45)):

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c, m_{Jc} | j_\mu(0) | \vec{p}_c', m'_{Jc} \rangle = \sum_{l, l', S, S'} \int d\mu(s, s') \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} \psi^{ll'SS'}(s, s') \times \\ \times \langle \vec{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{Jc} | j_\mu(0) | \vec{p}_c', \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{Jc} \rangle. \end{aligned} \quad (59)$$

Мера в интеграле (59) выбрана с учетом релятивистской плотности состояний в соответствии с нормировочными условиями (51), (52) (см. также равенство (45)):

$$d\mu(s, s') = 16\theta(s - (M_1 + M_2)^2)\theta(s' - (M_1 + M_2)^2) \times \\ \times \sqrt{\sqrt{s}(1 - \eta^2/s^2)\sqrt{s'}(1 - \eta^2/s'^2)} d\mu(s) d\mu(s'), \quad (60)$$

$d\mu(s)$ задается равенством (45).

Заметим, что суммирование по дискретным инвариантным переменным можно заменить интегрированием, вводя под знак интеграла сумму соответствующих дельта-функций. Тогда полученное выражение необходимо рассматривать как функционал в $\mathbb{R}^6$.

Функционал в правой части (59) определяет некоторую лоренц-ковариантную обобщенную функцию, которая порождена матричным элементом оператора тока. Интеграл в (59) сходится равномерно в силу определения основных функций (58).

В силу справедливости равенств (57) матричный элемент в правой части (59) может быть разложен по тому же набору линейно независимых скаляров, которые входят в правую часть (47):

$$\frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} \langle \vec{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{Jc} | j_\mu(0) | \vec{p}'_c, \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{Jc} \rangle = \\ = \left\langle m_{Jc} \left| D^{Jc}(p_c, p'_c) \sum_{n=0}^{2J_c} (i p_{c\mu} \Gamma^\mu(p'_c))^n \mathcal{A}_{n\mu}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') \right| m'_{Jc} \right\rangle, \quad (61)$$

здесь $\mathcal{A}_{n\mu}^{ll'SS'}(s, Q^2, s')$ – лоренц-ковариантная обобщенная функция.

Приравняем выражения при одинаковых скалярах в правых частях (47) и (59) с учетом (61):

$$\sum_{l, l', S, S'} \int d\mu(s, s') \psi^{ll'SS'}(s, s') \langle m_{Jc} | \mathcal{A}_{n\mu}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') | m'_{Jc} \rangle = \\ = \langle m_{Jc} | [f_{1n}^c K'_\mu + f_{2n}^c \Gamma_\mu(p'_c) + f_{3n}^c R_\mu + f_{4n}^c K_\mu] | m'_{Jc} \rangle. \quad (62)$$

Из полученного равенства видно, что, для того чтобы все формфакторы в правой части (62) были отличны от нуля, обобщенная функция в левой части должна содержать диагональные ($\mathcal{A}_1$) и недиагональные ($\mathcal{A}_2$) члены по m_{Jc}, m'_{Jc} :

$$\mathcal{A}_{n\mu}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') = \mathcal{A}_{1n\mu}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') + \mathcal{A}_{2n\mu}^{ll'SS'}(s, Q^2, s'). \quad (63)$$

Для диагональной части мы получаем из равенства (62) следующее соотношение:

$$\sum_{l, l', S, S'} \int d\mu(s, s') \psi^{ll'SS'}(s, s') \langle m_{Jc} | \mathcal{A}_{1n\mu}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') | m_{Jc} \rangle = \\ = \langle m_{Jc} | [f_{1n}^c [\psi] K'_\mu + f_{4n}^c [\psi] K_\mu] | m_{Jc} \rangle. \quad (64)$$

Запись $f_{in}^c[\psi]$ в правой части подчеркивает, что формфакторы составной частицы являются функционалами на волновых функциях внутреннего движения, а значит, в силу (58) – и на основных функциях.

Потребуем, чтобы равенство (64) было справедливо при любой основной функции $\psi^{ll'SS'}(s, s')$. При варьировании основных функций (с физической точки зрения это означает варьирование волновых функций) векторы в правой части не изменяются, так как они по сути параметризации (47) не зависят от модели внутренней структуры частицы. Таким образом, при варьировании основных функций вектор в правой части (64) лежит в гиперплоскости, определяемой векторами K_μ, K'_μ .

Вектор же в левой части (64) при произвольном варьировании основных функций, вообще говоря, может принимать произвольное направление. Таким образом, для выполнения равенства (64) на всем пространстве основных функций необходимо потребовать, чтобы обобщенная функция в левой части имела вид

$$\mathcal{A}_{1n\mu}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') = K'_\mu G_{1n}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') + K_\mu G_{4n}^{ll'SS'}(s, Q^2, s'). \quad (65)$$

Здесь $G_{in}^{ll'SS'}(s, t, s')$, $i = 1, 4$, – лоренц-инвариантные обобщенные функции. Подставляя (65) в (64), получаем с учетом (51) и (60) следующие интегральные представления:

$$f_{in}^c(Q^2) = \sum_{l, l', S, S'} \int_{M_1+M_2}^{\infty} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi_{lS}^{Jc}(s) G_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') \varphi_{l'S'}^{Jc}(s'). \quad (66)$$

Рассматривая недиагональные по m_{Jc}, m'_{Jc} матричные элементы в (62) и повторяя рассуждения, мы получаем аналогичные интегральные представления для $f_{in}^c(Q^2)$ при $i = 2, 3$.

Таким образом, матричный элемент в правой части (59) как лоренц-ковариантная обобщенная функция может быть представлен в виде следующего разложения типа Вигнера–Эккарта:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{Jc} | j_\mu(0) | \vec{p}'_c, \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{Jc} \rangle = \\ & = \frac{N_{CG} N'_{CG}}{N_c N'_c} \langle m_{Jc} | D^{Jc}(p_c, p'_c) [\mathcal{F}_1 K'_\mu + \mathcal{F}_2 \Gamma_\mu(p'_c) + \mathcal{F}_3 R_\mu + \mathcal{F}_4 K_\mu] | m'_{Jc} \rangle, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\mathcal{F}_i = \sum_{n=0}^{2J_c} G_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') (ip_{c\mu} \Gamma^\mu(p'_c))^n, \quad (68)$$

с дополнительным условием (66).

В выражениях (67), (68) формфакторы содержат всю информацию о физике перехода, описываемого оператором $j_\mu(0)$, и связаны с формфакторами составной частицы (47), (48) соотношениями (66). В частности, физические приближения в нашем подходе будут формулироваться в терминах введенных формфакторов $G_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s')$ (подробнее об этом см. в [4]). Трансформационные свойства матричного элемента описываются 4-векторами в правой части (67).

Существенно, что формфакторы составной частицы задаются как функционалы, порождаемые лоренц-инвариантными обобщенными функциями $G_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s')$.

После установления вида векторов $\mathcal{A}_{n\mu}^{ll'SS'}(s, Q^2, s')$ в (62) на матричные элементы в (47), (62) можно наложить дополнительные условия самосопряженности, четности и т.д., как мы это делали в разделе 2 в формулах (16)–(19). Так как правые части равенств (47) и (67) содержат одни и те же 4-векторы и одинаковые наборы лоренцевских скаляров (48) и (68), то при наложении дополнительных условий эти векторы будут переопределяться по формулам типа (16)–(19). Например, закон сохранения приводит к равенству $\mathcal{F}_4=0$. При наложении дополнительных условий, очевидно, выражение (66) для соответствующих переопределенных формфакторов не изменится.

Проведем процедуру параметризации (67), (68) для частного случая электромагнитного тока составной системы с квантовыми числами $J = J' = S = S' = 1$ (который реализуется, например, в дейтроне). Отделяя квадрупольный формфактор по аналогии с равенством (43) и используя соотношения (67) и (68), находим для матричного элемента оператора тока

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{Jc} | j_\mu(0) | \vec{p}_c', \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{Jc} \rangle = \\ = \frac{N_{CG} N'_{CG}}{N_c N'_c} \left\langle m_{Jc} \left| D^1(p_c, p'_c) \left[\tilde{\mathcal{F}}_1 K'_\mu + \frac{i}{M_c} \tilde{\mathcal{F}}_3 R_\mu \right] \right| m'_{Jc} \right\rangle, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{G}_{10}^{ll'}(s, Q^2, s') + \tilde{G}_{12}^{ll'}(s, Q^2, s') \times \\ \times \left\{ [ip_{c\nu} \Gamma^\nu(p'_c)]^2 - \frac{1}{3} \text{Sp}[ip_{c\nu} \Gamma^\nu(p'_c)]^2 \right\} \frac{2}{\text{Sp}[p_{c\nu} \Gamma^\nu(p'_c)]^2}, \\ \tilde{\mathcal{F}}_3 = \tilde{G}_{30}^{ll'}(s, Q^2, s'). \end{aligned} \quad (70)$$

При получении этих равенств мы учли, что в слабом смысле имеет место равенство $\tilde{G}_{21}^{ll'}(s, Q^2, s') = 0$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в рамках мгновенной формы РГД предложена процедура построения матричных элементов оператора электромагнитного тока релятивистской составной двух-частичной системы с отличным от нуля полным моментом количества движения.

Предложенная процедура реализует теорему Вигнера–Эккарта на группе Пуанкаре. Она позволяет выделить из матричного элемента приведенные матричные элементы – инвариантные формфакторы, которые в случае составных систем являются обобщенными функциями.

Построенные матричные элементы оператора тока удовлетворяют условиям лоренц-ковариантности и закону сохранения.

На языке приведенных матричных элементов в работах [4], [5] сформулировано модифицированное импульсное приближение, которое физически соответствует релятивистскому импульсному приближению. Это приближение не приводит к нарушению условий лоренц-ковариантности электромагнитного тока и закона сохранения тока.

Развитый формализм дает [11] разумное описание статических моментов и электромагнитных формфакторов ρ -мезона, а также возможность получить ряд чисто релятивистских эффектов, в частности отличный от нуля квадрупольный момент ρ -мезона в s -состоянии, возникающий за счет релятивистского вignerовского вращения спинов. В работе [12] был рассчитан тензор поляризации $T_{20}(Q^2)$ упругого ed -рассеяния; получено хорошее согласование с экспериментом, особенно при использовании волновых функций из работы [13]. Эти конкретные результаты говорят в пользу справедливости нашего описания электрослабых свойств составных систем с отличным от нуля полным моментом количества движения.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке программы “Университеты России – Фундаментальные исследования” (грант УР.02.01.013) и Министерства образования России (грант Е02–3.1–34).

Список литературы

- [1] *Е. В. Баландина, А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий.* ТМФ. 1995. Т. 103. С. 41.
- [2] *R. Gilman, F. Gross.* J. Phys. G. 2002. V. 28. P. R37.
- [3] *B. D. Keister, W. Polyzou.* Adv. Nucl. Phys. 1991. V. 20. P. 225.
- [4] *A. F. Krutov, V. E. Troitsky.* Phys. Rev. C. 2002. V. 65. P. 045501.
- [5] *A. F. Krutov, V. E. Troitsky.* Phys. Rev. C. 2003. V. 68. P. 018501.
- [6] *А. А. Чешков, Ю. М. Широков.* ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 1982.
- [7] *M. Mozrzymas.* Wigner–Eckart theorem for tensor operators of Hopf algebras. math-ph/0404019; Tensor operators and Wigner–Eckart theorem for the quantum superalgebra $U_q[osp(1|2)]$. math-ph/0404037.
- [8] *V. M. Dubovik, V. V. Tugushev.* Phys. Rep. 1990. V. 187. P. 145.
- [9] *Ю. В. Новожилков.* Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.
- [10] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Лозунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [11] *А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий.* Вестн. СамГУ – Естественная серия. 2003. Спец. вып. № 2. С. 95; hep-ph/0403046.
- [12] *A. F. Krutov, V. E. Troitsky.* Eur. Phys. J. A. 2003. V. 16. P. 285.
- [13] *В. М. Музафаров, В. Е. Троицкий.* ЯФ. 1981. Т. 33. С. 1461.

Поступила в редакцию 21.VII.2004 г.