Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Барвинский, Д. В. Нестеров, Инфракрасная асимптотика ядра уравнения теплопроводности и нелокальное эффективное действие, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 3, 328–356

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 07:02:43

© 2005 г.

А. О. Барвинский*, Д. В. Нестеров*

ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА ЯДРА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И НЕЛОКАЛЬНОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ

Предлагается обзор новых результатов в непертурбативной теории ядра уравнения теплопроводности и его асимптотике “позднего” времени, описывающей инфракрасное поведение квантового эффективного действия для безмассовых теорий. В частности, выводится обобщение потенциала Коулмена–Вайнберга для теорий с неоднородным фоновым полем. При таком обобщении получается новое нелокальное и непертурбативное действие, описывающее эффекты в области перехода между внутренней частью пространства-времени и его бесконечностью. В четырехмерном пространстве эти эффекты приводят к делокализации логарифмического потенциала Коулмена–Вайнберга, в то время как в размерностях $d > 4$ доминирующим оказывается вклад степенной нелокальной структуры, не зависящей от параметра перенормировки. Непертурбативное поведение ядра уравнения теплопроводности рассматривается также для асимптотически плоского искривленного пространства-времени. В частности, анализируются конформные свойства ядра уравнения теплопроводности для случая конформно-инвариантного скалярного поля и обсуждается проблема выделения эффективного космологического члена из нелокального эффективного действия.

Ключевые слова: эффективное действие, нелокальные теории поля, разложение Швингера–де Витта.

1. ВВЕДЕНИЕ: ЯДРО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ

В настоящее время широко признана важная роль нелокальных процессов в квантовой физике. В отличие от поляризационных эффектов в вакууме при низких энергиях в массивных теориях, они характеризуют высокоэнергетические квантовые эффекты в массивных теориях или инфракрасное поведение в безмассовых теориях. Даже в моделях с “хорошим низкоэнергетическим поведением”, таких как эйнштейновская гравитация, нелокальные явления вызывают возрастающий интерес в связи с попытками разре-

Статья написана по заказу Редколлегии.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: barvin@lpi.ru, nesterov@lpi.ru

шения проблем космологической постоянной и наблюдаемого космологического ускорения с помощью нелокальных модификаций теории для больших расстояний. Эти модификации обычно требуют непертурбативного рассмотрения ввиду непертурбативных аспектов проблемы Захарова–Ван Дамма–Велтмана [1] и наличия скрытого непертурбативного масштаба длины в гравитационных моделях с дополнительными измерениями [2].

С другой стороны, нелокальности также (и, более того, в основном) возникают в силу фундаментальных квантовых эффектов материальных полей или петлевых гравитационных эффектов, которые, например, могут играть важную роль в теории гравитационного излучения [3], [4] и космологии [5]. Эти механизмы возникновения нелокальностей являются альтернативой популярным феноменологическим механизмам инфракрасных модификаций, индуцированным, к примеру, бранными моделями с дополнительными измерениями [6], [7] или другими современными гравитационными сценариями [8]. Это делает непертурбативный анализ нелокальных квантовых эффектов интересным и многообещающим.

Основным инструментом для описания таких эффектов является формализм квантового эффективного действия и техника его вычисления с помощью ядра (уравнения) теплопроводности. Для теории поля общего вида его классическое действие $S[\varphi]$ порождает обратный пропагатор – оператор линейных полевых возмущений над фоновым полем $\varphi(x)$:

$$S[\varphi] \rightarrow F(\nabla)\delta(x, y) = \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}. \quad (1.1)$$

Тогда квантовое эффективное действие $\Gamma[\varphi]$ следует из соответствующего классического действия как петлевое разложение по степеням $\hbar$:

$$S[\varphi] \rightarrow \Gamma = S[\varphi] + \hbar\Gamma_{1\text{-loop}}[\varphi] + \hbar^2\Gamma_{2\text{-loop}}[\varphi] + \dots. \quad (1.2)$$

Несколько первых порядков этого разложения графически представлены как фейнмановские диаграммы, в которых пропагатор – функция Грина оператора (1.1) – и соответствующие вершины вычислены на произвольном фоне φ ,

$$\Gamma_{1\text{-loop}} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln F(\nabla) = \frac{1}{2} \bigcirc, \quad \Gamma_{2\text{-loop}} = \frac{1}{8} \bigcirc\!\!\!\bigcirc + \frac{1}{12} \bigcirc\!\!\!\bigcirc. \quad (1.3)$$

Однопетлевая часть (1.3) выделена в том смысле, что она не содержит явно вершин классического действия (до тех пор пока она не раскладывается по степеням фонового поля φ) и представима в виде функционального следа логарифма оператора $F(\nabla)$.

В локальных теориях поля в достаточно общем случае оператор (1.1) представим в виде

$$F(\nabla) = \square - V(x), \quad (1.4)$$

где $V(x)$ – некоторый потенциал, а $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ – ковариантный даламбертиан в искривленном пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$.

Весьма эффективный путь анализа фейнмановских диаграмм типа (1.3) на *произвольном фоне*, т.е. с произвольными метрикой и потенциалом, основан на использовании ядра теплопроводности

$$K(s | x, y) = \exp(sF(\nabla))\delta(x, y). \quad (1.5)$$

Оно удовлетворяет уравнению теплопроводности с единичным начальным условием при $s = 0$,

$$\frac{\partial K(s)}{\partial s} = F(\nabla)K(s), \quad K(0) = \mathbb{I}, \quad (1.6)$$

и посредством интегрирования по собственному времени позволяет вычислить основной элемент фейнмановской диаграммной техники – пропагатор оператора (1.1)

$$G(x, y) \equiv \frac{1}{F(\nabla)}\delta(x, y) = - \int_0^\infty ds K(s | x, y), \quad (1.7)$$

и в замкнутой форме – однопетлевое эффективное действие

$$\Gamma_{1\text{-loop}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} K(s), \quad (1.8)$$

$$\text{Tr} K(s) = \int dx K(s | x, x). \quad (1.9)$$

Эффективность использования ядра теплопроводности и метода собственного времени основана на хорошо известном и универсальном поведении $K(s | x, y)$ для оператора второго порядка по производным общего вида (1.4) при $s \rightarrow 0$. Данный предел определяет ультрафиолетовые расходимости и аномалии в теории поля, перенормировку и разложение по степеням производных, лежащих в основе вакуумных поляризационных эффектов.

Наоборот, нелокальные члены возникают из вклада верхнего предела в интеграле по собственному времени (1.8), что делает асимптотику “позднего” времени $\text{Tr} K(s)$ существенной для другого класса эффектов, включающих рождение частиц и рассеяние¹⁾. Подынтегральное выражение – след ядра теплопроводности, с учетом его асимптотики позднего времени впервые было изучено с помощью ковариантного нелокального разложения по кривизнам в [9], [11]–[13]. Цель данной работы – дать краткий обзор этих старых результатов, а также представить некоторые последние достижения в теории ядра теплопроводности, касающиеся непертурбативных асимптотик на плоском пространстве-времени [14], обобщения этих результатов на искривленное пространство-время [15], а также приложение их к теории нелокального эффективного действия.

¹⁾В данной статье эффективное действие определяется в евклидовом пространстве с положительно-определенной метрикой. Его приложения в физическом пространстве-времени с лоренцевой сигнатурой основаны на методах аналитического продолжения, как, например, обычный виковский поворот в теории рассеяния (для in-out матричных элементов) или специальная прескрипция “запаздывания” в широком классе задач с фоновыми полями (вычисление in-in средних значений) [9], [10]. Эти методы нетривиально работают в применении к нелокальным объектам и включают как обычную теорию возмущений, так и ее частичные пересуммирование в соответствии с непертурбативной техникой, описанной в данной статье.

2. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СХЕМЫ И ИНФРАКРАСНОЕ ПОВЕДЕНИЕ

С целью упрощения изложения в этом разделе мы будем работать в плоском пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ и только в случае необходимости кратко упомянем соответствующие изменения, учитывающие кривизну. Вместе с этим будет рассматриваться случай скалярного поля, где ядро теплопроводности (1.5) есть бискалярный объект без индексов (как спиновых, так и изотопических). В этом случае поведение ядра теплопроводности при малом (собственном) времени, ответственное за перенормировку в локальной квантовой теории поля, выглядит наиболее просто:

$$K(s | x, y) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4s}\right\} \Omega(s | x, y), \quad (2.1)$$

$$\Omega(s | x, y) \rightarrow 1, \quad s \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где d есть размерность пространства-времени. Этот квазиклассический анзац для ядра теплопроводности гарантирует стремление к δ -функции $\delta(x, y)$ при $s \rightarrow 0$ и содержит всю нетривиальную информацию о потенциале $V(x)$ в функции $\Omega(s | x, y)$, которая аналитична при $s = 0$. Ее разложение по степеням s лежит в основе техники локального разложения Швингера–де Витта.

2.1. Техника локального разложения Швингера–де Витта. Из уравнения теплопроводности (1.6) легко выводится набор рекуррентных уравнений для коэффициентов разложения $\Omega(s | x, y)$ по малому параметру собственного времени,

$$\Omega(s | x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, y) s^n, \quad s \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Коэффициенты этого разложения играют важную роль в квантовой теории поля и в физической литературе чаще всего называются коэффициентами Швингера–де Витта. Уравнения для $a_n(x, y)$ могут быть в замкнутой форме решены для пределов совпадения $a_n(x, x)$ в терминах потенциала $V(x)$ и его производных. Для оператора (1.4) несколько первых коэффициентов разложения при совпадающих аргументах выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0(x, x) &= 1, \\ a_1(x, x) &= -V(x) + \frac{1}{6}R(x), \\ a_2(x, x) &= \frac{1}{2}V^2(x) + \frac{1}{6}\square V(x) - \frac{1}{6}R(x)V(x) + O(R_{\mu\nu\alpha\beta}^2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где мы учли вклад скаляра кривизны пространства-времени и символически обозначили квадратичный вклад тензора кривизны во второй коэффициент. Явно видно, что все эти величины являются локальными функциями коэффициентов исходного оператора и их производных. Размерность $a_n(x, x)$ в единицах обратной длины растет с ростом n и составляется из степеней размерных величин $V(x)$, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ и их производных.

Предположим теперь, что вместо теории с оператором (1.4) мы рассматриваем теорию массивного поля с большой массой m . Это соответствует замене исходного оператора

$$F(\nabla) \rightarrow F(\nabla) - m^2. \quad (2.5)$$

Соответствующее ядро теплопроводности (2.1) при такой замене, очевидно, приобретает общий экспоненциальный фактор $\exp(-sm^2)$, подавляющий вклад больших значений s в интеграле по собственному времени (1.8),

$$K(s | x, y) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4s} - sm^2\right\} \Omega(s | x, y). \quad (2.6)$$

Подставляя это выражение с учетом разложения (2.3) в (1.8) и почленно интегрируя получившийся ряд, мы находим однопетлевое эффективное действие в виде асимптотического $1/m^2$ -разложения [11], [14], [16], [17]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln [F(\nabla) - m^2] &= -\frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^\infty \frac{ds}{s^{d/2+1}} e^{-sm^2} \sum_{n=0}^\infty s^n a_n(x, x) = \\ &= \Gamma_{\text{div}} + \Gamma_{\text{log}} - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{4\pi}\right)^{d/2} \int dx \sum_{n=d/2+1}^\infty \frac{\Gamma(n-d/2)}{(m^2)^n} a_n(x, x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Первые $d/2$ интегралов (мы предполагаем, что d четно) расходятся в пределе малых s , тем самым генерируя ультрафиолетовые расходимости Γ_{div} , которые определяются первыми $d/2$ коэффициентами Швингера–де Витта. При размерной регуляризации

$$\Gamma_{\text{div}} = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \sum_{n=0}^{d/2} \left[\frac{1}{\omega - d/2} - \Gamma'\left(\frac{d}{2} - n + 1\right) \right] \frac{(-m^2)^{d/2-n}}{(d/2 - n)!} a_n(x, x), \quad (2.8)$$

где 2ω – параметр продолжения по размерности.

Логарифмические расходимости описываются логарифмическим членом,

$$\Gamma_{\text{log}} = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \sum_{n=0}^{d/2} \frac{(-m^2)^{d/2-n}}{(d/2 - n)!} \ln \frac{m^2}{\mu^2} a_n(x, x), \quad (2.9)$$

содержащим параметр перенормировки массы μ^2 , отражающий перенормировочный произвол.

В таком представлении каждое конечное слагаемое в правой части действия (2.7) локально, но эта локальность имеет место только в области применимости разложения, когда масса велика и слагаемые в асимптотическом ряду быстро убывают с ростом n . Это условие выполняется, когда параметр массы m велик по сравнению *как* с потенциалом, *так* и с его производными:

$$1 \gg \frac{a_n}{(m^2)^n} \sim \left(\frac{V}{m^2}\right)^n, \quad \left(\frac{\nabla}{m}\right)^k \left(\frac{V}{m^2}\right)^l, \quad k + 2l = 2n. \quad (2.10)$$

В присутствии гравитационного поля эти ограничения также включают в себя условия малости кривизны пространства-времени и его ковариантных производных по сравнению с параметром массы. Таким образом, локальное разложение Швингера–де Витта применимо только для медленно меняющихся полей малой амплитуды по сравнению с массовым масштабом рассматриваемой модели.

Для полей больших напряженностей или быстро меняющихся полей разложение Швингера–де Витта становится неприменимым и полностью рушится в безмассовом пределе $m \rightarrow 0$. Возникает естественный вопрос, какова структура эффективного действия в такой ситуации и как его вычислять. Далее мы рассмотрим два пертурбативных метода, которые совершенствуют технику Швингера–де Витта, распространяя ее на класс безмассовых моделей, и затем в разделе 3 перейдем к непертурбативной технике, основанной на непертурбативной асимптотике позднего времени ядра теплопроводности.

2.2. Модифицированное разложение Швингера–де Витта. Первый метод может быть назван модифицированным разложением Швингера–де Витта, в силу того что он основан на пересуммировании исходного разложения при замене массового члена на потенциал $V(x)$ в операторе (2.5), $m^2 \rightarrow V(x)$. Когда потенциал положительно определен (это будет предполагаться в дальнейшем), он может сыграть роль подавляющего фактора (при больших временах) по аналогии с массовым членом в интеграле (2.7). Для этого необходимо выделить экспоненциальную зависимость от $sV(x)$ в $\Omega(s|x, y)$: $\Omega(s|x, y) = e^{-sV(x)} \tilde{\Omega}(s|x, y)$, и вместо (2.6) написать анзац

$$K(s|x, y) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4s} - sV(x)\right\} \tilde{\Omega}(s|x, y), \quad (2.11)$$

где новая функция, отмеченная тильдой, разлагается по степеням s с модифицированными коэффициентами Швингера–де Витта:

$$\tilde{\Omega}(s|x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(x, y) s^n. \quad (2.12)$$

Очевидно, этому разложению отвечает частичное пересуммирование в исходном ряду (2.3) слагаемых, содержащих только степени недифференцированного потенциала. Новые коэффициенты $\tilde{a}_n(x, x)$, по сравнению с коэффициентами в исходном разложении, формируются из меньшего числа слагаемых и не содержат членов с недифференцированным потенциалом (таким образом, все члены ряда, кроме $\tilde{a}_0 = 1$, в отсутствие гравитации становятся равными нулю при $\nabla V = 0$). Коэффициенты исходного разложения Швингера–де Витта могут быть выражены через новые как конечные полиномы по V с коэффициентами, построенными из градиентов потенциала,

$$a_m(x, x) = \frac{(-V)^m}{m!} + \sum_{n=1}^{d/2} \frac{(-V)^{m-n}}{(m-n)!} \tilde{a}_n(x, x) = \frac{(-V)^m}{m!} + O(\nabla V). \quad (2.13)$$

Теперь интеграл по собственному времени в (2.7) даже при $m^2 = 0$ имеет инфракрасное обрезание при $s \sim 1/V(x)$, и в этом случае эффективное действие аналогично (2.7) с заменой m^2 на $V(x)$, а $a_n(x, x)$ на $\tilde{a}_n(x, x)$:

$$\sum_n \frac{a_n(x, x)}{(m^2)^n} \rightarrow \sum_n \frac{\tilde{a}_n(x, x)}{V^n(x)}. \quad (2.14)$$

В частности, ультрафиолетовые расходимости определяются безмассовым пределом Γ_{div} , а логарифмическая часть порождает (d -мерное) слагаемое Коулмена–Вайнберга $\Gamma_{\text{log}} \rightarrow \Gamma_{\text{CW}} + O(\nabla V)$,

$$\Gamma_{\text{CW}} = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \frac{(-V)^{d/2}(x)}{(d/2)!} \ln \frac{V(x)}{\mu^2}, \quad (2.15)$$

с поправками, зависящими от производных потенциала (ср. с формулой (2.13) при $m = d/2$). Γ_{CW} есть интеграл по пространству-времени от эффективного потенциала Коулмена–Вайнберга. Например, в четырехмерии в модели φ^4 самодействующего скалярного поля с $V(\varphi) \sim \varphi^2$ этот эффективный потенциал имеет хорошо известный вид $\varphi^4 \ln(\varphi^2/\mu^2)/64\pi^2$.

Из (2.14) следует, что, в отличие от исходного разложения Швингера–де Витта, его модифицированная версия представляет собой разложение по производным от V , а не по степеням самого V . Действительно, коэффициенты модифицированного ряда не содержат слагаемых с недифференцированным потенциалом, и типичная структура слагаемых, входящих в $\tilde{a}_n(x, x)$, представляется m производными, действующими разными способами на произведение j потенциалов: $\nabla^m V^j(x)$, где $m + 2j = 2n$. Оказывается, что *каждый* потенциал V продифференцирован по меньшей мере один раз, следовательно $m \geq j$. Поэтому типичное слагаемое в разложении (2.14) может быть символически записано как

$$\frac{\tilde{a}_n}{V^n} \sim \sum_{j=1}^{[2n/3]} \frac{\nabla^{2n-2j} V^j}{V^n}, \quad (2.16)$$

где верхний предел j есть целая часть $2n/3$. Таким образом, модифицированное разложение оказывается эффективным, пока градиент потенциала остается меньше самого потенциала,

$$\frac{\nabla^2 V(x)}{V^2(x)} \ll 1, \quad \frac{(\nabla V(x))^2}{V^3(x)} \ll 1, \quad \dots \quad (2.17)$$

Когда потенциал ограничен снизу большой положительной константой, эти условия, очевидно, оказываются выполненными во всем пространстве-времени. Однако этот случай не представляет интереса, поскольку он лишь воспроизводит исходное разложение Швингера–де Витта с массовым членом m^2 , играющим роль нижней границы потенциала. Большой интерес представляет случай асимптотически пустого пространства, когда потенциал и его производные стремятся к нулю по степенному закону

$$V(x) \sim \frac{1}{|x|^p}, \quad \nabla^m V(x) \sim \frac{1}{|x|^{p+m}}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

для некоторого положительного p . Для случая такого потенциала слагаемые ряда теории возмущений (2.14) обладают следующим поведением:

$$\frac{\tilde{a}_n(x, x)}{V^n(x)} \sim \sum_{j=1}^{[2n/3]} |x|^{(p-2)(n-j)}, \quad (2.19)$$

и убывают с ростом n , только если $p < 2$. Для $p \geq 2$ модифицированное разложение по производным потенциала полностью теряет смысл. Таким образом, это разложение хорошо определено для медленно убывающих потенциалов вида (2.18) с $p < 2$. В этом случае потенциал $V(x)$ не интегрируем по всему пространству-времени ($\int dx V(x) = \infty$) и, более того, выражение $(1/\square)V(x)$ не является хорошо определенным²⁾. Поэтому полученные условия на потенциал слишком ограничительны и не позволяют описать физически интересные ситуации, в которых параметр p зачастую совпадает с размерностью пространства-времени d . Кроме того, модифицированное разложение полностью локально и не позволяет уловить нелокальные слагаемые в эффективном действии.

Таким образом, требуется альтернативная техника для исследования вклада позднего времени в интеграл по собственному времени, в частности, чтобы понять, определен ли (и если да, то при каких условиях) сам интеграл для безмассовых теорий. Ответ на этот вопрос может дать изучение асимптотики позднего времени ($s \rightarrow \infty$) ядра теплопроводности, которая может быть пертурбативно проанализирована в рамках ковариантной теории возмущений [9], [11]–[13], [18].

2.3. Ковариантная теория возмущений. В ковариантной теории возмущений сам потенциал рассматривается как возмущение, и решение уравнения теплопроводности находится в виде ряда по степеням потенциала. С точки зрения разложения Швингера–де Витта, такое рассмотрение соответствует бесконечному пересуммированию всех слагаемых с данной степенью потенциала и произвольным количеством производных. Результат представим в виде

$$\text{Tr } K(s) \equiv \int dx K(s | x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr } K_n(s), \quad (2.20)$$

где

$$\text{Tr } K_n(s) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n F_n(s | x_1, x_2, \dots, x_n) V(x_1) V(x_2) \dots V(x_n). \quad (2.21)$$

Нелокальные формфакторы $F_n(s | x_1, x_2, \dots, x_n)$ были явно вычислены в [9], [11], [12] до $n = 3$ включительно. В присутствии калибровочных полей и гравитации это разложение может быть легко обобщено путем включения кривизн расслоенного пространства $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ и тензора Риччи³⁾ в полный набор пертурбативных полевых напряженностей

²⁾ Для сходимости интеграла в выражении $(1/\square)V(x)$ потенциал $V(x)$ должен убывать по меньшей мере как $1/|x|^3$ для пространства-времени любой размерности [11].

³⁾ В асимптотически плоском пространстве-времени с естественными вакуумными граничными условиями тензор кривизны Римана–Кристоффеля может быть выражен по теории возмущений в терминах тензора Риччи [12], [18]. Именно поэтому он не входит в разложение как независимая величина.

$V \rightarrow \mathcal{R} = (V, \mathcal{R}_{\mu\nu}, R_{\mu\nu})$ и ковариантизации соответствующих нелокальных формфакторов.

В [11] было показано, что при $s \rightarrow \infty$ члены разложения ведут себя как

$$\text{Tr } K_n(s) = O\left(\frac{1}{s^{d/2-1}}\right), \quad n \geq 1, \quad (2.22)$$

и, следовательно, в размерности $d \geq 3$ интеграл в (1.8) сходится в инфракрасном пределе,

$$\Gamma \sim \int^\infty \frac{ds}{s} O\left(\frac{1}{s^{d/2-1}}\right) < \infty. \quad (2.23)$$

В размерностях $d = 1$ и $d = 2$ такого разложения для Γ не существует, за исключением особого случая безмассовой теории в искривленном двумерном пространстве, где оно воспроизводит действие Полякова [11], [19], [20], которое также может быть получено путем интегрирования конформной аномалии [19], [20],

$$\Gamma_\Pi \sim \int d^2x g^{1/2} R \frac{1}{\square} R. \quad (2.24)$$

Ковариантная теория возмущений применима для $d \geq 3$ и достаточно малого потенциала V , так что получающееся эффективное действие обладает свойством аналитичности по потенциалу при $V = 0$. Таким образом, серьезный недостаток такого подхода в том, что он не позволяет преодолеть рамки теории возмущений и, в частности, не позволяет установить неаналитические (по потенциалу) структуры в действии, если таковые присутствуют.

3. НЕПЕРТУРБАТИВНАЯ АСИМПТОТИКА ПОЗДНЕГО ВРЕМЕНИ

Непертурбативная техника для ядра теплопроводности основана на приближении, качественно отличном от использованных в предыдущем разделе. Вместо наложения тех или иных условий малости на фоновые поля, мы рассмотрим довольно общий случай, но рассмотрим предел большого собственного времени $s \rightarrow \infty$. Продолжая работать в плоском пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, подставим анзац (2.1) в уравнение теплопроводности, откуда получим уравнение на неизвестную функцию $\Omega(s | x, y)$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{1}{s}(x - y)^\mu \nabla_\mu \Omega = F(\nabla)\Omega. \quad (3.1)$$

Далее, предположим существование следующего $1/s$ -разложения для этой функции, которое вытекает, в частности, из ковариантной пертурбативной теории для $K(s | x, y)$ [11], [14] (она была вкратце описана выше – в ней отсутствовали неаналитические по $1/s$ слагаемые типа $\ln(1/s)$):

$$\Omega(s | x, y) = \Omega_0(x, y) + \frac{1}{s}\Omega_1(x, y) + O\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad (3.2)$$

и выведем совокупность рекуррентных уравнений на коэффициенты этого разложения

$$F(\nabla)\Omega_0(x, y) = 0, \quad (3.3)$$

$$F(\nabla)\Omega_1(x, y) = (x - y)^\mu \nabla_\mu \Omega_0(x, y), \quad (3.4)$$

.....

Очевидная трудность с выбором конкретного решения для этой цепочки уравнений состоит в отсутствии хорошо поставленной граничной задачи. Дело в том, что естественные нулевые граничные условия на бесконечности для исходного ядра $K(s | x, y)$ не налагают каких-либо граничных условий на функцию $\Omega(s | x, y)$, кроме ограничения на рост $\Omega(s | x, y)$ медленнее чем $\exp[+|x - y|^2/(2s)]$, из-за экспоненциального фактора в (2.1). С другой стороны, имеющаяся свобода в выборе неубывающих при $|x| \rightarrow \infty$ решений существенно помогает найти эти самые решения, так как в противном случае нетривиальные решения могли бы вообще не существовать. В самом деле, для эллиптического уравнения (3.3) с положительно-определенным оператором $F(\nabla)$ (мы везде предполагаем положительную определенность оператора) ненулевые решения, убывающие на бесконечности, отсутствуют. Таким образом, единственный оставшийся критерий выбора решений для (3.3), (3.4) — это требование симметрии коэффициентов $(\Omega_0(x, y), \Omega_1(x, y), \dots)$ относительно перестановки аргументов. Как будет показано далее, данный критерий, совместно с другими *естественными* предположениями, позволяет найти решения, которые потом будут проверяться на согласованность различными методами, включая теорию возмущений, вариационные уравнения на след ядра теплопроводности, в том числе по метрике, и т.д.

Отсутствие конкретных условий на убывание коэффициентов разложения (3.2) приводит еще к одной интересной особенности разложения при больших временах. Как будет показано, разложение функционального *следа* ядра теплопроводности, соответствующего (3.2), есть

$$\text{Tr } K(s) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \left\{ sW_0 + W_1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right\}, \quad (3.5)$$

что, очевидно, подразумевает, что, в отличие от определения (1.9), в этой формуле $W_n \neq \int dx \Omega_n(x, x)$, $n = 0, 1, \dots$, из-за сдвига на единицу в степенях s . Объясняется это кажущееся несоответствие между (3.2) и (3.5) тем, что $1/s$ -разложение (3.2) является неравномерным по аргументам x и y величины $\Omega(s | x, y)$. Следовательно, при фиксированном s выражение $\Omega(s | x, x)$, взятое из разложения, становится некорректным и, как следствие, функциональный след ядра теплопроводности (требующий интегрирования вплоть до бесконечности) не может быть получен путем наивного применения (1.9) к (3.2).

К счастью, есть способ преодолеть это затруднение. Функциональный след ядра теплопроводности может быть восстановлен по своему разложению с помощью решения следующего вариационного уравнения:

$$\frac{\delta \text{Tr } K(s)}{\delta V(x)} = -sK(s | x, x), \quad (3.6)$$

которое является прямым следствием определения ядра теплопроводности. Присутствующее в правой части этого уравнения собственное время s в первой степени объясняет, в частности, его дополнительную степень в (3.5) по сравнению с (3.2). Уравнение (3.6) распадается на последовательность вариационных уравнений

$$\frac{\delta W_n}{\delta V(x)} = -\Omega_n(x, x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.7)$$

которые будут использоваться для вывода первых двух коэффициентов в (3.5).

3.1. Старший порядок разложения. Применим обозначенную выше стратегию вычисления для нахождения лидирующего порядка в $1/s$ -разложении [14]. Сделаем *естественное* предположение, что $\Omega_0(x, y)$ при $|x| \rightarrow \infty$ не возрастает, не зависит от направления $n^\mu = x^\mu/|x|$ и соответственно стремится к некоторой конечной величине $C(y)$, зависящей только от y . Тогда решение (3.3), удовлетворяющее граничному условию $\Omega_0(x, y)|_{|x| \rightarrow \infty} = C(y)$, единственно и может быть представлено в виде $\Omega_0(x, y) = \Phi(x)C(y)$, где $\Phi(x)$ — функция специального вида:

$$\Phi(x) = 1 + \frac{1}{\square - V} V(x) \equiv 1 + \int dy G(x, y) V(y), \quad (3.8)$$

удовлетворяющая однородному уравнению с единичным граничным условием на бесконечности

$$F(\nabla)\Phi(x) = 0, \quad \Phi(x) \rightarrow 1, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Из требования симметрии по x и y получаем, что $\Omega_0(x, y) = C\Phi(x)\Phi(y)$, где значение нормировочной константы $C = 1$ следует из сопоставления с известным явным выражением для ядра теплопроводности в плоском пространстве с нулевым потенциалом $V(x) = 0$. Таким образом,

$$\Omega_0(x, y) = \Phi(x)\Phi(y). \quad (3.10)$$

Заметим, что если наивно проинтегрировать данное выражение по всему пространству, то след ядра теплопроводности оказывается плохо определенным, из-за того что интеграл от величины $\Omega_0(x, y)$ при совпадающих аргументах расходится,

$$\int dx \Omega(s|x, x) = \int dx \Phi^2(x) = \infty.$$

Наоборот, вариационное уравнение (3.7) на функционал W_0 удовлетворяет условию совместности в силу соотношения

$$\frac{\delta \Phi(x)}{\delta V(y)} = G(x, y) \Phi(y) \quad (3.11)$$

и имеет следующее решение в виде хорошо определенного сходящегося интеграла [14]:

$$W_0 = - \int dx V(x) \Phi(x). \quad (3.12)$$

3.2. Сублидирующий порядок. Для сублидирующего порядка уравнение (3.4) принимает вид

$$F(\nabla)\Omega_1(x, y) = (x - y)^\mu \nabla_\mu \Phi(x) \Phi(y) \quad (3.13)$$

с неоднородным слагаемым в правой части. Симметричное по x и y решение, вычисленное в [15],

$$\begin{aligned} \Omega_1(x, y) = & \frac{1}{\square_x - V_x} (x - y)^\mu \nabla_\mu \Phi(x) \Phi(y) + (x \leftrightarrow y) + \\ & + 2 \frac{1}{\square_x - V_x} \nabla_\mu \Phi(x) \frac{1}{\square_y - V_y} \nabla^\mu \Phi(y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

не убывает на бесконечности⁴⁾. Более того, в этом решении присутствуют линейно растущие слагаемые как по x , так и по y , что является следствием отсутствия убывания в правой части (3.13). Поэтому решение, вообще говоря, не единственно, но правильность данного выбора подкрепляется тем фактом, что соответствующий предел совпадающих аргументов $\Omega_1(x, x)$ удовлетворяет условиям совместности вариационного уравнения (3.7) для W_1 [15] и совпадает с результатом непосредственного суммирования рядов теории возмущений для $\text{Tr } K(s)$ [14]. Ответ для W_1 принимает вид

$$W_1 = \int dx \left\{ 1 - 2 \nabla_\mu \Phi \frac{1}{\square - V} \nabla^\mu \Phi \right\}, \quad (3.15)$$

где нетривиальное нелокальное слагаемое, квадратичное по градиентам $\Phi(x)$, задается хорошо определенным сходящимся интегралом, в отличие от первого слагаемого, которое добавлено как постоянная функционального интегрирования из сравнения полученного результата с точно известным решением для случая нулевого потенциала.

Для обоснования непertурбативных алгоритмов этого раздела и, в частности, для проверки правильности выбора решений для коэффициентов $1/s$ -разложения (3.2) можно сравнить полученные результаты с результатами пересуммирования нелокальных рядов в пертурбативной технике [9], [11], [12]. В рамках этой техники следя ядра теплопроводности разлагается в нелокальный ряд (2.20), (2.21) по степеням потенциала V с вычислимыми явно коэффициентами – нелокальными формфакторами $F_n(s | x_1, x_2, \dots, x_n)$. Их лидирующее асимптотическое поведение при больших s было получено в [11] и может быть распространено на первый сублидирующий порядок по $1/s$ [14]. В этой аппроксимации также можно явно просуммировать бесконечные ряды по степеням потенциала [14], [21], чтобы подтвердить полученные ранее ответы для W_0 (3.12) и W_1 (3.15).

⁴⁾Здесь и далее индекс дифференциального оператора в знаменателе обозначает аргумент, на который действует соответствующая функция Грина.

4. НОВОЕ НЕЛОКАЛЬНОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ

Непертурбативная асимптотика ядра теплопроводности позволяет существенно улучшить вычисление эффективного действия. Новое приближение, которое учитывает поведение $\text{Tr } K(s)$ как при малых, так и при больших временах, одновременно описывает и ультрафиолетовые, и инфракрасные свойства теории и генерирует новые структуры в эффективном действии. Эти структуры обобщают локальный потенциал Коулмена–Вайнберга (2.15) на случай, когда (фоновое) поле не однородно на всем пространстве-времени и стремится к нулю на бесконечности. Как было показано в п. 2.2, только случай чрезвычайно медленного и поэтому физически не интересного убывания потенциала (2.18) с $p < 2$ может быть описан по теории возмущений. Для случая более быстрого убывания при $|x| \rightarrow \infty$ инфракрасное обрезание интеграла по собственному времени в формализме модифицированного градиентного разложения перестает работать, поэтому приходится использовать или нелокальную теорию возмущений п. 2.3, или непертурбативную асимптотику раздела 3. Последняя позволяет получить нелокальное непертурбативное действие, которое нетривиально учитывает явления взаимодействия между внутренней частью пространства-времени при конечных $|x|$ и областью $|x| \rightarrow \infty$, где потенциал стремится к нулю.

При построении нового приближения ключевая идея заключается в замене $\text{Tr } K(s)$ в (1.8) на некоторый приближенный функционал $\text{Tr } \bar{K}(s)$ такой, что его асимптотики малого и позднего времен совпадают с асимптотиками точного функционала, а интеграл по s вычисляется явно. Здесь мы используем простейшую возможность, а именно: возьмем две простые функции $\text{Tr } K_{<}(s)$ и $\text{Tr } K_{>}(s)$,

$$\text{Tr } K_{<}(s) = \frac{1}{(4\pi s)^2} \int dx e^{-sV}, \quad (4.1)$$

$$\text{Tr } K_{>}(s) = \frac{1}{(4\pi s)^2} \int dx (1 - sV\Phi), \quad (4.2)$$

которые просто являются асимптотиками $\text{Tr } K(s)$ при $s \rightarrow 0$ (модифицированное градиентное разложение с опущенными слагаемыми, содержащими производные от потенциала) и $s \rightarrow \infty$, и используем их для аппроксимации $\text{Tr } K(s)$ соответственно в областях $0 \leq s \leq s_*$ и $s_* \leq s < \infty$ для некоторого s_* :

$$\text{Tr } \bar{K}(s) = \begin{cases} \text{Tr } K_{<}(s), & s < s_*, \\ \text{Tr } K_{>}(s), & s > s_*. \end{cases} \quad (4.3)$$

Значение s_* будет вычисляться из требования совпадения двух функций при s_* , что будет гарантировать стационарность $\bar{\Gamma}$ относительно выбора s_* , $\partial \bar{\Gamma} / \partial s_* = 0$,

$$\text{Tr } K_{<}(s_*) = \text{Tr } K_{>}(s_*). \quad (4.4)$$

Таким образом, новое приближение для эффективного действия можно записать в виде

$$\bar{\Gamma} = -\frac{1}{2} \int_0^{s_*} \frac{ds}{s} \text{Tr } K_{<}(s) - \frac{1}{2} \int_{s_*}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr } K_{>}(s), \quad (4.5)$$

а его отклонение от точного $\Gamma_{1-\text{loop}}$, пропорциональное $\text{Tr}[K(s) - \overline{K}(s)]$, можно рассматривать как возмущение. Такая кусочно-гладкая аппроксимация эффективно работает, только если области применимости двух асимптотических разложений (для малых и больших s) перекрываются и точка s_* попадает в область перекрытия. В этом случае поправки по отклонению $\text{Tr} \overline{K}(s)$ от точного $\text{Tr} K(s)$ равномерно ограничены всюду и можно ожидать, что (4.5) даст хорошее приближение к точному результату. Такое требование может выполняться по меньшей мере для двух достаточно широких классов потенциалов $V(x)$. Для простоты предположим, что потенциал обладает конечной амплитудой внутри компактного носителя с характерным масштабом R [14],

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, & |x| > R, \\ V(x) &\sim V_0, & |x| < R, \end{aligned} \quad (4.6)$$

и его производные не слишком большие и равномерно ограничены величиной порядка V_0/R .

4.1. Малый потенциал. Первому классу принадлежат потенциалы, малые в единицах обратного масштаба длины компактного носителя,

$$V_0 R^2 \ll 1. \quad (4.7)$$

Рассмотрим для начала случай четырехмерного пространства-времени, $d = 4$. Несложные вычисления дают следующий ответ [14], [21] для конечной части действия, справедливый с точностью до поправок, пропорциональных параметру малости (4.7):

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma} \simeq & \frac{1}{64\pi^2} \int d^4x V^2(x) \ln \left(\int d^4y V^2(y) \right) - \\ & - \frac{1}{64\pi^2} \int d^4x V^2(x) \ln \left(\int d^4y V \frac{\mu^2}{V - \square} V(y) \right), \quad d = 4. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В дальнейшем мы пренебрегаем ультрафиолетовыми расходимостями в действии и включаем все конечные слагаемые перенормировочного типа, пропорциональные $\int dx V^{d/2}$, в переопределение μ^2 .

Аналогично случаю потенциала Коулмена–Вайнберга роль массового параметра перенормировки μ^2 состоит в обезразмеривании аргумента второго логарифма в выражении (4.8). Тем не менее обычное выражение (4.7) для потенциала Коулмена–Вайнберга в случае малых V заменяется качественно другой, нелокальной структурой. Для малых потенциалов градиентные слагаемые доминируют, и, таким образом, исходное коулмен-вайнберговское слагаемое не выживает в данном приближении. Однако оно может быть восстановлено при переходе к формальному пределу постоянного потенциала, когда аргумент второго логарифма стремится к $\mu^2 \int dx V$, а бесконечный объемный фактор $\int dx$ сокращается в разности двух логарифмов, так что $\overline{\Gamma} \rightarrow \Gamma_{\text{CW}}$, $V(x) \rightarrow \text{const}$, где Γ_{CW} есть действие Коулмена–Вайнберга (2.15) в размерности $d = 4$. Это подтверждает непротиворечивость используемого приближения.

Для более высоких (четных) размерностей $d > 4$ логарифмическое слагаемое в действии оказывается сублидирующим [21] и в ответе доминируют следующие, не зависящие от перенормировки, *отрицательно определенные* слагаемые:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} \simeq & -\frac{1}{(8\pi)^{d/2}} \frac{2}{d(d-2)} \int dx V^2(x) \left(\frac{\int dy V^2(y)}{\int dy V \frac{1}{V-\square} V(y)} \right)^{d/2-2} + \\ & + \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \frac{(-V)^{d/2}(x)}{(d/2)!} \ln \left(\frac{\int dy V^2(y)}{\int dy V \frac{\mu^2}{V-\square} V(y)} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь второе слагаемое для малых, но пространственно неоднородных потенциалов в общем случае много меньше первого, поскольку в силу оценки (4.7)

$$\frac{\int dy V^2(y)}{\int dy V \frac{1}{V-\square} V(y)} \gg V(x). \quad (4.10)$$

Тем не менее в пределе, когда потенциал стремится к константе, это отношение (которое есть не что иное, как $1/s_*$) стремится к V , так что оба слагаемых становятся величинами одного порядка. Первое становится слагаемым перенормировочного типа, пропорциональным $\int dx V^{d/2}$, в то время как второе становится (логарифмически более сильным) d -мерным потенциалом Коулмена–Вайнберга (2.15). Так что принцип соответствия выполняется и в высших размерностях.

4.2. Большой потенциал. Другой класс потенциалов, для которых кусочно-гладкое приближение (4.5) эффективно, соответствует противоположной оценке:

$$V_0 R^2 \gg 1, \quad (4.11)$$

т.е. случаю больших потенциалов в единицах обратного характерного размера носителя. В данном случае градиентные слагаемые уже не доминируют в сравнении с потенциальными слагаемыми и эффективное действие содержит слагаемое типа Коулмена–Вайнберга, модифицированное особой нелокальной поправкой (ранее выведенной в [14] для $d = 4$),

$$\bar{\Gamma} \simeq \Gamma_{\text{CW}} + \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{2}{d(d-2)} \int_{|x| \leq R} dx \langle V \Phi \rangle^{d/2}. \quad (4.12)$$

Эта поправка содержит среднее значение функции $V \Phi(x)$ по компактному носителю

$$\langle V \Phi \rangle \equiv \int_{|x| \leq R} dx V \Phi \bigg/ \int_{|x| \leq R} dx. \quad (4.13)$$

Этот алгоритм снова выдерживает проверку в формальном пределе постоянного потенциала, так как в этом пределе функция $\Phi(x)$, определенная в (3.8), стремится к нулю (а размер носителя R стремится к бесконечности).

5. ВКЛЮЧЕНИЕ ГРАВИТАЦИИ

Полученная асимптотика позднего времени обладает тем замечательным свойством, что может быть непосредственно обобщена на случай искривленного пространства-времени. В этом случае плоская метрика заменяется на метрику искривленного пространства, а интервал в анзаце (2.1) заменяется на мировую функцию – половину квадрата геодезического расстояния между точками x и y ,

$$\delta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x), \quad \frac{|x-y|^2}{2} \rightarrow \sigma(x, y). \quad (5.1)$$

Квазиклассический анзац (2.1) принимает вид

$$K(s | x, y) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \exp \left[-\frac{\sigma(x, y)}{2s} \right] \Omega(s | x, y) g^{1/2}(y), \quad (5.2)$$

где $\Omega(s | x, y)$ – бискалярная величина, предел которой при малых временах в отличие от (2.3) есть

$$\begin{aligned} \Omega(s | x, y) &\rightarrow \Delta^{1/2}(x, y), \quad s \rightarrow 0, \\ \Delta(x, y) &= g^{-1/2}(x) (\det \partial_\mu^x \partial_\nu^y \sigma(x, y)) g^{-1/2}(y) \neq 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

в терминах детерминанта Паули–Ван Флека–Моретт (веса 0) [16], [17]⁵⁾.

Выделение фактора $\Delta^{1/2}(x, y)$ в (5.1) с точки зрения разложения при больших временах излишне. Тем не менее эта величина весьма важна и связана с существенным предположением, лежащим в основе наших результатов. Мы предполагаем отсутствие так называемых фокальных точек для совокупности геодезических, определяющих мировую функцию $\sigma(x, y)$. Таким образом, мы предполагаем, что $\Delta(x, y) \neq 0$ для всех пар точек x и y , что гарантирует глобальную определенность и единственность $\sigma(x, y)$ на рассматриваемом асимптотически плоском пространстве. Данное предположение обосновывает анзац (5.2), который должен быть корректно глобально определен, так как коэффициенты разложения (3.2) будут решениями эллиптической краевой задачи с граничными условиями на бесконечности.

Мы также предполагаем, что метрика является асимптотически плоской и в декартовых координатах обладает следующим характером убывания на бесконечности, характерным для d -мерного евклидова пространства:

$$g_{\mu\nu}(x)|_{|x| \rightarrow \infty} = \delta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right). \quad (5.4)$$

Это требование не исключает присутствия каустик у геодезических, $\Delta(x, y) = 0$, что зависит от локальных свойств гравитационного поля и не связано с его свойствами на

⁵⁾ Мы определяем $\delta(x, y)$ -функцию как скаляр по отношению к первому аргументу x и плотность единичного веса по отношению ко второму аргументу y . Соответственно ядро теплопроводности имеет такие же веса по своим аргументам. Такая асимметрия по x и y объясняет присутствие фактора $g^{1/2}(y)$ в (5.2) и бискалярную природу $\Omega(s | x, y)$.

больших расстояниях. Предположение геодезической выпуклости, возможно, является слишком сильным для некоторых физически интересных ситуаций, и мы надеемся, что полученная асимптотика позднего времени останется справедливой даже при наличии каустик (хотя, возможно, ценой дополнительных вкладов, которые мы не рассматриваем в данной статье)⁶⁾.

5.1. Старший порядок разложения. Повторяя аргументацию раздела 3, мы немедленно находим последовательность рекуррентных уравнений на коэффициенты $1/s$ -разложения (3.2) для ядра теплопроводности оператора $F(\nabla)$, (1.4), в искривленном пространстве-времени. Их решение в лидирующем порядке оказывается непосредственной ковариантизацией результата, полученного для плоского пространства-времени (3.10). В ответ входит универсальная скалярная функция $\Phi(x)$, которая теперь является функционалом как от потенциала, так и от метрики,

$$\Phi(x) \equiv \Phi(x)[g_{\mu\nu}, V] = 1 + \int dy G(x, y)V(y), \quad (5.5)$$

и выражается через функцию Грина искривленного пространства $G(x, y) \equiv G(x, y)[V, g_{\mu\nu}]$, удовлетворяющую тем же граничным условиям на бесконечности:

$$F(\nabla)G(x, y) = \delta(x, y), \quad G(x, y)|_{|x| \rightarrow \infty} = 0. \quad (5.6)$$

Таким образом, старший порядок разложения $K(s | x, y)$ при больших временах есть ковариантизация результата для плоского пространства-времени. Примечательно, что практически то же самое происходит и в случае функционального следа ядра теплопроводности. Его лидирующая асимптотика задается двумя слагаемыми. Первое из них есть непосредственная ковариантизация (3.13), а второе выражается через новую структуру – поверхностный интеграл по пространственно-временной бесконечности, отражающий тот факт, что метрика пространства-времени является асимптотически плоской:

$$W_0 = - \int dx g^{1/2} V \Phi(x) + \frac{1}{6} \Sigma[g_\infty], \quad (5.7)$$

$$\Sigma[g_\infty] = \int_{|x| \rightarrow \infty} d\sigma^\mu \delta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}). \quad (5.8)$$

Доказательство этого утверждения не может опираться на ковариантное разложение по степеням V и $R_{\mu\nu}$ [9], [11]–[13], [18]. В данном случае, в отличие от случая пертурбативного разложения только по степеням потенциала, n -й член разложения по кривизнам

⁶⁾Эта надежда основана на простом факте, что лидирующий порядок в $1/s$ -разложении не чувствителен к свойствам мировой функции. В следующих порядках в основной интересующий нас объект $\text{Tr } K(s)$ входит предел совпадающих точек мировой функции $\sigma(x, x) = 0$, в то время как асимптотические коэффициенты в $\Omega_n(x, y)$ нелокально зависят от глобальной геометрии и в них могут возникнуть дополнительные вклады от каустик, аналогичные вкладам в случае, когда точки x и y вне геодезически выпуклой окрестности соединяются несколькими геодезическими [22].

в явном виде неизвестен (даже вычисление третьего порядка является весьма сложной вычислительной задачей [12]). Поэтому остается только метрический аналог вариационного уравнения (3.7) для восстановления функционального следа по ядру $K(s | x, y)$. Но даже этого оказывается недостаточно, так как вариационное уравнение (3.7) справедливо только с точностью до поверхностных слагаемых, которые в случае вариации по метрике не обращаются в нуль. Действительно, вариационное уравнение для экспоненты оператора фактически есть

$$\begin{aligned} \delta_g \operatorname{Tr} e^{sF} &= \int_0^s dt \operatorname{Tr} [e^{(s-t)F} \delta_g F e^{tF}] = s \operatorname{Tr} [\delta_g F e^{sF}] + \\ &+ \text{поверхностные слагаемые,} \end{aligned} \quad (5.9)$$

где второе равенство выполняется вследствие свойства цикличности функционального следа. В отличие от конечномерных матриц в данном случае свойство цикличности бесконечномерного функционального следа основано на неоднократном (в действительности бесконечнократном) интегрировании по частям, таким образом допуская появление конечных поверхностных интегралов. К счастью, для асимптотически плоского пространства-времени их можно вычислить в лидирующем порядке теории возмущений. Поэтому для вывода (5.7) мы воспользуемся комбинацией вариационной и пертурбативной техник.

Рассмотрим сначала вариационную производную $\operatorname{Tr} K(s)$ по метрике в классе вариаций $\delta g_{\mu\nu}$, достаточно быстро убывающих на бесконечности, так что можно пренебречь вкладом от интегрирования по частям в выражении (5.9). Соответствующая вариационная производная принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta \operatorname{Tr} K(s)}{\delta g_{\mu\nu}(x)} &= s \int dy \frac{\delta F(\nabla_y)}{\delta g_{\mu\nu}(x)} K(s | y, y') \Big|_{y'=y} = \\ &= -s g^{1/2}(x) f^{\mu\nu}(\nabla_x, \nabla_y) K(s | x, y) \Big|_{x=y}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где

$$f^{\mu\nu}(\nabla_x, \nabla_y) = -\nabla_x^{(\mu} \nabla_y^{\nu)} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \square_x + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_x^\lambda \nabla_\lambda^y. \quad (5.11)$$

Непосредственная проверка показывает, что в этом классе вариаций, возмущающих только объемную часть (5.7), равенство (5.10) в старшем порядке по $1/s$ действительно выполняется [15],

$$\frac{\delta W_0}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = -g^{1/2}(x) f^{\mu\nu}(\nabla_x, \nabla_y) \Phi(x) \Phi(y) \Big|_{x=y}. \quad (5.12)$$

При вариации функционала W_0 , заданного выражением (5.7), используется выражение для вариации по метрике функции $\Phi(x)$ – аналог (3.11) –

$$\frac{\delta \Phi(x)}{\delta g_{\mu\nu}(y)} = G(x, y) f^{\mu\nu} \left(\vec{\nabla}_y, \overleftarrow{\nabla}_y \right) \Phi(y), \quad (5.13)$$

где стрелки указывают направление действия производных.

Метрические вариации, убывающие при $|x| \rightarrow \infty$ как поправки от асимптотически плоского пространства-времени (5.4), $\delta g_{\mu\nu}(x) \sim 1/|x|^{d-2}$, порождают неисчезающие (при устремлении границы к бесконечности) поверхностные вклады в вариационное уравнение (5.9) и при этом не могут быть проверены с помощью (5.10). К счастью, ковариантная теория возмущений, описанная в п. 2.3, показывает [11], что такие слагаемые (возникающие при циклической перестановке ядер теплопроводности под знаком функционального следа) возникают только в линейном порядке пертурбативного разложения по степеням отклонений $h_{\mu\nu}$ метрики $g_{\mu\nu}$ от метрики плоского пространства. Таким образом, они могут быть восстановлены из простого сравнения (5.7) с асимптотикой позднего времени, полученной в [12], [13] до третьего порядка по кривизнам и потенциалу⁷⁾. Эта асимптотика для оператора вида (1.4) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \text{Tr } K(s) = & -\frac{s}{(4\pi s)^{d/2}} \int dx g^{1/2} \left\{ V + V \frac{1}{\square} V + V \frac{1}{\square} V \frac{1}{\square} V + O(V^4) \right\} + \\ & + \frac{1}{6} \frac{s}{(4\pi s)^{d/2}} \int dx g^{1/2} \left\{ R - R_{\mu\nu} \frac{1}{\square} R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} R \frac{1}{\square} R + \right. \\ & + \frac{1}{2} R \left(\frac{1}{\square} R^{\mu\nu} \right) \frac{1}{\square} R_{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \left(\frac{1}{\square} R_{\mu\nu} \right) \frac{1}{\square} R + \\ & + \left(\frac{1}{\square} R^{\alpha\beta} \right) \left(\nabla_\alpha \frac{1}{\square} R \right) \nabla_\beta \frac{1}{\square} R - 2 \left(\nabla^\mu \frac{1}{\square} R^{\nu\alpha} \right) \left(\nabla_\nu \frac{1}{\square} R_{\mu\alpha} \right) \frac{1}{\square} R - \\ & \left. - 2 \left(\frac{1}{\square} R^{\mu\nu} \right) \left(\nabla_\mu \frac{1}{\square} R^{\alpha\beta} \right) \nabla_\nu \frac{1}{\square} R_{\alpha\beta} + O[R_{\mu\nu}^4] \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Нелокальное разложение $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = 1 + \frac{1}{\square} V(x) + \frac{1}{\square} V \frac{1}{\square} V(x) + O(V^3), \quad (5.15)$$

очевидно восстанавливает из первого интеграла в (5.14) первое слагаемое в (5.7), содержащее явно только степени потенциала с *зависящими от метрики* нелокальностями.

Второй интеграл в (5.14) является топологическим инвариантом, не зависящим от локальных вариаций метрики во внутренней области пространства-времени; именно в этом классе вариаций $\delta g_{\mu\nu}(x)$ ранее была вычислена функциональная производная (5.10). Непосредственное разложение по степеням $h_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, на плоском фоне в декартовых координатах показывает, что этот член сводится к поверхностному интегралу на бесконечности. Для класса асимптотически плоских метрик с $h_{\mu\nu}(x) \sim 1/|x|^{d-2}$, $|x| \rightarrow \infty$, этот поверхностный интеграл линеен по возмущениям (вклады более высоких степеней $h_{\mu\nu}$ в этот интеграл исчезают) и содержит только *локальный* вклад

⁷⁾Этого приближения достаточно для проверки вклада, линейного по $h_{\mu\nu}$. В ковариантной теории возмущений возмущение метрики раскладывается в бесконечный ряд по кривизнам, что является платой за общую ковариантность разложения.

асимптотики на бесконечности, $g_{\mu\nu}^\infty(x) = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)|_{|x| \rightarrow \infty}$,

$$\begin{aligned} & \int dx g^{1/2} \left\{ R - R_{\mu\nu} \frac{1}{\square} R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} R \frac{1}{\square} R + \right. \\ & + \frac{1}{2} R \left(\frac{1}{\square} R^{\mu\nu} \right) \frac{1}{\square} R_{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \left(\frac{1}{\square} R_{\mu\nu} \right) \frac{1}{\square} R + \\ & + \left(\frac{1}{\square} R^{\alpha\beta} \right) \left(\nabla_\alpha \frac{1}{\square} R \right) \nabla_\beta \frac{1}{\square} R - 2 \left(\nabla^\mu \frac{1}{\square} R^{\nu\alpha} \right) \left(\nabla_\nu \frac{1}{\square} R_{\mu\alpha} \right) \frac{1}{\square} R - \\ & - 2 \left(\frac{1}{\square} R^{\mu\nu} \right) \left(\nabla_\mu \frac{1}{\square} R^{\alpha\beta} \right) \nabla_\nu \frac{1}{\square} R_{\alpha\beta} + O[R_{\mu\nu}^4] \Big\} = \\ & = \int_{|x| \rightarrow \infty} d\sigma^\mu (\partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu h) \equiv \Sigma[g_\infty]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Здесь $d\sigma^\mu$ – мера объема сферы радиуса $|x| \rightarrow \infty$, $\partial^\mu = \delta^{\mu\nu} \partial_\nu$, а $h = \delta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$.

Ковариантный способ проверки данного соотношения заключается в вычислении вариации этого интеграла по метрике и демонстрации того, что подынтегральное выражение является полной дивергенцией, которая дает ожидаемое поверхностное слагаемое, линейное по $\delta g_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x)$ [21]. Таким образом, корректное выражение для W_0 модифицируется поверхностным слагаемым $\Sigma[g_\infty]$, не дающим вклада в вариационную производную $\delta W_0 / \delta g_{\mu\nu}(x)$ при конечных $|x|$.

Для асимптотически плоских метрик с законом убывания на бесконечности $h_{\mu\nu}(x) \sim M/|x|^{d-2}$, $|x| \rightarrow \infty$, поверхностный интеграл $\Sigma[g_\infty]$ присутствует в действии Гильберта–Эйнштейна

$$S_{\text{HE}}[g] \equiv - \int dx g^{1/2} R(g) + \Sigma[g_\infty], \quad (5.17)$$

обеспечивая корректность вариационной процедуры, приводящей к уравнениям Эйнштейна. Этот поверхностный интеграл может быть переписан ковариантно в форме Гиббонса–Хокинга $S_{\text{GH}}[g] = \Sigma[g_\infty]$ как поверхностный интеграл от удвоенного следа внешней кривизны K границы (с учетом соответствующего вычитания бесконечного вклада фонового плоского пространства-времени) [23]. Таким образом, (5.16) – это поверхностный интеграл, *локально* зависящий от метрики на границе и ее нормальных производных. Ценность соотношения (5.16) заключается в выражении поверхностного интеграла в виде объемного интеграла по пространству-времени от *нелокального* функционала метрики в объеме. Последний не содержит явно дополнительных структур типа векторного поля, ортогонального к границе, хотя эти структуры неявно присутствуют в граничных условиях для нелокальных операций в подынтегральном выражении (5.16).

Попутно заметим, что равенство (5.16) может быть использовано для записи действия Гильберта–Эйнштейна (в евклидовом пространстве) (5.17) в виде *нелокального* разложения по кривизнам, начинающегося с *квадратичного* порядка по кривизне. Это наблюдение служит основой для последовательных ковариантных нелокальных модификаций эйнштейновской теории [10], мотивированных проблемами космологической постоянной и космологического ускорения [24].

5.2. Конформные свойства. Важный случай *зависящего от метрики* потенциала в (1.4) соответствует оператору конформного скалярного поля. Для случая размерности d он имеет вид

$$F(\nabla) = \square - \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1} R. \quad (5.18)$$

При локальных конформных (вейлевских) преобразованиях метрики, стремящихся к единице на бесконечности, этот оператор преобразуется однородно, домножаясь слева и справа на соответствующие степени конформного фактора:

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Psi^{4/(d-2)}(x) g_{\mu\nu}(x), \quad \Psi(x) = 1 + O\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (5.19)$$

$$\bar{F}(\nabla) = \Psi^{-1-4/(d-2)}(x) F(\nabla) \Psi(x). \quad (5.20)$$

В силу этого свойства универсальная функция $\Phi(x)$ (5.5) также преобразуется однородно, так как она удовлетворяет однородному уравнению для оператора (5.18) с теми же единичными граничными условиями,

$$\bar{\Phi}(x) \equiv \Phi(x) [\bar{g}_{\mu\nu}] = \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}. \quad (5.21)$$

Еще одно интересное свойство – конформное преобразование скалярной кривизны:

$$\bar{R}(x) = -4 \frac{d-1}{d-2} \Psi^{-1-4/(d-2)}(x) [F(\nabla) \Psi(x)], \quad (5.22)$$

которое означает, что $\Phi(x)$ может рассматриваться как специальный случай конформного преобразования к конформной калибровке нулевой скалярной кривизны, $\bar{R} = 0$, когда параметр Ψ этого преобразования равен Φ .

Рассмотрим теперь объемную часть лидирующей асимптотики W_0 (5.7) для случая конформного оператора (5.18)

$$W_0[g] = -\frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1} \int dx g^{1/2} R \Phi + \frac{1}{6} \Sigma[g_\infty]. \quad (5.23)$$

В силу (5.22) она преобразуется следующим образом:

$$-\frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1} \int dx \bar{g}^{1/2} \bar{R} \bar{\Phi} = \int dx g^{1/2} \Phi F(\nabla) \Psi = \int_\infty d\sigma^\mu (\partial_\mu \Psi - \partial_\mu \Phi). \quad (5.24)$$

Здесь использовалось уравнение $F(\nabla) \Phi = 0$, производилось интегрирование по частям и учитывалось, что Φ и Ψ равны 1 на бесконечности (но их производные в общем случае стремятся к нулю недостаточно быстро, чтобы можно было пренебречь поверхностным интегралом). Второе слагаемое в поверхностном интеграле может быть преобразовано обратно к объемному виду (теперь не содержащему Ψ):

$$-\int_\infty d\sigma^\mu \partial_\mu \Phi = -\int dx g^{1/2} \square \Phi = -\frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1} \int dx g^{1/2} R \Phi, \quad (5.25)$$

так что

$$\int dx \bar{g}^{1/2} \bar{R} \bar{\Phi} = \int dx g^{1/2} R \Phi - 4 \frac{d-1}{d-2} \int_{\infty} d\sigma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi. \quad (5.26)$$

С учетом конформного преобразования интеграла Гиббонса–Хокинга (5.8),

$$\bar{\Sigma} \equiv \Sigma[\bar{g}_{\infty}] = \Sigma - 4 \frac{d-1}{d-2} \int_{\infty} d\sigma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi, \quad (5.27)$$

это означает, что следующая линейная комбинация:

$$S_{\text{conf}}[g] = - \int dx g^{1/2} R \Phi + \Sigma[g_{\infty}], \quad (5.28)$$

конформно-инвариантна в классе локальных вейлевских преобразований (5.19),

$$S_{\text{conf}}[g] = S_{\text{conf}}[\bar{g}]. \quad (5.29)$$

В точности такая же структура может быть получена из действия (5.17) с помощью перехода к конформной калибровке, обращающей в нуль скалярную кривизну. Осуществив преобразование (5.19) с $\Psi = \Phi[g]$, находим, что

$$S_{\text{conf}}[g_{\mu\nu}] = S_{\text{HE}}[g_{\mu\nu} \Phi^{4/(d-2)}[g]]. \quad (5.30)$$

Конформная инвариантность этого выражения очевидна, так как $g_{\mu\nu} \Phi^{4/(d-2)}[g]$ — конформный инвариант для преобразования (5.19). Фактически этот функционал в 4-мерном контексте был предложен в [25] как конформное расширение вне массовой оболочки теории Эйнштейна в вакууме (или в присутствии бесследовых материальных источников).

Рассмотрим теперь конформные свойства асимптотики ядра теплопроводности для оператора (5.18). Для самого ядра теплопроводности эти свойства напрямую следуют из закона преобразования функции $\Phi(x)$ (5.21), что в лидирующем порядке дает

$$\bar{\Omega}(x, y) \bar{g}^{1/2}(y) = \Psi^{-1}(x) [\Omega(x, y) g^{1/2}(y)] \Psi^{1+4/(d-2)}(y). \quad (5.31)$$

Это преобразование похоже на преобразование оператора (5.20). Тем не менее такое совпадение случайно, потому что в отличие от (5.20) ядро теплопроводности не преобразуется простым однородным образом. Уравнение (5.20) не есть преобразование *подобия* — множители слева и справа от $F(\nabla)$ в (5.20) не обратны друг другу. Дополнительный фактор $\Psi^{-4/(d-2)}$ в $\bar{F}(\nabla) = \Psi^{-1}(\Psi^{-4/(d-2)} F(\nabla)) \Psi$ означает, что оператор $\bar{F}(\nabla)$ подобен другому оператору — $\Psi^{-4/(d-2)} F(\nabla)$, имеющему другое ядро теплопроводности. На самом деле этот фактор, определяющий конформное преобразование метрики (5.19), приводит к точно вычисляемой конформной аномалии эффективного действия. Но для

самого ядра теплопроводности и его функционального следа он порождает нетривиальный закон преобразования. Для функционального следа это преобразование с инфинитезимальным $\delta\Psi(x)$ в $\Psi(x) = 1 + \delta\Psi(x)$ выглядит так:

$$\begin{aligned}\delta\Psi \operatorname{Tr} \overline{K}(s)|_{\Psi=1} &= -\frac{4}{d-2}s \frac{d}{ds} \operatorname{Tr}(\delta\Psi K(s)) = \\ &= -\frac{4}{d-2}s \frac{d}{ds} \int dx \delta\Psi(x) \Omega(s|x, x).\end{aligned}\quad (5.32)$$

Когда вариация $\delta\Psi(x)$ сосредоточена на компактном носителе, мы вправе использовать лидирующую асимптотику $\Omega(s|x, x) \sim \Phi^2(x)/(4\pi s)^{d/2}$, так как в этом случае область $|x| \rightarrow \infty$ (в которой нарушается равномерность этой асимптотики) не входит в область интегрирования и $\delta\Psi \operatorname{Tr} K(s) = O(1/s^{d/2})$ при $s \rightarrow \infty$. Поэтому лидирующая асимптотика W_0 является конформным инвариантом относительно вейлевских преобразований с компактным носителем. Действительно, оба члена в (5.23) инвариантны по отдельности в силу (5.26) и (5.27).

Для конформных преобразований более общего вида с $\delta\Psi(x) \rightarrow 0$, но $\delta\Psi(x) \neq 0$, при $|x| \rightarrow \infty$ аналогичные заключения не могут быть сделаны на основании (5.32), так как теперь появляются области, где неравномерная асимптотика $\Omega(s|x, x)$ нарушается. Поэтому для такого класса преобразований функционал W_0 не обязательно будет конформно-инвариантным, что объясняет несоответствие коэффициентов объемного и поверхностного членов в (5.23) по сравнению со случаем конформного расширения теории Гильберта–Эйнштейна (5.28).

Довольно интересно, что в исключительном случае 4-мерного пространства-времени инвариантность W_0 сохраняется даже для преобразований с некомпактным носителем. В этом случае коэффициент неминимального взаимодействия скалярного поля с кривизной $(d-2)/4(d-1) = 1/6$ и

$$W_0[g] = \frac{1}{6} S_{\text{conf}}[g], \quad d = 4. \quad (5.33)$$

5.3. Проблемы с сублидирующим порядком. Как мы увидим, учет гравитации приводит к ряду проблем в высших порядках асимптотики позднего времени. В частности, в сублидирующем порядке уравнение для $\Omega_1(x, y)$, обобщающее (3.13) на случай искривленного пространства-времени, записывается в виде

$$F(\nabla)\Omega_1(x, y) = \left(\sigma^\mu(x, y) \nabla_\mu + \frac{1}{2} \square \sigma(x, y) - \frac{d}{2} \right) \Phi(x) \Phi(y) \quad (5.34)$$

и обладает симметричным решением, аналогичным (3.14) [15],

$$\begin{aligned}\Omega_1(x, y) &= \frac{1}{2} \psi(x, y) + \frac{1}{2} \psi(y, x) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{F(\nabla_x)} \vec{F}(\nabla_x) [\Phi(x) \sigma(x, y) \Phi(y)] \overleftarrow{F}(\nabla_y) \frac{1}{F(\nabla_y)}.\end{aligned}\quad (5.35)$$

Здесь $\psi(x, y)$ – специальная двухточечная функция:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{F(\nabla_x)} [2\sigma^\mu(x, y)\nabla_\mu \Phi(x) + (\square\sigma(x, y) - d)\Phi(x)]\Phi(y), \quad (5.36)$$

а стрелки указывают направление действия дифференциальных операторов и функций Грина, $1/F(\nabla)$, записанных в операторном виде. Это, естественно, подразумевает, что интегрирование по частям, которое обратило бы действие $F(\nabla)$ на $1/F(\nabla)$ (и, таким образом, привело бы к полному сокращению соответствующих нелокальностей), невозможно без возникновения нетривиальных поверхностных членов. Как показано в [15], для такого $\Omega_1(x, y)$ вариационное уравнение для W_1

$$\frac{\delta W_1}{\delta V(x)} = -g^{1/2}(x)\Omega_1(x, x) \quad (5.37)$$

имеет следующее формальное решение в терминах функции Грина оператора $F(\nabla)$:

$$W_1[V, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \int dx g^{1/2}(x) \frac{1}{F(\nabla_x)} \vec{F}(\nabla_x) [\Phi(x)\sigma(x, y)\Phi(y)] \overleftarrow{F}(\nabla_y)|_{y=x} + W_1^{\text{metric}}[g_{\mu\nu}]. \quad (5.38)$$

В этой формуле $W_1^{\text{metric}}[g_{\mu\nu}]$ – некоторый чисто метрический функционал – функциональная “константа” интегрирования уравнения (5.37). Последняя может быть определена только из метрического вариационного уравнения (5.10). Вычисления метрической вариации, проведенные в [21], показывают, что W_1^{metric} – не зависящая от метрики константа: $W_1^{\text{metric}}[g_{\mu\nu}] = \text{const.}$

Этот вывод выглядит антиинтуитивным, поскольку он приводит к очевидному противоречию между (3.15) и плоским пределом (5.38), заключающемся в первом слагаемом выражения (3.15). Это слагаемое отсутствует в (5.38), и попытка отождествить его с константой,

$$W_1^{\text{metric}} = \int dx \times 1, \quad (5.39)$$

противоречит процедуре ковариантизации при переходе к искривленному пространству (по существу, установленной в рамках ковариантного разложения по кривизнам [11], [12]):

$$\text{Tr } K(s) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \int dx \times 1 + \dots \rightarrow \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \int dx g^{1/2}(x) \times 1 + \dots \quad (5.40)$$

Причиной этого несоответствия является то, что, к сожалению, алгоритмы (5.35), (5.36) и (5.38), строго говоря, работают только в плоском пространстве. Основная сложность заключается в том, что нелокальная функция $\psi(x, y)$ хорошо (и однозначно) определена, только когда выражение в квадратных скобках в (5.36) достаточно быстро убывает на бесконечности. Первое слагаемое этого выражения убывает степенным образом $1/|x|^{d-2}$, так как $\sigma^\mu(x, y) \sim |x|$ и $\nabla_\mu \Phi(x) \sim 1/|x|^{d-1}$, и поэтому хорошо определено, по меньшей мере для размерностей $d > 4$. Наоборот, второе слагаемое пропорционально

девиации геодезических, $\square\sigma(x, y) - d$, которая имеет следующее весьма умеренное убывание на бесконечности:

$$\square\sigma(x, y) - d \sim 1/|x|, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (5.41)$$

Это приводит к квадратичной расходимости чисто метрического вклада в (2.12) в инфракрасном пределе⁸⁾.

Проследив в обратном порядке происхождение проблемы вплоть до уравнения (5.34), можно заметить, что источник в правой части этого уравнения ведет себя как $O(1/|x|)$ при $|x| \rightarrow \infty$, так что решение $\Omega_1(x, y) \sim |x|$ оказывается неубывающим на бесконечности и поэтому не фиксируется условиями типа Дирихле. Следует ожидать, что фиксация этого произвола приведет к регуляризации интеграла в $\psi(x, y)$ и однозначно определит все величины в сублидирующем порядке, но это пока остается задачей на будущее.

Вывод выражения (5.38) основан на операциях с нерегуляризованными расходящимися интегралами, что порождает серьезные сомнения в его достоверности. Однако довольно тонкая проверка метрической вариации [21] наводит на мысль, что при некоторой процедуре регуляризации инфракрасных расходимостей в (5.38) и (5.39) алгоритмы сохраняются также за рамками плоского пространства. Совместность этих алгоритмов с ковариантной теорией возмущений [11], [12], нетривиальная ввиду этих расходимостей, должна быть основана на выделении ковариантного интеграла $\int dx g^{1/2} \times 1$ (который сам по себе расходится!) из расходящихся нелокальных выражений (5.38), (5.39). Инфракрасная расходимость $\int dx g^{1/2} \times 1$ отражает непрерывность спектра оператора $F(\nabla)$ и в плоском пределе представляет собой тривиальную константу, не влияющую на физические предсказания. В искривленном пространстве этот интеграл становится функционально зависящим от геометрии и поэтому включает космологический член. Таким образом, сублидирующий порядок разложения позднего времени оказывается связанным с проблемой космологической постоянной, что мы кратко обсудим в заключении.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты, представленные выше, включают в себя непертурбативную асимптотику ядра теплопроводности (3.10) и (3.12), ее обобщение на случай искривленного пространства-времени (5.7), (5.8), а также соответствующие новые алгоритмы вычисления нелокального эффективного действия (4.8), (4.9) и (4.12). Обсудим возможные обобщения и приложения этих результатов, а также остающиеся пробелы в использованной технике.

Непертурбативное эффективное действие, альтернативное потенциалу Коулмена–Вайнберга, весьма интересно в связи с рядом приложений. С первого взгляда видно,

⁸⁾ Предел плоского пространства, наоборот, хорошо определен, потому что бискаляр геодезического расхождения (5.41) тождественно обращается в нуль для $\sigma(x, y) = |x - y|^2/2$. Следовательно, в квадратных скобках выражения (5.38) выживает только слагаемое, содержащее $\nabla_x^\mu \nabla_y^\nu \sigma(x, y) = -\delta^{\mu\nu}$, так что $\Omega_1(x, y)$ и W_1 сводятся к выражению (3.14) и второму слагаемому в (3.15), соответственно.

что в алгоритмах (4.8) и (4.9) проявляется нетривиальная и качественно важная зависимость от размерности пространства-времени. Так, для $d > 4$ в действие вносят доминирующий вклад *не зависящие от перенормировки* структуры, в которые не входит перенормировочный параметр μ^2 . В этом заключается существенное отличие от ситуации в четырехмерии (4.8), где эффекты инфракрасной области лишь “делокализуют” потенциал Коулмена–Вайнберга, сохраняя доминирующую зависимость от ультрафиолетового масштабного параметра. Это значит, что масштабное поведение не в состоянии полностью определить доминирующий инфракрасный вклад. Также интересно, что лидирующий вклад в старших размерностях *отрицательно определен*, что, возможно, имеет нетривиальные следствия. В то же время непертурбативные вклады заслуживают дальнейшего анализа, уточняющего их область применимости и учитывающего поправки от факторов, содержащих локальные производные, которыми мы пренебрегали ранее (члены с $\tilde{a}_n(x, x)$ при $n > 0$).

Что касается общего формализма асимптотики позднего времени, следует подчеркнуть, что трудности, с которыми мы столкнулись в ее высших порядках, представляют серьезную проблему, которую еще предстоит разрешить. Сублидирующий порядок на плоском фоне не страдает от этой проблемы, поскольку выражения (3.14) и (3.15) хорошо определены, но включение гравитации приводит к обсуждаемой проблеме. Тем не менее уже этот порядок по $1/s$ -разложению представляет огромный интерес, так как затрагивает проблему космологической постоянной. В самом деле, космологический член появляется в интеграле (1.8) из (ковариантизации) единичного слагаемого в $\text{Tr } K(s)$ (5.40) как

$$\Gamma_\Lambda = \int dx g^{1/2} \Lambda_\infty, \quad \Lambda_\infty = -\frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1+d/2}} \times 1. \quad (6.1)$$

Космологическая постоянная Λ_∞ ультрафиолетово расходится, а сам интеграл инфракрасно расходится в координатном смысле⁹⁾ – объемный интеграл $\int dx g^{1/2}$ для асимптотически плоского пространства расходится при $|x| \rightarrow \infty$.

Итак, проблема ковариантизации функционала W_1 с не зависящим от метрики слагаемым W_1^{metric} , (5.38) и (5.39), равнозначна задаче корректного восстановления ковариантного космологического члена из нелокальных выражений. Чтобы упростить обсуждение этого момента, рассмотрим чисто метрический случай, когда потенциал равен нулю, $V = 0$, $\Phi = 1$. Тогда сублидирующий вклад в функциональный след ядра

⁹⁾ Конечно, появление расходимостей указывает на то, что космологическая постоянная не может согласованно появиться в асимптотически плоском пространстве-времени. Вклад (6.1) в *безмассовых* теориях не несет осмысленной физической информации и сокращается в силу ряда взаимосвязанных механизмов. Сокращение гарантируется вкладом в эффективное действие локальной меры в функциональном интеграле, которая сокращает объемные расходимости [26]. Еще один механизм основан на использовании размерной регуляризации, которая обращает в нуль степенные расходимости. Все эти приемы перестают, однако, работать для *массивных* теорий или для теорий со спонтанно нарушенной симметрией, где индуцированная вакуумная энергия порождает проблему иерархии [27].

теплопроводности выглядит следующим образом:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int dx dy g^{1/2}(x) G(x, y) \square_x \square_y \sigma(x, y) + \int dx \times 1. \quad (6.2)$$

Первый интеграл, очевидно, обратится в нуль в случае плоского пространства-времени, где $\square_x \square_y \sigma(x, y) = 0$, так что его разложение по степеням кривизны начнется с первого порядка. Этот интеграл инфракрасно расходится и, более того, он расходится квадратично, как и слагаемое первого порядка в разложении по степеням возмущений $h_{\mu\nu}$ метрики (или по кривизнам),

$$\int dx g^{1/2}(x) = \int dx \left(1 + \frac{1}{2} h + \dots \right) = \int dx \left(1 - \frac{1}{\square} R(x) + \dots \right). \quad (6.3)$$

Сравнение (6.3) с (6.2) подсказывает, что первый интеграл в (6.2) начинается с того же нелокального слагаемого, линейного по $(1/\square)R$ (или локального по h). Таким образом, полный космологический член кажется закамуфлированным в выражении (6.2) как часть специального нелокального функционала¹⁰⁾,

$$W_1 = \int dx g^{1/2} \times 1 + O(R^2). \quad (6.4)$$

Данная ситуация не является совершенно новой. Мы уже видели, что локальный поверхностный интеграл Гиббонса–Хокинга имеет нелокальное представление (5.16), которое, в свою очередь, лежит в основе нелокального представления действия Гильберта–Эйнштейна, предложенного в [10]. Тем не менее эта аналогия не годится, в силу того что соответствующие интегралы в (6.2) и (6.3) инфракрасно расходятся и требуют специальной регуляризации для их сравнения. Эта регуляризация, по-видимому, будет частью общей схемы, необходимой для придания точного смысла сублидирующему и, возможно, более высоким порядкам $1/s$ -разложения. Введение этой регуляризации может привести к двум возможным сценариям – уравнение (6.4) либо подтвердится, либо окажется, что космологическая постоянная $\int dx g^{1/2}$ входит в $\text{Tr } K(s)$ при $s \rightarrow 0$ и при $s \rightarrow \infty$ с различными коэффициентными функциями s .

Второй вариант кажется маловероятным, но если он все же реализуется, это будет означать появление нового механизма индуцирования космологического члена. В самом деле, в этом случае зависящая от s (или парциальная) “космологическая постоянная” $\lambda(s)$ в $\text{Tr } K(s)$, $\text{Tr } K(s) = \lambda(s) \int dx g^{1/2} + \dots$, будет интерполяцией между $\lambda_{<}(s) = 1/(4\pi s)^{d/2}$ при $s \rightarrow 0$ и некоторой другой функцией $\lambda_{>}(s)$ при $s \rightarrow \infty$. Все это может породить индуцированную космологическую постоянную

$$\Lambda_{\text{ind}} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \lambda(s) \times 1 \neq 0, \quad (6.5)$$

¹⁰⁾Идея нелокального представления космологического члена ранее рассматривалась в [10], [28].

которая будет определено не равна нулю, так как в отличие от (6.1) этот интеграл больше не представляет собой чистую степенную расходимость, которая уничтожается размерной регуляризацией. Можно ожидать, что это прояснит интересную связь между проблемой космологической постоянной и инфракрасной асимптотикой ядра теплопроводности и нелокального эффективного действия.

В заключение отметим ряд возможных обобщений предлагаемой техники позднего времени. После преодоления проблем с инфракрасным поведением сублидирующего порядка алгоритмы эффективного действия (4.8) и (4.9) могут быть обобщены на случай искривленного пространства. Это обобщение интересно тем, что может описывать инфракрасные модификации теории гравитации с нелокальной гравитационной “постоянной”, зависящей от масштаба [10], [24]. Другое интересное обобщение заключается в отказе от ограничения только асимптотически плоскими геометриями. Первое, что предстоит сделать на этом пути, – рассмотреть асимптотически деситтеровские граничные условия, вызывающие особый интерес в связи с явлением космологического ускорения. Это обобщение подразумевает существенную модификацию как пертурбативной, так и непертурбативной техники вычисления ядра теплопроводности и обобщение гиббонс-хокинговского члена на асимптотически деситтеровское пространство. Еще одно обобщение касается полей более высоких спинов с ковариантными производными, включающими не только метрическую, но также и калибровочные связности, что позволит распространить данную технику на максимально широкий круг физических моделей.

Благодарности. Работа А. О. Барвинского над данной статьей была осуществлена при поддержке РФФИ (грант № 02-01-00930) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1578.2003.2). Д. В. Нестеров выражает благодарность за поддержку РФФИ (грант № 05-02-17661), Фонду Ландау (Германия) и Фонду “Династия” (Россия).

Список литературы

- [1] *H. van Dam, M. J. Veltman.* Nucl. Phys. D. 1970. V. 22. P. 397; *В. И. Захаров.* Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. № 9. С. 447; *A. I. Vainshtein.* Phys. Lett. 1972. V. 39. P. 393.
- [2] *M. A. Luty, M. Porrati, R. Rattazzi.* JHEP. 2003. V. 0309. P. 029; hep-th/0303116; *V. A. Rubakov.* Strong coupling in brane-induced gravity in five dimensions. hep-th/0303125.
- [3] *V. F. Mukhanov, A. Wipf, A. I. Zelnikov.* Phys. Lett. B. 1994. V. 332. P. 283.
- [4] *A. G. Mirzabekian, G. A. Vilkovisky.* Class. Quantum Gravit. 1995. V. 12. P. 2173; hep-th/9504028; Ann. Phys. 1998. V. 270. P. 391; gr-qc/9803006.
- [5] *N. C. Tsamis, R. P. Woodard.* Nucl. Phys. 1996. V. 474. P. 235; hep-th/9602315; Ann. Phys. 1997. V. 253. P. 1.
- [6] *R. Gregory, V. A. Rubakov, S. M. Sibiryakov.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5928; hep-th/0002072.
- [7] *G. R. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati.* Phys. Lett. B. 2000. V. 485. P. 208.
- [8] *M. E. Soussa, R. P. Woodard.* Class. Quantum Gravit. 2003. V. 20. P. 2737; astro-ph/0302030.
- [9] *A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky.* Nucl. Phys. B. 1987. V. 282. P. 163.
- [10] *A. O. Barvinsky.* Phys. Lett. B. 2003. V. 572. P. 109; hep-th/0304229.
- [11] *A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 333. P. 471.

- [12] *A. O. Barvinsky, Yu. V. Gusev, G. A. Vilkovisky, V. V. Zhytnikov.* Covariant Perturbation Theory (IV). Third Order in the Curvature, Report of the University of Manitoba. Preprint. Winnipeg: Univ. Manitoba, 1993.
- [13] *A. O. Barvinsky, Yu. V. Gusev, G. A. Vilkovisky, V. V. Zhytnikov.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 3543.
- [14] *A. O. Barvinsky, V. F. Mukhanov.* Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 065007; hep-th/0203132.
- [15] *A. O. Barvinsky, Yu. V. Gusev, V. F. Mukhanov, D. V. Nesterov.* Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 105003; hep-th/0306052.
- [16] *A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky.* Phys. Rep. 1985. V. 119. P. 1.
- [17] *B. S. De Witt.* Dynamical Theory of Groups and Fields. N.Y.: Gordon and Breach, 1965.
- [18] *A. O. Barvinsky, Yu. V. Gusev, G. A. Vilkovisky, V. V. Zhytnikov.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 3525.
- [19] *V. P. Frolov, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1981. V. 106. P. 307; Spherically-symmetric collapse in quantum gravity. In: Quantum Gravity. Proc. of the Second Seminar on Quantum Gravity (Moscow, 1981). Eds. M. A. Markov, P. C. West. N.Y.: Plenum, 1984. P. 267.
- [20] *A. M. Polyakov.* Phys. Lett. B. 1981. V. 103. P. 207.
- [21] *A. O. Barvinsky, D. V. Nesterov.* Nonperturbative heat kernel and nonlocal effective action. Preprint ESI-1444. Vienna: ESI, 2003; hep-th/0402043.
- [22] *R. Camporesi.* Phys. Rep. 1990. V. 196. P. 1.
- [23] *G. W. Gibbons, S. W. Hawking.* Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 2752.
- [24] *N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, G. Gabadadze.* Nonlocal modification of gravity and the cosmological constant problem. hep-th/0209227.
- [25] *E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1978. V. 73. P. 209.
- [26] *E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Rev. D. 1973. V. 8. P. 4241.
- [27] *S. Weinberg.* Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. P. 1.
- [28] *E. V. Gorbar, I. L. Shapiro.* JHEP. 2003. V. 0302. P. 021.

Поступила в редакцию 2.XI.2004 г.