Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Пиментел, В. Я. Файнберг, Эквивалентность многоглюонных функций Грина в статистических квантовых теориях поля Даффина–Кеммера–Петью и Клейна–Гордона–Фока, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 3, 368–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1819>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 15:19:34

© 2005 г.

Б. М. Пиментел*, В. Я. Файнберг†

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МНОГОГЛЮОННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА В СТАТИСТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ ДАФФИНА–КЕММЕРА–ПЕТЬЮ И КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА

Доказана эквивалентность многоглюонных функций Грина в статистических квантовых теориях поля Даффина–Кеммера–Петью и Клейна–Гордона–Фока. При доказательстве используется формализм функционального интеграла для статистического производящего интеграла в квантовой теории поля при конечной температуре. В качестве иллюстрации в обеих теориях вычислены поляризационные операторы в однопетлевом приближении и продемонстрировано их совпадение.

Ключевые слова: статистическая квантовая теория поля, функции Грина глюона, интеграл по путям, перенормировка, эквивалентность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья является естественным обобщением статей [1]–[3], где была доказана эквивалентность многофотонных функций Грина в статистических квантово-полевых теориях Даффина–Кеммера–Петью (ДКП) и Клейна–Гордона–Фока (КГФ).

В разделе 2 дается общее доказательство эквивалентности методом функционального интеграла в статистической квантовой теории поля. С физической точки зрения этот результат понятен на качественном уровне: глюон не приобретает массу, а значит, и химический потенциал в среде с ненулевой температурой, т.е. сохраняет свою природу. В качестве иллюстрации в разделе 3 вычисляются поляризационные операторы в однопетлевом приближении в обеих теориях и доказывается, что эти операторы действительно совпадают. Раздел 4 содержит заключительные замечания.

2. СОВПАДЕНИЕ МНОГОГЛЮОННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ТЕОРИЯХ ДКП И КГФ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Чтобы построить производящий функционал $Z(J, \bar{J}, J_\mu)$ для функций Грина в ста-

*Instituto de Física, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brazil.
E-mail: pimentel@ift.unesp.br

†Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: fainberg@lpi.ru

тистической теории, нужно перейти в евклидово пространство и ограничить область интегрирования по x_4 : $0 \leq x_4 \leq \beta$, где $\beta = 1/T$, T – температура, а $J, \bar{J}, J_\mu$ – внешние токи. В дальнейшем для простоты мы ограничимся только *фундаментальным* представлением группы $SU(N)$ (см. [4], [5]).

В теории ДКП-взаимодействия заряженных частиц со спином ноль и массой m с глюонным полем A_μ^a производящий функционал имеет следующий вид (в α -калибровке):

$$Z(J^i, \bar{J}^j, J_\mu) = Z_0 \int_\beta DA_\mu^a D\psi^i D\bar{\psi}^j \exp \left\{ \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{c}^i (\partial_\mu D_\mu^{ij} c^j) + \bar{\psi}^i (i\beta_\mu D_\mu^{ij} - m\delta^{ij}) \psi^j + \bar{J}^i \psi^i + J^i \bar{\psi}^i + A_\mu^a J_\mu^a \right] d^4 x \right\}. \quad (1)$$

Здесь $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ – групповой индекс, $i, j = 1, 2, \dots, N$,

$$D_\mu^{ij} = \delta^{ij} \partial_\mu - ig(A_\mu^a t^a)^{ij}, \quad [t_a, t_b]_- = if_{abc} t_c, \quad (2)$$

где f_{abc} – структурные константы группы $SU(N)$.

В евклидовом пространстве мы выбираем β_μ -матрицы, как в статье [3] (уравнение (4)); $c^i, \bar{c}^j$ – поля-духи Фаддеева–Попова [6]. Что касается функционального интегрирования по полям в формуле (1), то, например,

$$\int_\beta DA_\mu^a = \int \prod_{0 \leq x_4 \leq \beta} \prod_{-\infty \leq x_i \leq +\infty} \prod_{a=1}^{N^2-1} \prod_\mu dA_\mu^a. \quad (3)$$

Для доказательства совпадения многоглюонных функций Грина проинтегрируем в уравнении (1) по ψ^i и $\bar{\psi}^j$. В результате получим

$$Z(J^i, \bar{J}^j, J_\mu) = Z_0 \int_\beta DA_\mu^a \exp \left\{ - \int_\beta d^4 x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{c}^i (\partial_\mu D_\mu^{ij} c^j) + J_\mu^a A_\mu^a + \text{Tr} \ln S^{ij}(x, x, A_\mu^a) \right] - \right. \\ \left. - \int_\beta d^4 x d^4 y \bar{J}^i(x) S^{ij}(x, y, A^a) J^j(y) \right\}, \quad (4)$$

где

$$S^{ij}(x, y, A) = (\beta_\mu D_\mu^{ij} - m\delta^{ij})^{-1} \delta(x - y) \quad (5)$$

является функцией Грина ДКП-частицы во внешнем поле Янга–Миллса A_μ^a . Член $\text{Tr} \ln S(x, x, A)$ дает все вакуумные диаграммы теории возмущений.

С другой стороны,

$$\exp \text{Tr} \ln S^{ij}(x, x, A^a) = \det S^{ij}(x, y, A^a) = \\ = \int_\beta D\psi^i D\bar{\psi}^j \exp \left\{ - \int_\beta d^4 x \bar{\psi}^i(x) (\beta_\mu D_\mu^{ij} + \delta^{ij} m) \psi^j(x) \right\}, \quad (6)$$

где $\psi^i(x)$ представляет собой столбец:

$$\psi^i(x) = \begin{pmatrix} \phi^i(x) \\ \partial_4 \phi^i(x) \\ \partial_1 \phi^i(x) \\ \partial_2 \phi^i(x) \\ \partial_3 \phi^i(x) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

и мы можем переписать уравнение (6) в компонентной форме:

$$\begin{aligned} \exp \text{Tr} \ln S^{ij}(x, x, A^a) &= \det S^{ij}(x, y, A^a) = \int_{\beta} \prod_{\mu=1}^4 D_{\mu} \phi^{*i} D_{\mu} \phi^j D \phi^{*i} D \phi^j \times \\ &\times \exp \left\{ - \int_{\beta} d^4 x \left[\phi^{*i} D_{\mu}^{ij} \phi_{\mu}^j + \phi_{\mu}^{*i} D_{\mu}^{ij} \phi^j + m(\phi^i \phi^{*i} + \phi_{\mu}^{*i} \phi_{\mu}^i) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрируя по ϕ_{μ}^{*i} и ϕ_{μ}^i , получаем

$$\begin{aligned} \det S^{ij}(x, y, A^a) &\equiv \det G^{ij}(x, y, A) = \exp \text{Tr} \ln G^{ii}(x, x, A) = \\ &= \int_{\beta} D \phi^i D \phi^{*j} \exp \left\{ + \frac{1}{m} \int_{\beta} d^4 x \phi^{*i} ((D_{\mu}^2)^{ij} - m^2 \delta^{ij}) \phi^j \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$G^{ij}(x, y, A^a) = (-(D_{\mu}^2)^{ij} + m^2 \delta^{ij}) \delta^4(x - y) \quad (10)$$

— функция Грина уравнения КГФ во внешнем поле $A_{\mu}^a(x)$.

Из формул (8)–(10) следует, что многоглюонные функции Грина в статистических теориях ДКП и КГФ совпадают. Это завершает доказательство эквивалентности многоглюонных функций Грина в статистических теориях ДКП и КГФ.

3. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для доказательства совпадения однопетлевых поляризационных операторов в ДКП и КГФ статистических теориях достаточно ограничиться рассмотрением одной петли, образованной скалярными массивными частицами, поскольку все другие однопетлевые диаграммы совпадают в этих теориях.

Однопетлевой поляризационный оператор в ДКП-теории имеет следующий вид

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{g^2}{(2\pi)^2 \beta} \text{Tr} \int d\mathbf{p} \beta_{\mu}(t^a)^{ij} S^{jk}(p+k) \beta_{\nu}(t^a)^{kl} S^{li}(p), \quad (11)$$

здесь

$$S^{jk}(p) = \delta^{jk} (i\hat{p} - m)^{-1}. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что

$$S^{jk} = \delta^{jk} (i\hat{p} - m)^{-1} = -\frac{\delta^{jk}}{m} \left(\frac{i\hat{p}(i\hat{p} + m)}{p^2 + m^2} + 1 \right), \quad (13)$$

$$\hat{p} = \beta_\mu p_\mu, \quad p^2 = p_4^2 + \mathbf{p}^2, \quad p_4 = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad -\infty < n < +\infty, \quad (i\hat{p} - m)^{ij} S^{jk}(\hat{p}) = \delta^{ik}. \quad (14)$$

Используя уравнения (11)–(14), получим поляризационный оператор в теории ДКП (в g^2 -приближении):

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{g^2}{(2\pi)^2 \beta} (t_a)^{ij} (t_a)^{ji} \sum_{p_4} \int d\mathbf{p} \left(\frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu}{(p^2 + m^2)((p+k)^2 + m^2)} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2 + m^2} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{(p+k)^2 + m^2} \right). \quad (15)$$

Поляризационный оператор в статистической теории КГФ в однопетлевом приближении равен следующему выражению¹⁾:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{g^2 (t_a)^{ij} (t_a)^{ji}}{(2\pi)^3 \beta} \sum_{p_4} \int d\mathbf{p} \left(\frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu}{(p^2 + m^2)((p+k)^2 + m^2)} - \frac{2\delta_{\mu\nu}}{p^2 + m^2} \right). \quad (16)$$

Слагаемое, пропорциональное $\delta_{\mu\nu}$ в (16), играет важную роль при доказательстве поперечности $\Pi_{\mu\nu}$ ($k_\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$). Этот член появляется за счет слагаемого, пропорционального $(A_\mu^a(x))^2$, в $(D_\mu^2)^{ij}$ в выражении (10).

Легко видеть, что после подстановки $(p+k) \rightarrow p$ в слагаемом $\delta_{\mu\nu}((p+k)^2 + m^2)^{-1}$ в (15) оно становится равным $\delta_{\mu\nu}(p^2 + m^2)^{-1}$, так что правые части в (15) и (16) совпадают и становятся формально калибровочно-инвариантными. Это совпадение поляризационных операторов (15) и (16) в однопетлевом приближении подтверждает общее доказательство эквивалентности в разделе 2.

В релятивистской квантовой теории поля тензор $\Pi_{\mu\nu}(k)$ имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu} = (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \Pi(k^2). \quad (17)$$

В квантовой статистике $\Pi_{\mu\nu}$ зависит от двух векторов: k_μ и u_μ ; последний является единичным вектором скорости среды. Таким образом, в общем случае (см. [7], с. 75)

$$\Pi_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) A_1 + \left(u_\mu u_\nu - \frac{k_\mu u_\nu (ku)}{k^2} - \frac{k_\nu u_\mu (ku)}{k^2} + \frac{k_\mu k_\nu (ku)^2}{k^2} \right) A_2 \equiv \Phi_{\mu\nu}^1 A_1 + \Phi_{\mu\nu}^2 A_2. \quad (18)$$

¹⁾Выражения (15) и (16) совпадают с формулами (14) и (10) в статье [3] с точностью до замены e^2 на $g^2(t_a)^{ij}(t_a)^{ji}$.

Вводя обозначения (в любом приближении)

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv \Pi_{\mu\mu} = 3A_1 + \lambda A_2, \\ a_2 &= u_\mu \Pi_{\mu\nu} u_\nu = \lambda(A_1 + \lambda A_2), \quad \lambda = 1 - \frac{(ku)^2}{k^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

имеем

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(a_1 - \frac{1}{\lambda} a_2 \right), \quad A_2 = \frac{1}{2\lambda} \left(-a_1 + \frac{3}{\lambda} a_2 \right). \quad (20)$$

Если система находится в покое²⁾, то

$$\lambda = 1 - \frac{k_4^2}{k^2} \quad (21)$$

и

$$a_2 = \left(1 - \frac{k_4^2}{k^2} \right) A_1 + \left(1 - \frac{k_4^2}{k^2} \right)^2 A_2. \quad (22)$$

Для дальнейших расчетов удобно представить a_1 и a_2 в виде

$$a_i = a_i^R + a_i^\beta, \quad i = 1, 2.$$

Здесь a_i^R — это те слагаемые, которые не зависят от β и должны быть перенормированы; a_i^β зависят от β и должны стремиться к нулю, когда $\beta \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_i^\beta = 0. \quad (23)$$

Теперь можно переписать уравнение (18) в следующем виде:

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Phi_{\mu\nu}^1 \left(a_1^R - \frac{1}{\lambda} a_2^R + a_1^\beta - \frac{1}{\lambda} a_2^\beta \right) + \frac{1}{2\lambda} \Phi_{\mu\nu}^2 \left(-a_1^R + \frac{3}{\lambda} a_2^R - a_1^\beta + \frac{3}{\lambda} a_2^\beta \right). \quad (24)$$

Слагаемое, пропорциональное $\Phi_{\mu\nu}^2$, должно исчезать в пределе $\beta \rightarrow \infty$. Соответственно в этом пределе мы получим тензор $\Pi_{\mu\nu}$ в евклидовой квантовой теории поля. a_1^R и a_2^R не зависят от β , откуда следует (после перенормировки), что

$$a_2^R = \frac{\lambda}{3} a_1^R. \quad (25)$$

Таким образом,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \Phi_{\mu\nu}^1 a_1^R, \quad \text{или} \quad \Pi_{\mu\mu} = a_1^R. \quad (26)$$

Вычислим a_1 и a_2 , пользуясь общей формулой для суммирования по p_4 (см. ниже формулу (30)), в правых частях (15) и (16). Опустим слагаемые, пропорциональные $\delta_{\mu\nu}$, в

²⁾ Можно показать, что представление (18), строго говоря, справедливо, только если система находится в покое: $\mathbf{u} = 0$, $u_4 = 1$ (см. [7], гл. 11, раздел 7).

правых частях (15) и (16), поскольку эти слагаемые исчезают после регуляризации и перенормировки; тогда

$$a_1 = -\frac{g^2(N^2 - 1)}{(2\pi)^3 2\beta} \sum_{p_4} \int d\mathbf{p} \frac{(2p + k)^2}{(p^2 + m^2)((p + k)^2 + m^2)}, \quad (27)$$

$$a_2 = -\frac{g^2(N^2 - 1)}{(2\pi)^3 2\beta} \sum_{p_4} \int d\mathbf{p} \frac{(2p + k)_4^2}{(p^2 + m^2)((p + k)^2 + m^2)}, \quad (28)$$

где принято во внимание, что (см. [5], уравнение (7.32))

$$(t^a)^{ij} (t^a)^{ji} = \frac{N^2 - 1}{2}. \quad (29)$$

Общая формула для суммирования по p_4 имеет вид (см. [7], с. 123, приложение 3 и [8], с. 299)

$$\frac{1}{\beta} \sum_n f\left(\frac{2\pi n}{\beta}, K\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega, K) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} d\omega \frac{f(\omega, K) + f(-\omega, K)}{e^{-i\beta\omega} - 1}. \quad (30)$$

Сравнивая уравнения (27), (28) настоящей работы с уравнениями (27), (28) в статистической квантовой электродинамике [3] и заменяя множитель e^2 на $g^2(N^2 - 1)/2$, мы получим соответствующие формулы в статистической квантовой глюодинамике.

Вместо уравнения (36) работы [3] получим

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Pi_{\mu\nu} = \left(-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \delta_{\mu\nu}\right) \left(\frac{g^2(N^2 - 1)}{96\pi^2}\right) k^4 \int_{4m^2}^{\infty} dz \frac{(1 - 4m^2/z^2)^{3/2}}{z^2(z^2 + k^2)}. \quad (31)$$

Это выражение для $\Pi_{\mu\nu}$ следует также из формулы (11) работы [9], где фотонная функция Грина была вычислена с использованием дисперсионного подхода.

Из уравнений (25) и (35) в [3] находим

$$a_2^R = \frac{\lambda}{3} a_1^R = \frac{g^2(N^2 - 1)k^2}{96\pi^2} (k^4 - k^2) \int_{4m^2}^{\infty} dz \frac{(1 - 4m^2/z^2)^{3/2}}{z^2(z^2 + k^2)}. \quad (32)$$

Окончательно для a_1^β и a_2^β ($\mu \neq 0$) получаем

$$a_1^\beta = \frac{g^2(N^2 - 1)}{32\pi^2} (4m^2 + k^2) \int_0^\infty \frac{p dp}{E|\mathbf{k}|} (e^{\beta(E-\mu)} - 1)^{-1} \times \\ \times \ln \frac{(k^2 + 2p|\mathbf{k}|)^2 + 4E^2 k_4^2}{(k^2 - 2p|\mathbf{k}|)^2 + 4E^2 k_4^2}, \quad (33)$$

$$a_2^\beta = \frac{g^2(N^2 - 1)}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{Ep|\mathbf{k}|} (e^{\beta(E-\mu)} - 1)^{-1} \left\{ (E^2 - k_4^2) \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{(k^2 + 2p|\mathbf{k}|)^2 + 4E^2 k_4^2}{(k^2 - 2p|\mathbf{k}|)^2 + 4E^2 k_4^2} + 2iEk_4 \ln \frac{(k^2 + 2iEk_4)^2 - 4p^2 \mathbf{k}^2}{(k^2 - 2iEk_4)^2 - 4p^2 \mathbf{k}^2} \right\}, \quad (34)$$

где $E = (p^2 + m^2)^{1/2}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы доказали эквивалентность многоглюонных функций Грина в статистических теориях поля ДКП и КГФ (раздел 2) и вычислили поляризационный оператор в однопетлевом приближении, чтобы проиллюстрировать эту эквивалентность (раздел 3).

Таким образом, в совокупности наших работ [1]–[3], [9] доказано, что обе теории КГФ и ДКП приводят к совпадающим результатам для *наблюдаемых* физических величин. Интересно в этой связи попытаться доказать эквивалентность результатов в этих теориях при описании ряда процессов с участием нестабильных частиц, в частности, применить ДКП-теорию к стандартной модели.

Благодарности. В. Я. Файнберг благодарит И. В. Тютина за полезные обсуждения, а также Российский фонд фундаментальных исследований (грант № 05-01-01049) и Фонд поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1578.2003.2).

Список литературы

- [1] Б. М. Пиментел, В. Я. Файнберг. ТМФ. 2000. Т. 124. № 3. С. 445.
- [2] R. Casana, V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, J. S. Valverde. Phys. Lett. A. 2003. V. 316. P. 33.
- [3] X. С. Вальверде, Б. М. Пиментел, В. Я. Файнберг. ТМФ. 2004. Т. 140. № 1. С. 44.
- [4] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. 2-е изд. М.: Наука, 1988.
- [5] М. Б. Волошин, К. А. Тер-Мартirosян. Теория калибровочного взаимодействия элементарных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1984.
- [6] В. Н. Попов, Л. Д. Фаддеев. УФН. 1973. Т. 111. С. 437.
- [7] Е. С. Фрадкин. Тр. ФИАН. 1965. Т. 29. С. 7.
- [8] H. G. Rothe. Lattice Gauge Theories: An Introduction. Singapore: World Scientific, 1996.
- [9] V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, J. S. Valverde. Dispersion Methods in DKP Theory. In: Proc. of the Int. Meeting “Quantization, Gauge Theories and Strings” dedicated to the memory of E. S. Fradkin (Moscow, June 5–10, 2000). V. II. Eds. A. Semikhatov, M. Vasiliev, V. Zaikin. Singapore: World Scientific, 2001. P. 79.

Поступила в редакцию 11.I.2005 г.