Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Л. Аэро, С. А. Вакуленко, Асимптотическое поведение решений для сильно нелинейной модели кристаллической решетки, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 3, 357–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1818>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:46:17

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Рассматривается система гиперболических нелинейных уравнений, описывающая динамику взаимодействия оптических и акустических мод сложной кристаллической решетки (без центра симметрии), состоящей из двух подрешеток. Эта система может быть рассмотрена как нелинейное обобщение известной модели Борна–Хуан Куня на случай произвольно больших смещений подрешеток. При подходящем выборе параметров система сводится к уравнению синус-Гордон или к классическим уравнениям теории упругости. Если ввести в систему физически естественные диссипативные силы, то удастся доказать существование компактного аттрактора и сходимости траекторий к равновесным решениям. В одномерном случае структуру равновесных решений можно полностью описать. В этом случае также удастся получить асимптотические решения, описывающие распространение волн. При наличии неоднородных возмущений данная система может быть сведена к известной модели Хопфилда, описывающей аттракторную нейронную сеть и имеющей сложные режимы поведения.

Ключевые слова: нелинейность, аттрактор, сложное поведение, нейронные сети.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы рассматриваем асимптотическое поведение решений одной нелинейной системы уравнений в частных производных. Эта система была предложена в работе [1] как обобщение известной линейной модели Борна–Хуан Куня [2], описывающей взаимодействие акустических и оптических мод в кристаллах. Учитываются неограниченные смещения подрешеток с переходом через точки бифуркации (неустойчивости) решетки. Система весьма сложна и обладает большим спектром нетривиальных решений и режимов поведения. В частности, при некотором выборе параметров получается уравнение синус-Гордон или другие нелинейные волновые уравнения. Было показано [1], что она имеет нетривиальные решения, описывающие движение фронтов, образование периодических структур и дислокации.

Наша цель – описать поведение решений этой системы при больших временах. Это удастся сделать, введя диссипативные вклады, имеющие физический смысл. Тогда при

* Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: aero@microm.ipme.ru, vakul@mech.ipme.ru

некоторых ограничениях на параметры системы удается показать, что система обладает аттрактором. Здесь мы применяем известные подходы [3]–[7]. Еще одна цель работы – построить асимптотические решения, описывающие распространение волн и образование структур. Здесь мы используем идеи В. П. Маслова и его учеников [8], см. также [9].

В последней части работы мы анализируем связь между рассматриваемой моделью и теорией нейронных сетей. Мы показываем, что при некотором выборе параметров и при наличии неоднородных возмущений асимптотическое (при больших временах) поведение системы такого типа описывается уравнениями нейронной сети Хопфилда. Таким способом можно получить параллельную модель нейронной сети, которая обладает существенно большей ассоциативной памятью, чем обычные модели.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваемая система уравнений описывает взаимодействие оптических и акустических мод в нелинейной континуальной модели кристалла (без центра симметрии) и имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = c_{ikj} \phi_{k,j} + \lambda_{ikjm} U_{k,jm}, \quad (2.1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \phi_i} - c_{kij} U_{k,j} + \bar{c}_{kij} \phi_{k,j} + \kappa_{ikjm} \phi_{k,jm}. \quad (2.2)$$

Здесь $U_i(x_1, x_2, x_3, t)$ и $\phi_i(x_1, x_2, x_3, t)$ – неизвестные функции, задающие компоненты смещений, порожденных акустическими и оптическими модами в кристалле. При этом U_i – это смещения центров инерции элементарных ячеек, а ϕ_i – взаимные смещения подрешеток (взаимные смещения пар атомов внутри ячейки). Мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам и используем следующие стандартные обозначения: $U = (U_1, U_2, U_3)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, $\phi_{k,jm}$ обозначает вторую производную $\partial^2 \phi_k / \partial x_j \partial x_m$ и $\phi_{k,j}$ – первую производную $\partial \phi_k / \partial x_j$. Коэффициенты c_{ikj} , κ_{ikjm} и λ_{ikjm} – компоненты тензоров, описывающих упругие свойства решетки. Нелинейности в этой системе связаны с функцией $\Phi(\phi)$ – периодическим потенциалом взаимодействия подрешеток, инвариантным при их взаимном смещении на один или несколько периодов решетки. Это результат внутренней трансляционной симметрии сложной решетки, отсутствующей у простой решетки. В случае учета лишь малого ангармонизма мы можем ограничиться простым приближением $\Phi(\phi) = a_{ij} \phi_i \phi_j - b_{ilkm} \phi_i \phi_l \phi_k \phi_m$. Заметим, что если Φ – квадратичная форма по ϕ_i , то данные уравнения являются континуальным аналогом известной модели Борна–Хуан Куня [2]. Коэффициенты c_{ikj} , $\bar{c}_{ikj}$, κ_{ikjm} и λ_{ikjm} обладают свойствами симметрии относительно перестановок индексов:

$$c_{kij} = -c_{ikj}, \quad \lambda_{ikjm} = \lambda_{kijm} = \lambda_{kimj} = \lambda_{ikmj}, \quad (2.3)$$

$$\bar{c}_{kij} = -\bar{c}_{ikj}, \quad \kappa_{ikjm} = \kappa_{kijm} = \kappa_{kimj} = \kappa_{ikmj}. \quad (2.4)$$

Мы рассматриваем для системы (2.1), (2.2) начально–краевую задачу в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ с условиями

$$U_i(x, 0) = U_i^0(x), \quad \phi_i(x, 0) = \phi_i^0(x), \quad (2.5)$$

$$U_i(x, t) = 0, \quad \phi_i(x, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.6)$$

Чтобы более наглядно показать структуру системы (2.1), (2.2) и найти ее связь с некоторыми классическими нелинейными уравнениями, рассмотрим следующее приближение. Предположим, что только одна компонента ϕ и одна компонента U отличны от нуля, $\bar{c} = 0$ и, кроме того, решение зависит только от одной координаты $x = x_1$ и времени t . Тогда уравнения (2.1), (2.2) принимают вид

$$\rho U_{tt} = c\phi_x + \lambda U_{xx}, \quad (2.7)$$

$$\mu\phi_{tt} = -\Phi'(\phi) - cU_x + \kappa\phi_{xx} \quad (2.8)$$

(здесь и в последующих формулах нижние индексы x, t означают соответствующие производные). При $c = 0$ система распадается на два независимых уравнения: уравнение для оптической моды ϕ становится нелинейным волновым уравнением, а динамика акустической моды U описывается линейным уравнением. Нетрудно также заметить, что система (2.7), (2.8) обладает законом сохранения

$$E = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} [\rho U_t^2 + \mu\phi_t^2 + \lambda U_x^2 + \kappa\phi_x^2] + cU_x\phi + \Phi(\phi) \right) d^3x. \quad (2.9)$$

Чтобы получить это равенство, достаточно умножить обе части уравнения (2.7) на U_t , обе части уравнения (2.8) – на ϕ_t и затем проинтегрировать по всей области Ω . После интегрирования по частям приходим к соотношению $E_t = 0$. Аналогичным способом можно получить интеграл энергии для системы (2.1), (2.2). При этом используются соотношения симметрии (2.3), (2.4). Имеем

$$\begin{aligned} E[U, \phi] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left[\rho \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 + \lambda_{ikjm} U_{k,j} U_{i,m} + \kappa_{ikjm} \phi_{k,j} \phi_{i,m} \right] + \right. \\ \left. + c_{ikj} U_{i,j} \phi_k + \frac{1}{2} \bar{c}_{ikj} \phi_i \phi_{k,j} + \Phi(\phi) \right) d^3x, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$. Существования одного интеграла движения недостаточно для описания поведения решений при $t \rightarrow \infty$. Однако после небольшой модификации уравнений (2.1), (2.2) это описание становится возможным, как мы показываем в следующем разделе.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО АТТРАКТОРА ДЛЯ ДИССИПАТИВНОЙ ВЕРСИИ СИСТЕМЫ

В физических системах всегда присутствует некоторая (пусть небольшая) диссипация. Чтобы ввести диссипативные слагаемые, мы добавим члены с первыми производными по времени. Система (2.1), (2.2) принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial U_i}{\partial t} = c_{ikj} \phi_{k,j} + \lambda_{ikjm} U_{k,jm}, \quad (3.1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} + \mu_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \phi_i} - c_{kij} U_{k,j} + \bar{c}_{kij} \phi_{k,j} + \kappa_{ikjm} \phi_{k,jm}. \quad (3.2)$$

Мы предполагаем, что $\mu, \mu_1, \rho, \rho_1 > 0$. Члены со второй производной по времени описывают инерционные силы, а члены с первой производной – это диссипативные вклады. Мы будем рассматривать два различных случая.

А. Потенциал нелинейных сил Φ – гладкая функция, равномерно ограниченная вместе со вторыми производными по ϕ .

В. Гладкий потенциал Φ допускает оценки

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right| \leq C_1 (1 + |\phi|^\gamma), \quad \gamma < 1, \quad (3.3)$$

$$\Phi(\phi) > -C_2 |\phi|^2 + C_3 |\phi|^4, \quad |\phi| \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

где $C_i > 0$.

Первое условие выполнено для системы (2.7), (2.8), например, в случае потенциала типа синус-Гордон $\Phi = b \cos \phi$, второе – для типичных нелинейностей Гинзбурга–Ландау. Относительно λ и κ предположим, что соответствующие квадратичные формы положительно определены в следующем смысле:

$$\lambda_{ikjm} r_{ik} r_{jm} \geq C_4 |r|^2, \quad \kappa_{ikjm} r_{ik} r_{jm} \geq C_4 |r|^2 \quad (3.5)$$

для любых матриц r , $|r|^2 = \sum_{ij} |r_{ij}|^2$.

Докажем простое вспомогательное утверждение. Введем стандартное пространство Соболева $H_0^1(\Omega)$, состоящее из квадратично интегрируемых на Ω функций, имеющих нулевые следы на границе $\partial\Omega$ и обобщенные производные, которые также квадратично интегрируемы. Пространство $H^1(\Omega)$ состоит из тех же самых функций, но без ограничений на след на границе.

ЛЕММА. В случае **В** функционал $E[U, \phi]$ априорно ограничен снизу на $H_0^1(\Omega)$:

$$E[U, \phi] \geq C (\|U\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{H^1(\Omega)}^2), \quad C > 0. \quad (3.6)$$

В случае **А** аналогичная оценка верна при достаточно малом $\bar{C} = \max(|c_{ikj}| + |\bar{c}_{ikj}|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай **А**. Заметим, что согласно (3.5)

$$\lambda_{ikjm} U_{k,j} U_{i,m} \geq C_5 \sum_i |\nabla U_i|^2, \quad C_5 > 0, \quad (3.7)$$

и аналогичное неравенство верно для ϕ_i . Следовательно, все члены в правой части (2.10) неотрицательны, кроме интеграла от Φ , который ограничен, и интегралов $J_1 = \int_{\Omega} c_{ikj} \times U_i \phi_{k,j} d^3 x$ и $J_2 = \int_{\Omega} \bar{c}_{ikj} \phi_i \phi_{k,j} d^3 x / 2$. Оценивая эти интегралы по неравенствам Коши–Шварца и Пуанкаре, имеем $|J_l| \leq \text{const } \bar{C} \int_{\Omega} (|\nabla U|^2 + |\nabla \phi|^2) d^3 x$. Мы видим, учитывая (2.7), что интегралы J_l при малых $\bar{C}$ мажорируются неотрицательными квадратичными членами в интеграле (2.10). Это доказывает утверждение в случае **А**.

Рассмотрим случай **В**. Интегрируя по частям, оценим J_1 таким образом:

$$J_1 > -C_6 \bar{C} \left(\epsilon \int_{\Omega} |\nabla U|^2 d^3 x + \epsilon^{-1} \int_{\Omega} |\phi|^2 d^3 x \right), \quad C_6 > 0. \quad (3.8)$$

Согласно (3.5) модуль слагаемого, пропорционального ϵ , может быть оценен следующим выражением: $C_7 \epsilon \lambda_{ikjm} \int_{\Omega} U_{k,j} U_{i,m} d^3 x$. Аналогично можно оценить J_2 суммой квадратичной формы $C_7 \epsilon \kappa_{ikjm} \int_{\Omega} \phi_{k,j} \phi_{i,m} d^3 x$ и интеграла от $|\nabla \phi|^2$.

Объединим интегралы J_l с интегралом от $\Phi(\phi)$ и квадратичными членами с $U_{k,i}$. Мы получаем выражение

$$K = \int_{\Omega} \left(c_{ikj} U_{i,j} \phi_k + \bar{c}_{ikj} \phi_i \phi_{k,j} + \Phi(\phi) + \frac{1}{2} \lambda_{ikjm} U_{k,j} U_{i,m} \right) d^3 x.$$

Для оценки K снизу используем теперь предположение (3.4), неравенство (3.8) и неравенство $\phi^4 - (\bar{C} + b\epsilon^{-1})\phi^2 \geq \beta$, где β – некоторая константа. Это дает $K \geq -C_8$, $C_8 > 0$. Остальные (не входящие в K) вклады в энергию (2.10) неотрицательны. Следовательно, полученные оценки доказывают ограниченность снизу E в случае **В**. Отметим, что в случае неограниченной области Ω наше утверждение неверно.

Выведем теперь основную априорную оценку. Умножая i -е уравнение (3.1) на $\partial U_i / \partial t$, i -е уравнение (3.2) – на $\partial \phi_i / \partial t$, суммируя по всем i и интегрируя по x , получаем энергетическую оценку, верную на траекториях системы (3.1), (3.2),

$$\frac{dE[U, \phi]}{dt} = -D[U_t, \phi_t] \leq 0, \quad (3.9)$$

где D – функционал диссипации, равный

$$D = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\rho_1 \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 + \mu_1 \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 \right) d^3 x. \quad (3.10)$$

Сформулируем основную теорему первой части работы. Напомним некоторые факты. Используя априорную оценку (3.10), нетрудно доказать существование решений при всех временах $t \in (0, \infty)$ [3]. Тем самым система уравнений (3.1), (3.2) определяет глобальный полупоток (полугруппу) S^t , $t > 0$, в $L_2(\Omega)$. Возможны различные определения аттрактора полупотока. Эти определения зависят от того, как мы определяем концепцию “притяжения”. Согласно обзору [10] пока не существует определения, которое было бы полностью удовлетворительно с точки зрения как физики, так и математики. Поэтому мы пользуемся наиболее общепринятым (в математической физике) определением: под глобальным аттрактором мы понимаем наименьшее замкнутое множество, инвариантное под действием полупотока и притягивающее при $t \rightarrow \infty$ любое множество, ограниченное в норме выбранного фазового пространства [3]–[7].

ТЕОРЕМА. *При принятых выше предположениях и при условиях леммы система уравнений (3.1), (3.2) обладает единственным решением из $H^1(\Omega)^3$ для всех $t > 0$. Кроме того, определенный системой (3.1), (3.2) полупоток обладает ком-*

пактным глобальным аттрактором $\mathcal{A}$. Этот аттрактор содержит множество $\mathcal{E}$ всех равновесных решений системы (3.1), (3.2), т.е. решений квазилинейной эллиптической системы

$$c_{ikj}\phi_{k,j} + \lambda_{ikjm}U_{k,jm} = 0, \quad (3.11)$$

$$-\frac{\partial\Phi(\phi)}{\partial\phi_i} - c_{kij}U_{k,j} + \bar{c}_{kij}\phi_{k,j} + \kappa_{ikjm}\phi_{k,jm} = 0. \quad (3.12)$$

Каждая траектория системы стремится при $t \rightarrow \infty$ к множеству $\mathcal{E}$.

Сделаем некоторые замечания. Нетрудно проверить, что условия (3.5) влекут, что главная часть L_0 линейного оператора $L(U, \phi)^{\text{tr}}$, определенного левой частью системы (3.11), (3.12), является сильно эллиптическим, самосопряженным и неотрицательно-определенным оператором. Кроме того, эта система является системой Эйлера для задачи поиска экстремума E , а функционал E ограничен снизу по лемме. Следовательно, по крайней мере одно решение системы (3.11), (3.12) всегда существует.

Доказательство теоремы аналогично стандартным рассуждениям для нелинейных гиперболических уравнений с диссипацией (см. [5]), и мы опускаем его. Отметим, что существенную роль в доказательстве играет априорная оценка убывания энергии (3.9) и априорная ограниченность энергии снизу.

В завершение этого раздела заметим, что по-видимому, при аналитическом потенциале Φ верно и более сильное утверждение. Именно, для аналитических систем такой структуры обычно удается доказать, что любое решение стремится не просто к множеству равновесных решений, как выше, а к некоторому равновесному решению. Первые результаты такого типа принадлежат Л. Саймону [11], см. также [12] и обзор [13].

4. РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМОДОВОЙ СИСТЕМЫ

В общем случае описать все равновесные решения не представляется возможным. Мы рассмотрим сначала равновесные решения для одномодовой системы (2.7), (2.8). Эти решения определяются из уравнений

$$c\phi_x + \lambda U_{xx} = 0, \quad -\Phi'(\phi) - cU_x + \kappa\phi_{xx} = 0. \quad (4.1)$$

Данную систему мы рассмотрим на интервале $(0, l)$ с нулевыми условиями Дирихле на концах интервала. Исключая U с помощью первого уравнения, получаем

$$\kappa\phi_{xx} = \Phi'(\phi) + A(\phi) - c^2\lambda^{-1}\phi, \quad \phi(0) = \phi(l) = 0, \quad (4.2)$$

где линейный оператор A — это усреднение: $A = c^2\lambda^{-1}l^{-1} \int_0^l \phi dx$. Ниже мы рассматриваем наиболее интересный и физически естественный случай $\Phi' = -a \sin \phi$, где $a > 0$. При $c = 0$ задача (4.2) хорошо исследована [4], [14]. Для каждого a она имеет конечное число равновесий $N(a)$, зависящее от a . Для малых a мы имеем только тривиальное равновесие $\phi = 0$. С ростом a возникают новые нетривиальные равновесные решения. Они бифуркируют из нулевого решения для некоторых $a = a_n$. Первое решение имеет вид арки и не имеет корней, второе имеет один корень, третье — два корня и т.д. При

$a \in (a_n, a_{n+1})$ мы имеем $2n+1$ решение: одно тривиальное и $2n$ нетривиальных $\pm\phi_k(x)$, $k = 0, \dots, n-1$, где каждое ϕ_k имеет ровно k нулей. Результат работы [14] утверждает, что все ненулевые равновесия гиперболичны, т.е. соответствующий линеаризованный оператор не имеет нулевого собственного значения. Бифуркационные значения a_n легко подсчитать: при $l = \pi$ они равны n^2 .

При помощи стандартной теории возмущений можно показать, что эти результаты о числе решений сохраняются при малых c (при достаточно большом c они явно неверны, поскольку энергия системы не ограничена снизу, что физически может быть интерпретировано как неустойчивость, возникающая при взаимодействии оптических и акустических мод). Бифуркационные значения $a_n(c)$ вычисляются для малых c . Без ограничения общности можно положить $l = \pi$, $\kappa = 1$. Тогда получаем

$$a_n(c) = n^2 + c^2 \lambda^{-1} \left(-1 + 2 \left(\frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \right)^2 \right).$$

Перейдем к анализу случая $x \in (-\infty, \infty)$ и рассмотрим вопрос о существовании бегущих решений типа ударных волн.

5. ДВИЖЕНИЕ КИНКОВ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Мы рассмотрим диссипативную версию системы (2.7), (2.8)

$$\rho U_{tt} + \rho_1 U_t = c\phi_x + \lambda U_{xx}, \quad (5.1)$$

$$\mu\phi_{tt} + \mu_1\phi_t = -\Phi'(\phi) - cU_x + \kappa\phi_{xx} \quad (5.2)$$

на всей оси, $x \in (-\infty, \infty)$. Под кинком мы понимаем решение типа ударной волны [8], имеющее два различных предела $\phi_{\pm}$ при $x \rightarrow \pm\infty$, к которым оно стремится с экспоненциальной скоростью. Многие нелинейные гиперболические и параболические уравнения обладают такими решениями [9]. При этом, когда диссипативные члены отсутствуют, имеется обычно целое семейство кинковых решений, зависящее от скорости. В присутствии диссипации для типичных бистабильных нелинейностей скорость кинка может принимать только некоторое дискретное множество значений.

Предположим, что уравнение (5.2) при $c = 0$ имеет бегущее решение такого типа, которое обозначим $\sigma(z)$, $z = x - Vt$, где V – скорость. При условии, что $c = \epsilon$ мало, построим асимптотические решения, описывающие возмущенные бегущие волны. Мы ищем его с помощью стандартной процедуры [8], [9]. Представим решение в виде асимптотических рядов

$$\phi = \sigma^0(z) + \epsilon^2 \sigma^1(z, \tau) + \dots, \quad z = x - Vt - q(\tau), \quad (5.3)$$

$$U = \epsilon(U^0(z) + \epsilon^2 U^1(z, t) + \dots), \quad \tau = \epsilon^2 t, \quad (5.4)$$

где главный член $\sigma^0 = \sigma$ является кинковым решением для (2.8) при $\epsilon = 0$, U^0 определяется из уравнения

$$(\rho V^2 - \lambda)U_{zz}^0 - V\rho_1 U_z^0 = \sigma_z^0. \quad (5.5)$$

Нетрудно показать, что это уравнение имеет ограниченное решение с производной, экспоненциально убывающей при $z \rightarrow \pm\infty$. Для этого положим $a = V\rho_1(\rho V^2 - \lambda)^{-1}$ и предположим (без потери общности), что $a > 0$. Тогда искомое решение задается формулой

$$U_z^0(z) = (\rho V^2 - \lambda)^{-1} e^{az} \int_{+\infty}^z e^{-as} \sigma(s) ds. \quad (5.6)$$

Для поправки σ^1 получаем линейное уравнение, имеющее ограниченное решение только при условии, что правая часть ортогональна в $L_2(\mathbb{R})$ к производной σ_z^0 . Это ведет к следующему результату:

$$\mu_1 \frac{dq}{d\tau} = -M^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} U_z^0 \sigma_z dz, \quad (5.7)$$

где $M = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z^2 dz$ – “масса” кинка.

6. СЛОЖНОЕ ПОВЕДЕНИЕ В ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМАХ

В этом разделе мы покажем, как в системах такого типа может возникать сложное поведение, и обнаружим их связь с моделями нейронных сетей. Для простоты мы рассматриваем здесь одномерный случай, двумерный может быть рассмотрен аналогично.

Мы рассмотрим диссипативную и модифицированную систему (2.7), (2.8)

$$\rho U_{tt} + \rho_1 U_t - \lambda U_{xx} = a(x)\phi, \quad (6.1)$$

$$\mu_1 \phi_t = -\Phi'(\phi) + \kappa \phi_{xx} + b_0(x)U + b_1(x) \quad (6.2)$$

на ограниченном интервале, $x \in (0, 1)$, и зададим нулевые условия Неймана для обеих функций U, ϕ в точках $x = 0, 1$. Мы добавили в правые части малые неоднородные возмущения $a(x)\phi$ и $b_i(x)U$, где $a, b_0, b_1 = O(\epsilon^r)$, $r > 1$, ϵ – малый параметр, и положили $\mu = 0, c = 0$. Далее мы будем предполагать, что

$$\rho = O(1), \quad \rho_1 = O(1), \quad \mu_1 = O(1), \quad \kappa = \epsilon^2. \quad (6.3)$$

Уравнения (6.1), (6.2) являются малым возмущением фундаментальной системы из работ [15]–[16], описывающей образование слоистых структур в различных физических системах. Последующий анализ во многом использует идеи из этих работ и работ [17], [18].

Предположим сначала, что $b_i = 0$. Тогда для бистабильных Φ хорошо известны равновесные решения уравнения (6.2), представляющие собой цепочки хорошо локализованных кинков с координатами $0 < q_1 < q_2 < \dots < q_N$, где $1 < N \ll \epsilon^{-1}$.

Наибольший физический интерес представляют два существенно различных случая: периодический потенциал $\Phi' = -\sin \phi$ и потенциал Гинзбурга–Ландау $\Phi' = \phi - \phi^3$.

В случае потенциала Гинзбурга–Ландау в окрестности каждого q_i решение $\phi(x, q, \epsilon)$ имеет вид $s_i \sigma(\epsilon^{-1}(x - q_i(t)))$, где σ ведет себя как функция гиперболического тангенса. Множитель s_i отмечает топологический заряд: $s = \pm 1$ ($s = 1$ соответствует кинку, $s = -1$ – антикинку). В этом случае знаки s_i в цепочке всегда чередуются.

В случае $\Phi = \cos \phi$ заряды могут быть произвольны (благодаря дополнительной внутренней симметрии относительно сдвига $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$), и решение в окрестности q_i имеет более общий вид $s_i \sigma(\epsilon^{-1}(x - q_i(t))) + m_i \pi$, где σ имеет ту же самую характерную кинкообразную форму, что и гиперболический тангенс. Здесь s_i произвольны, и это играет важную роль.

В случае малых ненулевых c, b координаты кинков зависят от времени и определяются уравнениями, аналогичными (5.7)

$$\mu_1 M \frac{dq_i}{dt} = -s_i \int_0^1 (b_0(x)U(x, t) + b_1(x))\sigma'(\epsilon^{-1}(x - q_i(t))) dx + g_i(q, \epsilon), \quad (6.4)$$

где $g_i(q, \epsilon)$ — малая поправка, содержащая, в частности, экспоненциально малые члены порядка $\exp(-c\epsilon^{-1})$, порожденные “прямым” взаимодействием кинков.

Поскольку $q_i(t)$ — медленные функции времени, при больших временах мы можем искать U как решение эллиптического уравнения, возникающего из (6.1), если положим производные по времени в этом уравнении равными нулю. Это дает

$$U(x, q) = \lambda^{-1} \int_0^1 G(x, x')a(x')\phi(x', q, \epsilon) dx'. \quad (6.5)$$

Заметим, что U — гладкая функция, ограниченная вместе с производной при $\epsilon \rightarrow 0$. Мы приходим к следующей системе уравнений для функций $q_i(t)$:

$$\begin{aligned} \mu_1 M \frac{dq_i}{dt} = & -s_i \int_0^1 \left(b_0(x)\lambda^{-1} \int_0^1 G(x, x')a(x')\phi(x', q, \epsilon) dx' + b_1(x) \right) \times \\ & \times \sigma'(\epsilon^{-1}(x - q_i(t))) dx. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Эта система описывает сложное нелокальное взаимодействие между кинками. Оно возникает за счет поля U , которое служит переносчиком взаимодействия, и зависит от возмущений $a(x), b_i(x)$. Меняя коэффициенты $a(x), b_i(x)$, мы получаем различные системы связанных осцилляторов для q_i .

Ввиду сложности правой части равенства (6.6) полезно ее упростить с помощью специального выбора a, b_i . К интересным результатам приводит следующий выбор. Мы полагаем, что $a(x)$ есть сумма точечных дефектов: $a = \sum_{k=1}^N a_k \delta(x - \bar{x}_k)$, и $b_1(x)$ выбираем так, чтобы соответствующий вклад в уравнение движения для координат кинков $q_i(t)$ имел вид $a_0 \epsilon^{-1}(q_i - \bar{x}_i) + \eta_i$, где η_i, a_0 — постоянные, зависящие от ϵ . Мы делаем замену $\tilde{q}_i = \epsilon^{-1}(x - q_i)$ и предполагаем, что в начальный момент $\tilde{q}_i = O(1)$ (т.е. i -й кинк находится вблизи i -го точечного дефекта). Тогда

$$U \approx \lambda^{-1} \sum_{k=1}^N G(x, \bar{x}_k) a_k s_k \sigma(\tilde{q}_k) + u(x, q, \epsilon), \quad (6.7)$$

где вклад u с экспоненциальной точностью может быть аппроксимирован функцией, не зависящей от координат q_i . Это ведет к системе (мы пренебрегаем малыми поправками и вводим медленное время τ)

$$\frac{d\tilde{q}_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma(\tilde{q}_j) - a_0 \tilde{q}_i + h_i(s). \quad (6.8)$$

Здесь матрица J_{ij} определена формулой

$$J_{ij} = G(\bar{x}_i, \bar{x}_j) s_j s_i a(\bar{x}_j) b_0(\bar{x}_i), \quad (6.9)$$

пороги h_i зависят от вектора топологических зарядов кинковой цепи, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$. Мы получили так называемую систему Хопфилда, которая является фундаментальной моделью теории аттракторных нейронных сетей [19]. Заметим, что синаптическая матрица J_{ij} определяет взаимодействие между “нейронами”.

Система (6.8) хорошо исследована. Для симметричных матриц J_{ij} любая траектория уравнений (6.8) приближается при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому равновесию. Число таких равновесий, вообще говоря, возрастает с ростом N . Это свойство может быть использовано для вычислений и создания на базе этой модели устройств ассоциативной памяти [19], [20]. Система способна запастись в своей “памяти” некоторые паттерны. С учетом шума число различных паттернов $\approx \alpha N$, где α – малый коэффициент порядка 0.1.

Для несимметричных матриц J система (6.8) генерирует в зависимости от выбора параметров N, J, h любое структурно-устойчивое поведение [18], включая хаотическое и периодическое. Хорошо известно, что хаотические структурно-устойчивые режимы возможны [7].

Отметим принципиальную разницу между потенциалом Гинзбурга–Ландау $\Phi = -\phi^2 + \phi^4$ и периодическим потенциалом $\Phi = \cos \phi$. В случае Гинзбурга–Ландау исходная система с N кинками способна породить максимум $O(N)$ различных равновесных структур. В периодическом случае мы, по крайней мере, в принципе, можем иметь экспоненциальное число различных равновесных паттернов. Это следует из того, что s_i могут выбираться произвольным образом.

За недостатком места мы не проводим строгого обоснования результатов этого раздела и ограничиваемся лишь замечанием, что методы решения этой задачи разработаны в последнее время [17], [18].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели нелинейное обобщение классической модели Борна–Хуан Куня, описывающей взаимодействие оптических и акустических мод в кристалле. При включении в модель даже малых диссипативных сил ее асимптотическое поведение при больших временах может быть описано. При увеличении взаимодействия между акустической и оптической модами при типичном периодическом потенциале возможна неустойчивость. Одномерный вариант модели может быть изучен достаточно полно (разделы 4, 5).

Возмущенные системы такого типа дают реализацию нейронного компьютера. Эта реализация параллельна, т.е. нелокальное результирующее взаимодействие между нейронами (кинками) создается локальным взаимодействием в исходной модели. Посредством локальных пространственных возмущений возможно контролировать синаптическую матрицу и другие параметры результирующей нейронной сети. В одномерной модели не удастся полностью контролировать матрицу J , но эта трудность может быть преодолена в двумерном случае с помощью подхода, описанного в работе [18].

Другим важным достоинством данной модели по сравнению с предыдущими моделями [18], [21] является принципиальная возможность возникновения экспоненциального ($\alpha N 2^N$) количества возможных структур. В самом деле, выбирая $\Phi = \cos \phi$, мы получаем возможность дополнительно контролировать вид структуры за счет выбора последовательности топологических зарядов кинковой цепи s_i .

Заметим, что эта реализация нейронного компьютера имеет и недостатки. Одна из трудностей – это наличие малого параметра ϵ , что приводит к медленному движению кинков, и следовательно, к медленным вычислениям. Для решения этой проблемы требуется дальнейшая модификация системы (6.1), (6.2), и мы рассмотрим эту задачу в последующих работах.

Другой подход к задаче обнаружения связи между системами в частных производных и нейронными сетями был предложен ранее в работе [20].

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 04-01-00052, а также комплексной программы 19 Президиума РАН, проект 1.4.

Список литературы

- [1] Э. Л. Аэро. Успехи механики. 2002. Т. 1. № 3. С. 131.
- [2] М. Борн, Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. М.: ИЛ, 1958.
- [3] О. А. Ладыженская. Успехи Мат. Наук. 1987. Т. 42. № 6. С. 25.
- [4] J. K. Hale. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. Providence: American Mathematical Society, 1988.
- [5] J. K. Hale, L. T. Magalhaes, W. M. Oliva. Dynamics in Infinite Dimensions. N. Y.: Springer, 2002.
- [6] A. B. Babin, M. I. Vishik. J. Math. Pures Appl. 1983. V. 62. P. 441; P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam. Integrable Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Differential Equations. New-York: Springer, 1989.
- [7] Ю. Ильяшенко, Вэйгу Ли. Нелокальные бифуркации. М.: МЦНМО ЧеРо, 1999.
- [8] В. П. Маслов, Г. А. Омелянов. Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. С. 63.
- [9] И. А. Молотков, С. А. Вакуленко. Нелинейные локализованные волны. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988.
- [10] В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников. Теория Бифуркаций. В сб.: Динамические системы 5. Итоги науки и техники. Совр. проблемы мат. Фундаментальные направления. Ред. В. И. Арнольд. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5.
- [11] L. Simon. Annals of Math. 1983. V. 118. P. 525.
- [12] M. Jendoubi. J. Diff. Equ. 1998. V. 144. P. 302.
- [13] P. Poláčik. Parabolic equations. Asymptotic behavior and dynamics on invariant manifolds. In: Handbook of Dynamical Systems. V. 2. Ed. B. Fiedler. Amsterdam: Elsevier, 2002. P. 835.
- [14] D. Henry. J. Diff. Equ. 1985. V. 59. P. 165.
- [15] T. Ohta, D. Jasnov. Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 5648.
- [16] D. M. Petrich, R. E. Goldstein. Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 1120.
- [17] S. A. Vakulenko. Annales de L'Institut H. Poincaré Physique Théorique. 1997. V. 66. P. 373.
- [18] S. A. Vakulenko. Adv. Diff. Equ. 2000. V. 5. P. 1739.
- [19] J. J. Hopfield. Proc. of Natl. Acad. USA. 1982. V. 79. P. 2554.
- [20] M. Mezard, G. Parisi, M. Virasoro. Spin Glass Theory and Beyond. Singapore: World Scientific, 1987.
- [21] R. Edwards. Mathematical methods in the Applied Sciences. 1996. V. 19. P. 651.

Поступила в редакцию 14.IX.2004г.