Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Караханян, О реализации универсального $sl_q(2)$ -симметричного R -оператора в пространстве функций для общих и исключительных значений параметра деформации, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 2, 196–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:27:28

© 2003 г.

Д. Р. Караханян*

О РЕАЛИЗАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНОГО
 $sl_q(2)$ -СИММЕТРИЧНОГО R -ОПЕРАТОРА
В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ
ДЛЯ ОБЩИХ И ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ
ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА ДЕФОРМАЦИИ

На основе реализации представлений алгебры $sl_q(2)$ в пространстве полиномов для общих значений q и на конечном наборе тета-функций, которые являются естественным обобщением полиномов, для циклических представлений, соответствующих $q^N = \pm 1$, построены собственные состояния и найдены соответствующие им собственные значения универсального R -оператора.

Ключевые слова: точно решаемые модели, универсальная R -матрица, циклические представления, корень N -й степени из единицы, собственные значения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Представление групп симметрий в пространстве функций может иметь большое значение в приложениях теории интегрируемых систем для построения универсальной [1] (сплетающей два произвольных представления) R -матрицы, поскольку оно дает единообразное описание представлений независимо от их размерности [2].

Представления q -деформированных (квантовых) групп [3], [4] для вещественных положительных значений параметра деформации q являются по существу теми же самыми, что и в недеформированном случае. Когда q принимает произвольные комплексные значения, q -деформированная универсальная обертывающая алгебра становится комплексной, с неунитарными представлениями, которые менее интересны с точки зрения физических приложений. Однако с точки зрения реализации в пространстве функций никаких принципиальных отличий от случая вещественных положительных значений q нет.

Исключение составляет случай комплексных корней из единицы, который рассматривался еще на ранней стадии развития теории квантовых групп [5]. В этом случае по-

*Ереванский физический институт, Ереван, Армения. E-mail: karakhan@lx2.yerphi.am

являются представления нового типа (циклические), не имеющие классического аналога. При этом унитарные представления существуют и, более того, они появляются в физических приложениях [6].

При помощи функциональных представлений были вычислены собственные значения универсальной R -матрицы для магнетика Гейзенберга, симметричного относительно групп $sl(2)$, $sl(2|1)$ и $sl_q(2)$, а также дана ее реализация в виде интегрального оператора, действующего в соответствующих функциональных пространствах [2].

2. СЛУЧАЙ ИЗОТРОПНОЙ (XX) МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Изложение предлагаемого метода построения универсальной R -матрицы целесообразно начать с рассмотрения более простого случая изотропной, т.е. обладающей $sl(2)$ -симметрией, цепочки Гейзенберга. Интегрируемость этой модели основана на фундаментальном соотношении Янга–Бакстера (ЯБ)

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u)R_{12}(u-v), \quad (1)$$

где операторы R_{ij} действуют на тензорном произведении $V_i \otimes V_j$ двух представлений алгебры $sl(2)$. В простейшем случае, когда все векторные пространства V_i соответствуют фундаментальному (двумерному) представлению, решение уравнения ЯБ дается R -матрицей минимальной размерности 4×4

$$R(u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где ненулевые матричные элементы $a = u + \eta$, $b = u$, $c = \eta$, u – спектральный параметр теории, а η – некоторый модельный параметр, который может быть положен равным единице. Следующим по сложности решением уравнения ЯБ является оператор Лакса, который соответствует случаю, когда два из векторных пространств, на которых определено соотношение (1), фундаментальны, а одно, скажем третье, произвольно:

$$R_{12}(u-v)L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u)R(u-v). \quad (3)$$

Название *оператор Лакса* (или L -оператор) закрепилось за этим объектом в связи с классической задачей о спектре уравнения Кортевега–де Фриза [7] и некоторыми другими классическими проблемами [8]. В данном контексте он имеет вид

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + \eta S & \eta S^- \\ \eta S^+ & u - \eta S \end{pmatrix} = u + \eta \sigma_a S^a, \quad (4)$$

где σ_a – матрицы Паули. Когда спины операторов S , входящих в определение L -оператора, равны $1/2$ (т.е. третье пространство тоже может быть выбрано двумерным), они

могут быть отождествлены с матрицами Паули, $S^a = \sigma^a/2$, и тогда это определение совпадает с (2). Соотношение (3) удовлетворяется в силу коммутационных соотношений алгебры $sl(2)$ для операторов S^a

$$[S, S^\pm] = \pm S^\pm, \quad [S^+, S^-] = 2S. \quad (5)$$

Произвольное представление этой алгебры может быть реализовано в пространстве полиномов одной вещественной (или комплексной) переменной x . Общее представление алгебры $sl(2)$ характеризуется одним параметром ℓ – спином представления. Генераторы алгебры (5) могут быть реализованы в виде дифференциальных операторов:

$$S^- = \partial, \quad S = x\partial - \ell, \quad S^+ = 2\ell x - x^2\partial. \quad (6)$$

В такой реализации всегда существует наименьший (младший) вектор представления, который аннигилируется понижающим генератором S^- и соответствует постоянной величине. Нетрудно видеть, что пространство представления тогда соответствует линейной оболочке, натянутой на мономах $\{x^n\}$, которые возникают при n -кратном действии повышающими генераторами S^+ на наименьший вектор представления. Это действие обрывается на N -м шагу, как это легко видеть из определения (6), если параметр ℓ , характеризующий представление, дается полуселым числом: $2\ell = N$. Тогда в представлении имеется также и наибольший (старший) вектор и оно конечномерно $((N+1)$ -мерно). В противном случае процесс порождения новых векторов не обрывается и для произвольных комплексных значений параметра представление V_ℓ бесконечномерно.

Тензорное произведение двух таких представлений может быть построено аналогичным образом в пространстве функций двух переменных. Генераторы алгебры $sl(2)$ тогда даются суммой соответствующих генераторов:

$$\begin{aligned} S^- &= \partial_1 + \partial_2, \quad S = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - \ell_1 - \ell_2, \\ S^+ &= 2\ell_1 x_1 + 2\ell_2 x_2 - x_1^2\partial_1 - x_2^2\partial_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Наименьший вектор $\varphi_0(x_1, x_2)$ опять определяется как решение уравнения

$$S^- \varphi_0(x_1, x_2) = 0 \quad (8)$$

и дается, как легко видеть, в виде мономов от трансляционно-инвариантной разности $(x_1 - x_2)^n$, а все пространство тензорного произведения $V_{\ell_1} \otimes V_{\ell_2}$ опять сводится к пространству полиномов степени не выше $2\ell_1$ по переменной x_1 и не выше $2\ell_2$ по переменной x_2 , если оба параметра $2\ell_i$ даются целыми положительными числами. В противном случае оно бесконечномерно. Пространство представления опять реализуется в виде линейной оболочки, натянутой на векторы

$$\varphi_n^m(x_1, x_2) = (S^+)^m \varphi_n(x_1, x_2), \quad \varphi_n(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^n. \quad (9)$$

Можно показать, что векторы (9) образуют базис в пространстве полиномов.

Следующим по сложности является случай, когда одно из векторных пространств в уравнении (3) соответствует фундаментальному представлению алгебры $sl(2)$, а два других – произвольным. Это уравнение ЯБ может быть использовано в качестве определяющего соотношения для универсального R -оператора, сплетающего два произвольных представления. Выберем для определенности фундаментальным третье пространство. Уравнение ЯБ (3) в этом случае следует понимать как матричное соотношение 2×2 , связывающее операторы Лакса, которые являются (2×2) -матрицами по отношению к третьему пространству и дифференциальными операторами по отношению к первому или второму с универсальным R -оператором. Этот последний оператор инертен по отношению к третьему пространству и является сложным псевдодифференциальным оператором по отношению к первым двум пространствам. В целом обе части соотношения ЯБ подразумеваются действующими на некоторую пробную функцию.

В случае, когда R -оператор дается конечномерной матрицей, такой подход использовался в работе [9] для нахождения рекуррентного соотношения для определения матричных элементов универсальной R -матрицы. Чтобы проделать подобную операцию в данном случае, мы используем явный вид L -операторов и разделим в них зависимость от спектрального параметра на $u + v$ и $u - v$. Тогда соотношения ЯБ примут вид

$$\begin{aligned} R_{12}(u)S^a &= S^a R_{12}(u), \\ R_{12}(u)K(u) &= \bar{K}(u)R_{12}(u), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} K(u) &= \begin{pmatrix} \frac{u}{2}(S_2 - S_1) + S_1 S_2 + S_1^- S_2^+ & \frac{u}{2}(S_2^- - S_1^-) + S_1 S_2^- - S_1^- S_2 \\ \frac{u}{2}(S_2^+ - S_1^+) - S_1 S_2^+ + S_1^+ S_2 & \frac{u}{2}(S_1 - S_2) + S_1 S_2 + S_1^+ S_2^- \end{pmatrix}, \\ \bar{K}(u) &= \begin{pmatrix} \frac{u}{2}(S_2 - S_1) + S_1 S_2 + S_1^+ S_2^- & \frac{u}{2}(S_2^- - S_1^-) + S_1^- S_2 - S_1 S_2^- \\ \frac{u}{2}(S_2^+ - S_1^+) + S_1 S_2^+ - S_1^+ S_2 & \frac{u}{2}(S_1 - S_2) + S_1 S_2 + S_1^- S_2^+ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Первое соотношение выражает $sl(2)$ -инвариантность R -оператора. Из этого свойства симметрии вытекает ряд важных следствий: действие R -оператора должно быть определено на всех векторах, или на базисе представления $(S^+)^m \varphi_n(x_1, x_2)$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Однако в силу коммутативности R -оператора с повышающим генератором S^+ можно ограничиться действием только на младшие векторы представления $\varphi_n(x_1, x_2)$, поскольку на векторах, полученных из них действием повышающего оператора, соотношения ЯБ будут удовлетворяться автоматически, в силу симметрии R -оператора. Далее, в силу соотношений симметрии для R -оператора можно вывести условие его коммутативности с оператором Казимира

$$C = (S_1^a + S_2^a)^2,$$

из которого следует, что они должны иметь общие собственные состояния, т.е. векторы младшего веса, а вместе с ними и все векторы, порожденные из них действием повышающего генератора $(S^+)^m \varphi_n(x_1, x_2)$, будут для R -оператора собственными, с собственным значением, не зависящим от m . Матрицы $K(u)$ и $\bar{K}(u)$ преобразуются ковариантно относительно алгебры $sl(2)$:

$$[\sigma^a - S^a, K(u)] = 0, \quad [\sigma^a + S^a, \bar{K}(u)] = 0,$$

что означает линейную зависимость соответствующих уравнений. Таким образом, для определения собственных значений R -оператора на младших векторах достаточно ограничиться простейшим из них, соответствующим матричному элементу, находящемуся в правом верхнем углу матрицы K ,

$$\begin{aligned} R(u)K^-(u)(x_1 - x_2)^N &= (\ell_1 + \ell_2 + 1 - N - u)R(u)(x_1 - x_2)^{N-1} = \\ &= \bar{K}^-(u)R(u)(x_1 - x_2)^N. \end{aligned}$$

Поскольку векторы $(x_1 - x_2)^N$ являются собственными состояниями R -оператора, из этого соотношения сразу следуют рекуррентные соотношения на соответствующие собственные значения:

$$\begin{aligned} R_N(u) &= -R_{N-1}(u) \frac{\ell_1 + \ell_2 + 1 - N - u}{\ell_1 + \ell_2 + 1 - N + u}, \\ R_N(u) &= (-1)^N R_0(u) \prod_{n=1}^N \frac{\ell_1 + \ell_2 + 1 - n - u}{\ell_1 + \ell_2 + 1 - n + u}. \end{aligned} \tag{10}$$

Пользуясь этими рекуррентными соотношениями можно восстановить явный вид универсальной R -матрицы для конкретных значений параметров ℓ_1 и ℓ_2 . Несколько простейших примеров приведено в приложении.

3. АЛГЕБРА $sl_q(2)$

Аргументы, представленные в предыдущем разделе, работают практически без изменений и в других, более сложных случаях: случай обычной, так называемой q -деформации, соответствующий XXZ -модели Гейзенберга, в которой трехмерная вращательная симметрия нарушена до цилиндрической, представлен ниже; случай супералгебры $sl(2|1)$ рассмотрен в работах [2]; рассмотрению случая деформации алгебры $sl(2)$ при помощи размерного параметра посвящена работа [10]. Упомянутое нарушение симметрии в XXZ -модели описывается введением в гамильтониан нового параметра $\Delta = \cos \lambda$. Эта новая модель может рассматриваться как деформация изотропной модели, и именно в этом контексте первоначально появилось понятие квантовой группы [11]. Однако есть и несколько отличная точка зрения, представленная в работах [12], согласно

которой общая интегрируемая двумерная квантовая теория поля на классическом уровне описывается уравнением ЯБ. Это уравнение ЯБ соответствует рациональной зависимости R -матрицы от спектрального параметра (аналог XX -цепочки). При квантовании указанной теории квантовые флуктуации, приводящие к появлению квантовых аномалий, вызывают нарушение, а точнее деформацию, некоторых классических симметрий исходной теории, что эквивалентно деформации структуры пространства представления – собственных значений и собственных векторов физических величин (наблюдаемых теории), примером которых являются аномальные размерности физических величин.

Таким образом, q -деформация (квантовая деформация) алгебры $sl(2)$ имеет два аспекта. Первый состоит в деформации самой алгебры, ее коммутационных соотношений:

$$[S, S^{\pm}] = \pm S^{\pm}, \quad [S^+, S^-] = \frac{q^{2S} - q^{-2S}}{q - q^{-1}}. \quad (11)$$

В пространстве полиномов генераторы $sl_q(2)$ -симметрии могут быть реализованы в виде дифференциальных операторов следующим образом:

$$S^- = \frac{1}{x} \frac{q^{x\partial} - q^{-x\partial}}{q - q^{-1}}, \quad S = x\partial - \ell, \quad S^+ = x \frac{q^{2\ell-x\partial} - q^{x\partial-2\ell}}{q - q^{-1}}. \quad (12)$$

Их правильнее было бы назвать конечно-разностными операторами, учитывая, что на пробную функцию $f(x)$ они действуют согласно формулам

$$\begin{aligned} q^a S f(x) &= q^{-a\ell} f(q^a x), \\ S^- f(x) &= \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{x(q - q^{-1})}, \\ S^+ f(x) &= x \frac{q^{2\ell} f(q^{-1}x) - q^{-2\ell} f(qx)}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Переходя от мультипликативного действия операторов к аддитивному при помощи замены переменных $x = q^t$, получим

$$\begin{aligned} q^S &= q^{-\ell} e^{\partial_t}, & q^S f(t) &\equiv q^{-\ell} f(t+1), \\ S^- &= q^{-t} \frac{e^{\partial_t} - e^{-\partial_t}}{q - q^{-1}}, & S^- f(t) &\equiv q^{-t} \frac{f(t+1) - f(t-1)}{q - q^{-1}}, \\ S^+ &= q^t \frac{q^{2\ell} e^{-\partial_t} - q^{-2\ell} e^{\partial_t}}{q - q^{-1}}, & S^+ f(t) &\equiv q^t \frac{q^{2\ell} f(t-1) - q^{-2\ell} f(t+1)}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (13)$$

В такой записи происхождение термина *разностный оператор* становится совершенно понятным.

Как и в случае недеформированной симметрии, представление алгебры реализуется в пространстве полиномов. Собственно этим соображением и был продиктован выбор

генераторов в виде (12): оператор разностной производной S^- уничтожает постоянную, которая и является младшим вектором, а затем повышающий генератор последовательным действием порождает целые положительные степени переменной x . Этот процесс прекращается только в случае, если 2ℓ дается целым положительным числом, тогда представление обладает также и старшим вектором $x^{2\ell}$ и, следовательно, $(2\ell+1)$ -мерно. Для всех прочих значений параметра ℓ представление бесконечномерно.

Алгебра (11) обладает центральным элементом, оператором Казимира (в этом разделе мы рассматриваем случай общих комплексных значений параметра деформации q , отличных от корней целой степени из единицы)

$$\mathbf{C} = S^+ S^- + [S]_q [S - 1]_q = S^- S^+ + [S]_q [S + 1]_q f(x), \quad (14)$$

где обозначение $[N]_q$ используется для записи q -деформированных чисел: $[N]_q = (q^N - q^{-N})/(q - q^{-1})$. Легко видеть, что в указанной функциональной реализации генераторов (12) оператор Казимира кратен единичному:

$$\mathbf{C}f(x) = [\ell]_q [\ell + 1]_q f(x).$$

Таким образом, для общих значений параметра q конечномерные представления даются теми же пространствами $\mathbb{C}^{2\ell+1}$, что и в недеформированном случае. Случай произвольных комплексных ℓ соответствует бесконечномерному пространству полиномов. Случай же $|q| = 1$ требует более тщательного анализа. В частности, при $q^N = \pm 1$ возникает новый тип конечномерных представлений – так называемые циклические представления, не имеющие классического (недеформированного) аналога (см. ниже). В этом разделе мы ограничимся рассмотрением значений $|q| \neq 0$. Такая деформация сводит комплексную плоскость к полосе. Это утверждение очевидно при записи операторов спина (13) с помощью переменной t .

Для построения представлений с наименьшим (наибольшим) весом необходимо решить уравнение

$$S^- \varphi_0 = 0 \quad (S^+ \varphi_0 = 0)$$

для младшего (старшего) веса представления. Имеем

$$S^- \varphi_0(t) = \frac{q^{-t}}{q - q^{-1}} [\varphi_0(t+1) - \varphi_0(t-1)] = 0, \quad \varphi_0(t+1) = \varphi_0(t-1),$$

т.е. младший вес представления дается функциями вида

$$\varphi_0(t) = \sum_k a_k e^{i\pi k t}$$

с произвольными комплексными коэффициентами a_k . Младший вес порождает все пространство представления:

$$\begin{aligned} \{\varphi_n(t)\} &= \{(S^+)^n \varphi_0(t)\}, \\ \varphi_n(t) &= (S^+)^n \varphi_0(t) = [2\ell]_q [2\ell - 1]_q \dots [2\ell - n + 1]_q \times \\ &\times \sum_k (-1)^{nk} a_k e^{(i\pi k + n \ln q)t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда видно, что младшие веса $\varphi_0^{(k)}(t) \equiv a_k e^{i\pi kt}$, являющиеся собственными векторами третьей компоненты проекции спина,

$$q^S \varphi_0^{(0)}(t) = (-1)^k q^{-\ell} \varphi_0^{(k)}(t),$$

порождают эквивалентные представления, $\{\varphi_0^{(k)}(t)\} = \{q^{nt} e^{i\pi kt}\}$. Однако, оставаясь в пределах полосы $\arg q \in [0, 2\pi]$, можно игнорировать эти различия и считать представление реализованным в пространстве полиномов переменной x .

Другой аспект перехода от $sl(2)$ к $sl_q(2)$ связан с деформацией тензорного произведения представлений: простой закон сложения спинов $S^a = S_1^a + S_2^a$ перестает работать, поскольку сумма генераторов уже не подчиняется алгебре (11). Из простых соображений размерности получаем следующую модификацию:

$$S = S_1 + S_2,$$

поскольку симметрия относительно вращений вокруг оси z сохраняется и

$$S^+ = q^{aS_1} S_2^+ + q^{bS_2} S_1^+, \quad S^- = q^{cS_1} S_2^- + q^{dS_2} S_1^-.$$

Составные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (11) при выборе $d = -a$, $c = -b$ и $a - b = \pm 2$. Таким образом, можно ввести два различных *копроизведения* (оставшийся параметр a может быть поглощен путем переопределения операторов):

$$\begin{aligned} S^+ &= S_1^+ q^{S_2} + q^{-S_1} S_2^+, \\ \Delta: \quad S &= S_1 + S_2, \\ S^- &= S_1^- q^{S_2} + q^{-S_1} S_2^- \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{S}^+ &= S_1^+ q^{-S_2} + q^{S_1} S_2^+, \\ \bar{\Delta}: \quad \bar{S} &= S_1 + S_2, \\ \bar{S}^- &= S_1^- q^{-S_2} + q^{S_1} S_2^-. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что введенные копроизведения не сохраняют симметрии $q \leftrightarrow q^{-1}$. Это означает, что при построении пространства представления с их помощью мы будем иметь дело

с двумя различными, хотя и эквивалентными реализациями этого пространства V и $\overline{V}$, соответствующими копроизведениям Δ и $\bar{\Delta}$, которые образованы линейными комбинациями векторов

$$\begin{aligned}(S^+)^m \varphi_N(x_1, x_2|q) &\equiv \varphi_N^m(x_1, x_2|q), \\ (\overline{S}^+)^m \bar{\varphi}_N(x_1, x_2|q) &\equiv \bar{\varphi}_N^m(x_1, x_2|q),\end{aligned}$$

– так называемым *квантовым дублем Дринфелда* [4]. Здесь мы ввели младшие векторы

$$\varphi_N(x_1, x_2|q) = \prod_{n=1}^N (q^{\ell_1+1-n} x_1 - x_2 q^{n-1-\ell_2}), \quad (18)$$

соответствующие решениям уравнения

$$S^- \varphi_N(x_1, x_2|q) = 0$$

(для величин с чертой выполняются аналогичные уравнения: $\bar{\varphi}_N(x_1, x_2|q) = \varphi_N(x_1, x_2|q^{-1})$). Векторы $\varphi_N^m(x_1, x_2|q)$ и $\bar{\varphi}_N^m(x_1, x_2|q)$, определяющие базис в пространствах V и $\overline{V}$, будут собственными состояниями операторов Казимира

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{(2)} &= q^{S_2-S_1+1} S_1^+ S_2^- + q^{S_2-S_1-1} S_1^- S_2^+ - \\ &- (q - q^{-1})^{-2} ((q + q^{-1})(1 + q^{2S_2-2S_1})) + \\ &+ q^{2S_2} [\ell_1]_q [\ell_1 + 1]_q + q^{-2S_1} [\ell_2]_q [\ell_2 + 1]_q\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{C}}^{(2)} &= (q^{S_1-S_2-1} S_1^+ S_2^- + q^{S_1-S_2+1} S_1^- S_2^+) - \\ &- (q - q^{-1})^{-2} ((q + q^{-1})(1 + q^{2S_1-2S_2})) + \\ &+ q^{-2S_2} [\ell_1]_q [\ell_1 + 1]_q + q^{2S_1} [\ell_2]_q [\ell_2 + 1]_q,\end{aligned}$$

соответственно:

$$\mathbf{C}(S^+)^m \varphi_N(x_1, x_2|q) = [N - \ell_1 - \ell_2]_q [N - \ell_1 - \ell_2 - 1]_q (S^+)^m \varphi_N(x_1, x_2|q)$$

(это же соотношение верно и для величин с чертой). Заметим, что, как и в недеформированном случае, собственные состояния вырождены по отношению к индексу m .

4. СООТНОШЕНИЯ ЯНГА–БАКСТЕРА

Решение соотношений ЯБ для XXZ -цепочки Гейзенберга спина $1/2$ имеет тот же самый вид (2), но с тригонометрической зависимостью матричных элементов от спектрального параметра u :

$$a = q^{u+1} - q^{-u-1}, \quad b = q^u - q^{-u}, \quad c = q - q^{-1},$$

в отличие от рациональной зависимости для XXX -цепочки. Параметр деформации $q = e^{i\lambda}$ входит сюда посредством параметра анизотропии XXZ -цепочки ($\cos \lambda = \Delta$). Мы будем придерживаться обозначений работы [13].

Фундаментальное представление опять дается матрицами Паули, так как для двумерных матриц соотношения (11) совпадают с недеформированными. L -оператор XXZ -модели дается выражением

$$L_{\ell,a}(u) = \begin{pmatrix} q^{u+S} - q^{-u-S} & (q - q^{-1})S^- \\ (q - q^{-1})S^+ & q^{u-S} - q^{-u+S} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

и соотношения ЯБ для двух фундаментальных и одного произвольного представления имеют место в силу коммутационных соотношений (11) для операторов спина. При $q \rightarrow 1$ эти соотношения переходят в недеформированные (5).

Чтобы определить универсальный R -оператор, рассмотрим вновь соотношения ЯБ для спинов ℓ_1, ℓ_2 и $1/2$:

$$\begin{aligned} R_{\ell_1, \ell_2}(u-v) & \begin{pmatrix} q^{u+S_1} - q^{-u-S_1} & (q - q^{-1})S_1^- \\ (q - q^{-1})S_1^+ & q^{u-S_1} - q^{-u+S_1} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} q^{v+S_2} - q^{-v-S_2} & (q - q^{-1})S_2^- \\ (q - q^{-1})S_2^+ & q^{v-S_2} - q^{-v+S_2} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} q^{v+S_2} - q^{-v-S_2} & (q - q^{-1})S_2^- \\ (q - q^{-1})S_2^+ & q^{v-S_2} - q^{-v+S_2} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} q^{u+S_1} - q^{-u-S_1} & (q - q^{-1})S_1^- \\ (q - q^{-1})S_1^+ & q^{u-S_1} - q^{-u+S_1} \end{pmatrix} R_{\ell_1, \ell_2}(u-v). \end{aligned} \quad (20)$$

Как уже упоминалось выше, основное сплетающее свойство R -оператора в случае деформированной алгебры состоит в том, что он сплетает две различные, соответствующие копроизведениям Δ и $\bar{\Delta}$, реализации тензорного произведения пространств представлений V и $\bar{V}$:

$$R(u)\Delta = \bar{\Delta}R(u). \quad (21)$$

Разделяя в уравнении ЯБ зависимости от $u-v$ и от $u+v$, получим, что оно эквивалентно следующим соотношениям:

$$[R_{\ell_1, \ell_2}(u), q^{S_1+S_2}] = 0, \quad (22)$$

$$R(u)(q^{\frac{u}{2}+S_1}S_2^- + q^{-\frac{u}{2}-S_2}S_1^-) = (q^{\frac{u}{2}-S_1}S_2^- + q^{-\frac{u}{2}+S_2}S_1^-)R(u), \quad (23)$$

$$R(u)(q^{\frac{u}{2}-S_1}S_2^+ + q^{-\frac{u}{2}+S_2}S_1^+) = (q^{\frac{u}{2}+S_1}S_2^+ + q^{-\frac{u}{2}-S_2}S_1^+)R(u), \quad (24)$$

$$R(u)(q^{\frac{u}{2}+S_2}S_1^- + q^{-\frac{u}{2}-S_1}S_2^-) = (q^{\frac{u}{2}-S_2}S_1^- + q^{-\frac{u}{2}+S_1}S_2^-)R(u), \quad (25)$$

$$R(u)(q^{\frac{u}{2}-S_2}S_1^+ + q^{-\frac{u}{2}+S_1}S_2^+) = (q^{\frac{u}{2}+S_2}S_1^+ + q^{-\frac{u}{2}-S_1}S_2^+)R(u) \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned} R(u)(q^{u+S_1-S_2} + q^{-u+S_2-S_1} - (q-q^{-1})^2 S_1^- S_2^+) = \\ = (q^{u+S_1-S_2} + q^{-u+S_2-S_1} - (q-q^{-1})^2 S_1^+ S_2^-) R(u), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} R(u)(q^{u+S_2-S_1} + q^{-u+S_1-S_2} - (q-q^{-1})^2 S_1^+ S_2^-) = \\ = (q^{u+S_2-S_1} + q^{-u+S_1-S_2} - (q-q^{-1})^2 S_1^- S_2^+) R(u). \end{aligned} \quad (28)$$

Видно, что эта система уравнений совместна с общим свойством *унитарности* R -оператора $R^{-1}(u) = R(-u)$. Действительно, умножая (25) на $R^{-1}(u)$ справа и слева, видим, что $R^{-1}(u)$ удовлетворяет соотношению (23) с заменой $u \leftrightarrow -u$, т.е. $R^{-1}(u)$ и $R(-u)$ удовлетворяют тем же уравнениям. То же верно и для уравнений (26) и (24), (27) и (28).

Кроме того, будучи физически наблюдаемой величиной, R -матрица должна быть однозначной функцией переменной q , т.е. периодической функцией $\ln q$, и не зависеть от выбора полосы $\arg q$ на комплексной плоскости.

Из соотношений ЯБ (22)–(28) следует также, что алгебра $sl_q(2)$ реализована операторами спина, которые дополнительно к определениям (16) и (17) сопряжены при помощи спектрального параметра:

$$\begin{aligned} S_u^- &= q^{\frac{u}{2}+S_2} S_1^- + q^{-\frac{u}{2}-S_1} S_2^-, \\ S_u^+ &= q^{-\frac{u}{2}+S_2} S_1^+ + q^{\frac{u}{2}-S_1} S_2^+, \\ S_u &= S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (29)$$

и

$$\begin{aligned} \overline{S}_u^- &= q^{-\frac{u}{2}-S_2} S_1^- + q^{\frac{u}{2}+S_1} S_2^-, \\ \overline{S}_u^+ &= q^{\frac{u}{2}-S_2} S_1^+ + q^{-\frac{u}{2}+S_1} S_2^+, \\ \overline{S}_u &= S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Условие инвариантности копроизведения относительно алгебры $sl_q(2)$ допускает такое обобщение, и на языке этих операторов соотношения ЯБ принимают более компактный вид:

$$\begin{aligned} [R(u), S] &= 0, \\ R(u) \overline{S}_u^- &= S_{-u}^- R(u), \\ R(u) \overline{S}_u^+ &= S_{-u}^+ R(u), \\ R(u) S_u^+ &= \overline{S}_{-u}^+ R(u), \\ R(u) S_u^- &= \overline{S}_{-u}^- R(u). \end{aligned}$$

Это позволяет записать сплетающее свойство R -оператора следующим образом:

$$R(u) \Delta_u = \bar{\Delta}_{-u} R(u), \quad (31)$$

что подразумевает условия

$$\mathbf{C}_{-u}R(u) = R(u)\overline{\mathbf{C}}_u, \quad \overline{\mathbf{C}}_{-u}R(u) = R(u)\mathbf{C}_u,$$

выражающие свойство $sl_q(2)$ -инвариантности R -оператора, задача на собственные значения для которого, следовательно, должна быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} R(u)\varphi_N^m(x_1, x_2|q, u) &= R_N\varphi_N^m(x_1, x_2|q, -u), \\ R(u)\varphi_N^m(x_1, x_2|q, u) &= \tilde{R}_N\varphi_N^m(x_1, x_2|q, -u), \end{aligned} \quad (32)$$

где векторы φ являются собственными функциями операторов Казимира, построенных с помощью операторов спина (29) и (30). Иначе говоря, оператор $R(u)$ на квантовом дубле Дринфельда $V \oplus \overline{V}$ действует кососимметричным образом:

$$R(u) \begin{pmatrix} \varphi_N^m \\ \bar{\varphi}_N^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{R}_N \\ R_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_N^m \\ \bar{\varphi}_N^m \end{pmatrix}.$$

Если условиться считать уравнения

$$Rq^{\pm(S_1+S_2)} = q^{\pm(S_1+S_2)}R, \quad (33)$$

$$S_{-u}^- R = R\overline{S}_u^-, \quad (34)$$

$$S_{-u}^+ R = R\overline{S}_u^+ \quad (35)$$

соотношениями, выражающими симметрию R -оператора, и переписать оставшиеся уравнения следующим образом:

$$RK^- = \overline{K}^- R, \quad (36)$$

$$RK^+ = \overline{K}^+ R, \quad (37)$$

$$RK^{+-} = \overline{K}^{+-} R, \quad (38)$$

$$RK^{-+} = \overline{K}^{-+} R, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} K^- &= S_u^-, \quad \overline{K}^- = \overline{S}_{-u}^-, \quad K^+ = S_u^+, \quad \overline{K}^+ = \overline{S}_{-u}^+, \\ K^{+-} &= q^{u+S_1-S_2} + q^{-u+S_2-S_1} - (q - q^{-1})^2 S_1^- S_2^+, \\ \overline{K}^{+-} &= q^{u+S_1-S_2} + q^{-u+S_2-S_1} - (q - q^{-1})^2 S_1^+ S_2^-, \\ K^{-+} &= q^{u+S_2-S_1} + q^{-u+S_1-S_2} - (q - q^{-1})^2 S_1^+ S_2^-, \\ \overline{K}^{-+} &= q^{u+S_2-S_1} + q^{-u+S_1-S_2} - (q - q^{-1})^2 S_1^- S_2^+, \end{aligned}$$

то можно получить соотношения

$$\begin{aligned} [\bar{S}_u^-, K^-] &= 0 = [S_{-u}^-, \bar{K}^-], & [\bar{S}_u^+, K^+] &= 0 = [S_{-u}^+, \bar{K}^+], \\ [\bar{S}_u^-, K^+] &= (q - q^{-1})^{-1} (q^{-S_1 - S_2} K^{+-} - q^{S_1 + S_2} K^{-+}), \\ [S_{-u}^-, \bar{K}^+] &= (q - q^{-1})^{-1} (-q^{-S_1 - S_2} \bar{K}^{+-} + q^{S_1 + S_2} \bar{K}^{-+}), \\ [\bar{S}_u^+, K^-] &= (q - q^{-1})^{-1} (-q^{-S_1 - S_2} K^{-+} + q^{S_1 + S_2} K^{+-}), \\ [S_{-u}^-, \bar{K}^+] &= (q - q^{-1})^{-1} (q^{-S_1 - S_2} \bar{K}^{-+} - q^{S_1 + S_2} \bar{K}^{+-}), \end{aligned}$$

т.е., как и в недеформированном случае, величины K ($\bar{K}$) зависимы и мы можем ограничиться рассмотрением симметричных соотношений (33)–(35) и простейшего из оставшихся (36).

Обратимся теперь к задаче отыскания “собственных” в смысле определения (32) векторов R -оператора, или, что то же самое, собственных векторов операторов Казимира $\mathbf{C}_u$ и $\bar{\mathbf{C}}_u$. Из соотношения (31) следует, что они имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_N^m(x_1, x_2|q, u) &= (S_u^+)^m \varphi_N(x_1, x_2|q, u), \\ \bar{\varphi}_N^m(x_1, x_2|q, u) &= \varphi_N^m(x_1, x_2|q^{-1}, u), \end{aligned} \quad (40)$$

где младшие векторы $\varphi_N(x_1, x_2|q, u)$ определяются как решения уравнения

$$S_u^- \varphi(x_1, x_2) = 0$$

в виде полиномов степени N по переменным x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_N(x_1, x_2|q, u) &= \prod_{n=1}^N (q^{\ell_1 + 1 - n - \frac{u}{2}} x_1 - q^{\frac{u}{2} + n - 1 - \ell_2}), \\ \bar{\varphi}_N(x_1, x_2|q, u) &= \varphi_N(x_1, x_2|q^{-1}, u) = \\ &= \prod_{n=1}^N (q^{-\ell_1 - 1 + n + \frac{u}{2}} x_1 - q^{-\frac{u}{2} - n + 1 + \ell_2}). \end{aligned} \quad (41)$$

Легко видеть, что функции $\bar{\varphi}(x_1, x_2|q, u)$ отличаются от $\varphi_N(x_1, x_2|q, u)$ формальной заменой $(x_1, \ell_1) \leftrightarrow (x_2, \ell_2)$. Можно показать, что

$$\begin{aligned} S_u^- \begin{pmatrix} \varphi_N(x_1, x_2|q, u) \\ \bar{\varphi}_N(x_1, x_2|q, u) \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -(q - q^{-1})[N]_q[\ell_1 + \ell_2 + 1 - N - u]_q \bar{\varphi}_{N-1}(x_1, x_2|q, -u) \end{pmatrix}, \\ S_u^- \begin{pmatrix} \varphi_N(x_1, x_2|q, -u) \\ \bar{\varphi}_N(x_1, x_2|q, -u) \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} (q - q^{-1})[u]_q[N]_q q^{\ell_1 - \ell_2} \varphi_{N-1}(q^{-1}x_1, qx_2|q, -u) \\ (q - q^{-1})[N]_q[N - 1 - \ell_1 - \ell_2]_q \bar{\varphi}_{N-1}(x_1, x_2|q, -u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Остальные соотношения, фигурирующие в задаче на собственные значения (32), получаются из первого соотношения заменами $q \leftrightarrow q^{-1}$ или $u \leftrightarrow -u$. На самом деле не было необходимости и во втором соотношении, но мы выписали его для полноты. Учитывая, что

$$R(u) \begin{pmatrix} \varphi_N(x_1, x_2|q, u) \\ \bar{\varphi}_N(x_1, x_2|q, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{R}_N \\ R_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_N(x_1, x_2|q, -u) \\ \bar{\varphi}_N(x_1, x_2|q, -u) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

и действуя соотношением (36) на $\varphi_N(x_1, x_2|q, u)$, получим нуль в обеих частях, тогда как при действии на $\bar{\varphi}_N(x_1, x_2|q, u)$ получаем искомое рекуррентное соотношение на собственные значения R_N

$$R_N = -R_{N-1} \frac{[\ell_1 + \ell_2 + 1 - N - u]_q}{[\ell_1 + \ell_2 + 1 - N + u]_q}, \quad (43)$$

умноженное на $\varphi_{N-1}(x_1, x_2|q, -u)$. При действии на $\bar{\varphi}_N(x_1, x_2|q, u)$ соотношением (34) получаем тождество $0 = 0$, действуя же им на $\varphi_N(x_1, x_2|q, u)$, получаем другое соотношение

$$\tilde{R}_N = -\tilde{R}_{N-1} \frac{[\ell_1 + \ell_2 + 1 - N - u]_q}{[\ell_1 + \ell_2 + 1 - N + u]_q},$$

умноженное на $\bar{\varphi}_{N-1}(x_1, x_2|q, -u)$. Заметим, что в силу равенств $\varphi_0(x_1, x_2|q, u) = \bar{\varphi}_0(x_1, x_2|q, u) = 1$ начальные условия обоих рекуррентных соотношений тоже совпадают, $R_0 = \tilde{R}_0$, поэтому они совпадают для всех значений n :

$$R_N = \tilde{R}_N = (-1)^N R_0 \prod_{n=1}^N \frac{[\ell_1 + \ell_2 + 1 - n - u]_q}{[\ell_1 + \ell_2 + 1 - n + u]_q},$$

т.е. собственные значения универсального R -оператора инвариантны по отношению к замене $q \rightarrow q^{-1}$, а все отличие соотношения (43) от недеформированного случая состоит в замене обычных чисел квантовыми.

5. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ R -ОПЕРАТОР ДЛЯ СЛУЧАЯ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ q

В этом разделе мы рассмотрим случай исключительных значений параметра деформации, соответствующих комплексным корням степени N из единицы, и положим для определенности $q = e^{2\pi i/N}$, где N — нечетное число. В этом случае центр алгебры $sl_q(2)$ расширяется и возникают три новых оператора Казимира: $q^N S$ и $(S^\pm)^N$. Действитель-

но, соотношения (11) в этом случае дают

$$\begin{aligned}
(q^S)^N S^\pm &= q^{\pm N} S^\pm q^{NS} = S^\pm (q^S)^N, \\
q^S (S^-)^N &= q^N (S^-)^N q^S = (S^-)^N q^S, \\
[S^+, (S^-)^N] &= \sum_{n=0}^{N-1} (S^-)^{N-n-1} [S^+, S^-] (S^-)^n = \\
&= \frac{1}{q - q^{-1}} \sum_{n=0}^{N-1} (S^-)^{N-n-1} (q^{-2n} (S^-)^n q^{2S} - q^{2n} (S^-)^n q^{-2S}) = \\
&= \frac{(S^-)^{N-1}}{q - q^{-1}} \left(q^{2S} \sum_{n=0}^{N-1} q^{-2n} - q^{-2S} \sum_{n=0}^{N-1} q^{2n} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что для упомянутых значений q обе суммы в круглых скобках обращаются в нуль по формуле суммирования геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^{2n} = \frac{q^{2N} - 1}{q^2 - 1} = 0.$$

Аналогично получим

$$[(S^+)^N, S^-] = 0, \quad (S^+)^N q^S = q^S (S^+)^N.$$

Это означает, что для указанных операторов соотношения

$$(S^\pm)^N = \alpha^\pm \mathbb{I}, \quad q^{NS} = q^{N\gamma} \mathbb{I}, \quad (44)$$

где $\mathbb{I}$ – единичная матрица, должны выполняться на *всех* векторах представления. Таким образом, все функции, реализующие представление, характеризуемое значениями параметров ℓ , γ и $\alpha^\pm$, определяются из решения системы уравнений

$$\begin{aligned}
(S^\pm)^N f(t) &= \alpha^\pm f(t), \\
q^{NS} f(t) &= q^{N\gamma} f(t).
\end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, в случае исключительных значений параметра деформации центр алгебры $sl_q(2)$ расширяется, т.е. представления характеризуются большим числом параметров, связанных с собственными значениями новых операторов Казимира, которые связаны между собой одним алгебраическим соотношением. В известных работах Арнаудона, Роше и Када, Де Кончини [14] было показано, что в общем случае представление алгебры $sl_q(2)$ с параметром деформации q , равным комплексному корню N -й степени

из единицы, определяется заданием трех параметров. Действительно, определение (12) не является наиболее общим, коммутационные соотношения (11) реализуют операторы

$$\begin{aligned} S^- &= q^{-\lambda/2} \frac{1}{x} \frac{q^{x\partial-\beta} - q^{\beta-x\partial}}{q - q^{-1}}, \\ q^S &= q^{-(\alpha+\beta)/2} q^{x\partial}, \\ S^+ &= xq^{\lambda/2} \frac{q^{\alpha-x\partial} - q^{x\partial-\alpha}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Однако в случае общих значений параметра деформации это не имеет смысла, поскольку в алгебре есть всего один свободный параметр $2\ell = \alpha + \beta$, связанный с единственным оператором Казимира.

Из выражений для операторов спина (46) следует, что оператор Казимира q^{NS} в функциональном пространстве действует тривиально:

$$q^{NS} f(x) = q^{-(\alpha+\beta)/2} f(q^N x) = q^{-(\alpha+\beta)/2} f(x),$$

и кратен единичному оператору, т.е. не дает ограничений на вид функций, реализующих представление.

Если $\alpha^+ = 0$ ($\alpha^- = 0$), это означает, что оператор S^+ (S^-) нильпотентен – существует вектор, который аннигилируется этим оператором, т.е. представление обладает старшим (младшим) весом. Обратно, если предположить, что старшего (младшего) веса не существует, то это будет противоречить нильпотентности оператора S^+ (S^-). Таким образом, представление, отвечающее случаю $\alpha^+ = 0$ ($\alpha^- = 0$), можно получить, полагая параметр q равным соответствующему корню из единицы, в уже рассмотренном случае представлений со старшим (младшим) весом для общих значений q . Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что оба собственных значения $\alpha^\pm$ отличны от нуля. Рассмотрим уравнение для оператора $(S^-)^N$ (уравнение для оператора $(S^+)^N$ рассматривается совершенно аналогично). Коммутируя множители $q^{-t} = x^{-1}$ налево, получим

$$(S^-)^N f(x) = q^{-Nt} \prod_{n=0}^{N-1} [x\partial + n]_q f(x) = \alpha^- f(x).$$

Для функции

$$\Phi_N(\alpha) \equiv \prod_{n=0}^{N-1} [\alpha + n]_q \quad (47)$$

при помощи очевидного тождества

$$[\alpha + kN]_q = [\alpha]_q, \quad k \in \mathbb{Z},$$

легко установить свойство периодичности

$$\Phi_N(\alpha + 1) = \Phi_N(\alpha),$$

из которого следует, что при разложении произведения (47) в сумму (при нечетных N) могут остаться лишь члены, кратные $q^{\pm N\alpha}$:

$$\Phi_N(\alpha) = (q - q^{-1})^{-N} (q^{\alpha N} - q^{-\alpha N}), \quad (48)$$

и уравнения $(S^\pm)^N f(t) = \alpha^\pm f(t)$ приобретают следующий простой вид:

$$\begin{aligned} (S^+)^N f(t) &= (q - q^{-1})^{-N} q^{Nt} (q^{\alpha N} f(t - N) - q^{-\alpha N} f(t + N)), \\ (S^-)^N f(t) &= (q - q^{-1})^{-N} q^{-Nt} (q^{-N\beta} f(t + N) - q^{N\beta} f(t - N)). \end{aligned}$$

Сдвиг $t \rightarrow t \pm N$ на языке переменной x означает умножение аргумента на $q^{\pm N} = 1$, т.е. тождественное преобразование. Таким образом, для функций, реализующих циклические представления $sl_q(2)$, мы приходим к ограничению в виде разностных уравнений:

$$x^{\pm N} f(x) = \text{const} \cdot f(x). \quad (49)$$

Таким свойством квазипериодичности обладают тета-функции [15], которые выполняют роль строительных блоков для функций на замкнутых римановых поверхностях, аналогичную роли мономов x^n в случае реализации функций на комплексной плоскости. Однако, если в теории римановых поверхностей зависимость тета-функций от второго аргумента τ имеет ключевое значение, то в данном контексте нас его наличие интересует лишь с точки зрения обеспечения сходимости соответствующих рядов. К реализации представления с их помощью удобно перейти, сделав небольшое отступление.

Алгебра $sl_q(2)$ тесно связана с алгеброй Вейля, имеющей два генератора X и Z ,

$$ZX = qXZ, \quad (50)$$

помимо которых алгебра Вейля содержит единицу и произвольные степени генераторов. В функциональном пространстве генераторы (50) могут быть реализованы множеством различных способов, однако здесь хотелось бы отметить два из них. В первом случае при помощи введенных выше разностных операторов соотношения Вейля (50) реализуются следующим образом:

$$X = x, \quad Z = q^{x\partial}. \quad (51)$$

Другая реализация связана с теорией тета-функций. Напомним [15], что тета-функцией называется аналитическая функция, определяемая своим рядом Фурье:

$$\theta(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n^2\tau + 2nt)}, \quad \text{Im } \tau > 0. \quad (52)$$

Тета-функции с характеристиками вводятся при помощи операторов квазитрансляций S_a и T_b ,

$$S_b f(t) = f(t + b), \quad T_a f(t) = e^{i\pi(a^2\tau + 2at)} f(t + a\tau), \quad (53)$$

которые образуют следующую алгебру:

$$S_a S_b = S_{a+b}, \quad T_a T_b = T_{a+b}, \quad S_b T_a = e^{2\pi i a b} T_a S_b.$$

Тета-функции с характеристиками a, b определяются как результат действия этих операторов на обычную тета-функцию:

$$\theta_{a,b}(t, \tau) \equiv S_b T_a \theta(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi[(n+a)^2 \tau + 2(n+a)(t+b)]}. \quad (54)$$

Легко видеть, что операторы квазитрансляций (53) реализуют коммутационные соотношения алгебры Вейля, если положить $q = e^{2\pi i a b}$. Соответственно тета-функции с характеристиками реализуют пространство представления алгебры Вейля. В случае, когда параметр q равен корню из единицы, генераторы алгебры Вейля становятся нильпотентными, а сама алгебра – циклической. В матричном виде образующие алгебры Вейля даются в этом случае квадратными матрицами: диагональной матрицей Z со степенями q^k , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, на диагонали и матрицей X с единицами над диагональю и в левом нижнем углу. Пространство представления реализуется конечным набором N тета-функций с характеристиками, соответствующими выбору $b = 0$ и $a_k = k/N$. Действительно, полагая

$$Z = S_{1/N}, \quad X = T_{1/N}, \quad (55)$$

нетрудно убедиться, что эти операторы подчиняются алгебре Вейля (50) со значением $q = e^{2\pi i/N}$ и действуют на упомянутом наборе тета-функций

$$\theta_k(t, \tau) \equiv (T_{1/N})^k \theta(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi[(n+k/N)^2 \tau + 2(n+k/N)t]} \quad (56)$$

следующим образом:

$$Z \theta_k(z, \tau) = e^{2\pi i/N} \theta_k(t, \tau) = q \theta_k(t, \tau), \quad X \theta_k(z, \tau) = \theta_{k+1}(t, \tau).$$

Выберем в качестве базиса представления функции

$$\theta_k(x|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi \tau n^2} x^{Nn+k}. \quad (57)$$

Легко установить свойства образующих базиса

$$\begin{aligned} \theta_k(q^{\pm 1} x|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi \tau n^2} x^{Nn+k} q^{\pm(Nn+k)} = q^{\pm k} \theta_k, \\ x^{\pm 1} \theta_k(x|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi \tau n^2} x^{Nn+k\pm 1} = \theta_{k\pm 1}(x|\tau), \end{aligned}$$

из которых следует, что операторы спина действуют на них следующим образом:

$$\begin{aligned} S^- \theta_k &= q^{-\lambda/2} [k - \beta]_q \theta_{k-1}, \\ q^S \theta_k &+ q^{k-(\alpha+\beta)/2} \theta_k, \\ S^+ \theta_k &= q^{\lambda/2} [\alpha - k]_q \theta_{k+1}. \end{aligned} \quad (58)$$

Из второго свойства базиса следует также, что его образующие остаются неизменными при умножении на $x^{\pm N}$, т.е. при умножении степенной функции на тета-функцию последняя выполняет по отношению к показателю степенной функции операцию деления по модулю N .

6. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Чтобы определить действие универсальной R -матрицы, необходимо реализовать тензорное произведение двух представлений, на котором операторы Казимира, соответствующие N -й степени операторов (29), (30), будут кратны единичному оператору. Определим элементы базиса в этом пространстве следующим образом:

$$\theta_{k_1, k_2} = \sum_{n_i = -\infty}^{\infty} e^{i\pi n_i \tau^{ij} n_j} x_1^{N n_1 + k_1} x_2^{N n_2 + k_2}, \quad (59)$$

симметричная матрица τ_{ij} определена так, что ее мнимая часть задает отрицательно-определенную квадратичную форму. Генераторы Z_i и X_i , как легко видеть, не выводят из этого набора функций:

$$Z_i \theta_{k_1, k_2} = q^{k_i} \theta_{k_1, k_2}, \quad X_1 \theta_{k_1, k_2} = \theta_{k_1+1, k_2}, \quad X_2 \theta_{k_1, k_2} = \theta_{k_1, k_2+1}.$$

Как показали Бажанов и Строганов [16], представление (19) для оператора Лакса не является наиболее общим для значений параметра деформации $q = e^{2\pi i n/N}$, где N — простое число. Однако это обобщение, содержащее шесть свободных параметров, главной целью которого было описание киральной модели Поттса в контексте подхода ЯБ, не приводит в данном случае к каким-либо существенным изменениям. Обобщение, предложенное Бажановым и Строгановым, по существу сводится к утверждению, что оператор Лакса (19), в котором разностные операторы подвергнуты преобразованию Боголюбова для положительно- и отрицательно-частотных операторов (сдвигающих аддитивную переменную t в положительном или отрицательном направлении) с произвольными коэффициентами, также удовлетворяет уравнению ЯБ для стандартной R -матрицы, определенной для значения параметра деформации, равного корню из единицы. Таким образом, использование этого, более громоздкого оператора Лакса приводит только к переопределению собственных значений операторов Казимира.

Легко видеть, что новые операторы Казимира также кратны единичному при действии на векторах базиса:

$$\begin{aligned} S_u^- \theta_{k_1, k_2} &= q^{k_2 + (u - \lambda_1 - \alpha_2 - \beta_2)/2} [k_1 - \beta_1]_q \theta_{k_1 - 1, k_2} + \\ &\quad + q^{-k_1 + (\alpha_1 + \beta_1 - u - \lambda_2)/2} [k_2 - \beta_2]_q \theta_{k_1, k_2 - 1}, \\ S_u^+ \theta_{k_1, k_2} &= q^{k_2 + (\lambda_1 - u - \alpha_2 - \beta_2)/2} [\alpha_1 - k_1]_q \theta_{k_1 + 1, k_2} + \\ &\quad + q^{-k_1 + (u + \alpha_1 + \beta_1 + \lambda_2)/2} \theta_{k_1, k_2 + 1}, \end{aligned}$$

а их N -е степени с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} (S_u^-)^N &= q^{N(\frac{u}{2} + S_2)} (S_1^-)^N + q^{-N(\frac{u}{2} + S_1)} (S_2^-)^N, \\ (S_u^+)^N &= q^{N(-\frac{u}{2} + S_2)} (S_1^+)^N + q^{N(\frac{u}{2} - S_1)} (S_2^+)^N, \end{aligned} \quad (60)$$

из которого с легкостью следует интересное нас утверждение:

$$\begin{aligned} (S_u^-)^N \theta_{k_1, k_2} &= (q^{N(u - \alpha_2 - \beta_2 - \lambda_1)/2} (q^{-N\beta_1} - q^{N\beta_1}) + \\ &\quad + q^{N(-u + \alpha_1 + \beta_1 - \lambda_2)/2} (q^{-N\beta_2} - q^{N\beta_2})) \theta_{k_1, k_2} \end{aligned}$$

и аналогично для операторов S_u^+ и $\bar{S}_u^\pm$.

Таким образом, набор из N^2 функций (59) реализует пространство тензорного произведения двух представлений. Теперь нас интересует построение собственных значений R -оператора. Опять, как и в случае общих значений q , ключевую роль играют соотношения ЯБ, выражающие его коммутативность с операторами (29) и (30). Будем искать собственные значения R -оператора в виде линейных комбинаций базисных элементов (59)

$$\varphi_m \equiv \sum_{k=0}^{N-1} a_k \theta_{m-k, k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

оператор S_u^- действует на вектор φ_m следующим образом:

$$\begin{aligned} S_u^- \varphi_m &= \sum_{k=0}^{m-1} a_k (q^{k + (u - \alpha_2 - \beta_2 - \lambda_1)/2} [m - k - \beta_1]_q \theta_{m-1-k, k} + \\ &\quad + q^{k - m + (\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_2 - u)/2} [k - \beta_2]_q \theta_{m-k, k-1}). \end{aligned}$$

Из этого соотношения видно, что при выборе

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k q^{u-2 + (\beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 + \lambda_2 - \lambda_1)/2}, \\ a_k &= a_0 q^{k[u-2 + (\beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 + \lambda_2 - \lambda_1)/2]} \end{aligned} \quad (61)$$

получим искомую комбинацию векторов базиса:

$$S_u^- \varphi_m(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i) = q^{-1+(u-\lambda_1+\beta_2-\alpha_2)/2} \times \\ \times [m+1-\beta_1-\beta_2]_q \varphi_{m-1}(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i). \quad (62)$$

Легко проверить, что оператор S_u^+ сдвигает ту же самую комбинацию на единицу вверх:

$$S_u^+ \varphi_m(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i) = q^{1-(u-\lambda_1+\beta_2-\alpha_2)/2} [\alpha_1 + \alpha_2 + 1 - m]_q \times \\ \times q^{-1+(u+\lambda_2+\beta_1-\alpha_1)/2} \varphi_{m+1}(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i). \quad (63)$$

Аналогичные формулы имеют место и для операторов $\bar{S}_u^\pm$:

$$\bar{S}_u^- \bar{\varphi}_m(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i, u) = q^{1-(u+\lambda_1+\beta_2-\alpha_2)/2} [m+1-\beta_1-\beta_2]_q \times \\ \times \bar{\varphi}_{m-1}(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i, u), \\ \bar{S}_u^+ \bar{\varphi}_m(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i, u) = q^{(u+\lambda_1+\beta_2-\alpha_2)/2-1} [\alpha_1 - \alpha_2 + 1 - m]_q \times \\ \times \bar{\varphi}_{m+1}(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i, u), \quad (64)$$

где

$$\bar{\varphi}_m(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i, u) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} q^{k[2-u+(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2+\lambda_2-\lambda_1)/2]} \theta_{m-k,k}. \quad (65)$$

Таким образом, эти соотношения не противоречат друг другу и соотношениям ЯБ, из которых следует

$$R_m(u) = q^{2-u+\alpha_2-\beta_2-\lambda_1} R_{m-1} = q^{m(2-u+\alpha_2-\beta_2-\lambda_1)} R_0(u), \quad (66)$$

если положить

$$R(u) \varphi_m(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i, u) = R_m(u) \bar{\varphi}_m(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i, -u), \\ R(u) \bar{\varphi}_m(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i, u) = R_m(u) \varphi_m(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i | x_i, -u).$$

На самом деле переопределением собственных значений φ_m (включением фазовых множителей в их определение) можно было добиться, чтобы собственные значения R -матрицы были равны единице.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при реализации генераторов алгебры $sl_q(2)$ с помощью дифференциальных, а точнее конечно-разностных, операторов (12) или (13) оказалось возможно построить функциональное представление (9), которое позволяет легко оперировать с представлениями любой размерности, а также построить прямое произведение таких представлений, определить на нем универсальный R -оператор и найти собственные векторы и собственные значения универсального R -оператора как для общих, так и для исключительных значений параметра деформации. Данный метод применим как для конечномерных представлений с наименьшим весом и циклических, так и для бесконечномерных представлений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, как можно использовать полученные формулы на практике при построении R -матрицы для конкретных представлений. В случае общих значений параметра деформации q конечномерные представления даются теми же самыми пространствами $\mathbb{C}^{2\ell+1}$, что и в недеформированном случае. Так для $\ell = 1/2$ имеем

$$S^+ = x \frac{q^{1-x\partial} - q^{x\partial-1}}{q - q^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^- = \frac{1}{x} \frac{q^{x\partial} - q^{-x\partial}}{q - q^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = x\partial - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad q^{aS} = \begin{pmatrix} q^{\frac{a}{2}} & 0 \\ 0 & q^{-\frac{a}{2}} \end{pmatrix}.$$

Нормированные векторы равны

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x.$$

Тензорное произведение таких представлений строится по формулам

$$1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

операторы спина равны

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad q^{aS} = \begin{pmatrix} q^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-a} \end{pmatrix},$$

$$S_u^+ = S_1^+ \otimes q^{-\frac{u}{2} + S_2} + q^{\frac{u}{2} - S_1} \otimes S_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & q^{\frac{u-1}{2}} & q^{\frac{1-u}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-\frac{u+1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & q^{\frac{u+1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_u^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^{-\frac{u+1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ q^{\frac{u+1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{\frac{u-1}{2}} & q^{\frac{1-u}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы Казимира определяются в виде

$$\mathbf{C}_u = \begin{pmatrix} q + q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & q^{-u} & 0 \\ 0 & q^u & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q + q^{-1} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{C}}_u = \begin{pmatrix} q + q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & q^u & 0 \\ 0 & q^{-u} & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q + q^{-1} \end{pmatrix},$$

а их собственные значения

$$\begin{aligned}\varphi_0 = \bar{\varphi}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \varphi_1(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ q^{\frac{1-u}{2}} \\ -q^{\frac{u-1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi_0^1(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ q^{-\frac{u+1}{2}} \\ q^{\frac{u+1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, & \varphi_0^2(u) &= (q + q^{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Величины с чертой получаются заменой $q \rightarrow q^{-1}$ и заменой знака аргумента у функции φ : $\varphi(u) \rightarrow \varphi(-u)$. По виду собственных векторов легко сообразить, что R -матрица имеет блочно-диагональный вид:

$$R(u) = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Рекуррентное соотношение дает

$$R_1 = R_0 \frac{[u-1]_q}{[u+1]_q},$$

тогда равенства $R(u)\bar{\varphi}_1(u) = R_1\varphi_1(-u)$ и $R(u)\varphi_1(u) = \tilde{R}_1\bar{\varphi}_1(-u)$ приводят к условиям

$$\begin{aligned}(q^{u-1} - q^{1-u})b &= (q - q^{-1})R_1 = (q^{u-1} - q^{1-u})c, \\ (q^{u-1} - q^{1-u})a &= (q^u - q^{-u})R_1 = (q^{u-1} - q^{1-u})d,\end{aligned}$$

тогда как $R(u)\varphi_0 = R_0\varphi_0$ дает $g = h = R_0$. Таким образом,

$$R(u) = \frac{R_1}{q^{u-1} - q^{1-u}} \begin{pmatrix} q^{u+1} - q^{-u-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^u - q^{-u} & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & q^u - q^{-u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{u+1} - q^{-u-1} \end{pmatrix}$$

в соответствии с исходным соотношением. Эта R -матрица могла быть получена и иначе:

$$\begin{aligned}R(u) &= [u+1]_q \left(\bar{\varphi}_0(-u) \times \varphi_0^T(u) + \frac{1}{q + q^{-1}} \bar{S}_{-u}^+ \bar{\varphi}_0(-u) \times \varphi_0^T(u) S_u^- + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(q + q^{-1})^2} (\bar{S}_{-u}^+)^2 \bar{\varphi}_0(-u) \times \varphi_0^T(u) (S_u^-)^2 \right) - \frac{[u-1]_q}{q + q^{-1}} \bar{\varphi}_1(-u) \times \varphi_1^T.\end{aligned}$$

Здесь мы опустили множитель $R_0/[u+1]_q$.

Рассмотрим теперь случай $\ell_1 = 1/2$, $\ell_2 = 1$. Операторы спина в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} S_2 &= x_2 \partial_2 - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad q^{aS} = \begin{pmatrix} q^a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-a} \end{pmatrix}, \\ S^+ &= x_2 \frac{q^{2-x_2 \partial_2} - q^{x_2 \partial_2 - 2}}{q - q^{-1}} = \sqrt{q + q^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S^- &= \frac{1}{x_2} \frac{q^{x_2 \partial_2} - q^{-x_2 \partial_2}}{q - q^{-1}} = \sqrt{q + q^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На тензорном произведении они действуют по формулам

$$\begin{aligned} S^+ &= q^{-\frac{u}{2} + S_2} S_1^+ + q^{\frac{u}{2} - S_1} S_2^+ = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & q^{\frac{u}{2}} \sqrt{1 + q^{-2}} & 0 & q^{1 - \frac{u}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{\frac{u}{2}} \sqrt{1 + q^{-2}} & 0 & q^{-\frac{u}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-1 - \frac{u}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^{\frac{u}{2}} \sqrt{1 + q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{\frac{u}{2}} \sqrt{1 + q^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S^- &= q^{\frac{u}{2} + S_2} S_1^- + q^{-\frac{u}{2} - S_1} S_2^- = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^{-\frac{u}{2}} \sqrt{1 + q^{-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-\frac{u}{2}} \sqrt{1 + q^{-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^{1 + \frac{u}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{\frac{u}{2}} & 0 & q^{-\frac{u}{2}} \sqrt{1 + q^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1 + \frac{u}{2}} & 0 & q^{-\frac{u}{2}} \sqrt{1 + q^2} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

младшие векторы определяются как

$$\varphi_0 = \bar{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{q^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{q + q^{-1}}} \\ 0 \\ -\frac{q^{\frac{u}{2}}}{\sqrt{q + q^{-1}}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая с недеформированным случаем, легко видеть, что матричная структура представления не меняется, все отличие состоит в замене обычных чисел q -числами:

$$R_{1/2,1}^q = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}.$$

Рекуррентное соотношение для данного случая имеет вид

$$R_1 = \frac{[u - 3/2]_q}{[u + 3/2]_q} R_0.$$

Учитывая, что φ_0 и φ_0^3 постоянные, т.е. не зависят от u и инвариантны по отношению к замене q на q^{-1} , немедленно получаем $g = R_0$. Действуя R -матрицей на младшие векторы, получаем уравнения

$$\begin{aligned} d - \frac{cq^{u-1}}{\sqrt{1+q^2}} &= q^{-1}R_1, & b - \frac{aq^{u-1}}{\sqrt{1+q^2}} &= -\frac{q^u R_1}{\sqrt{1+q^{-2}}}, \\ d - \frac{cq^{1-u}}{\sqrt{1+q^{-2}}} &= qR_1, & b - \frac{aq^{1-u}}{\sqrt{1+q^{-2}}} &= -\frac{q^{-u} R_1}{\sqrt{1+q^2}}, \end{aligned}$$

которые приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sqrt{q+q^{-1}}R_1}{[u-3/2]_q} = c', & d &= \sqrt{q+q^{-1}}R_1 \frac{[u-1/2]_q}{[u-3/2]_q}, \\ a &= \sqrt{q+q^{-1}}R_1 \frac{[u+1/2]_q}{[u-3/2]_q}. \end{aligned}$$

Оставшиеся соотношения дают

$$R_{1/2,1}^q(u) = \frac{R_1}{[u-3/2]_q} \times \begin{pmatrix} [u+\frac{3}{2}]_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [u+\frac{1}{2}]_q & 0 & \sqrt{q+q^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [u-\frac{1}{2}]_q & 0 & \sqrt{q+q^{-1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{q+q^{-1}} & 0 & [u-\frac{1}{2}]_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q+q^{-1}} & 0 & [u+\frac{1}{2}]_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [u+\frac{3}{2}]_q \end{pmatrix},$$

что также совпадает с недеформированным случаем при замене обычных чисел на q -деформированные.

Рассмотрим, наконец, более содержательный случай $\ell_1 = \ell_2 = 1$. Векторы $\varphi_N^m(u)$ даются следующими матричными выражениями:

$$\begin{aligned} \varphi_0(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \varphi_0^4(u) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \varphi_0^1(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q^{-\frac{u}{2}-1} \\ 0 \\ q^{\frac{u}{2}+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi_0^3(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ q^{-\frac{u}{2}-1} \\ 0 \\ q^{\frac{u}{2}+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \varphi_1(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q^{1-\frac{u}{2}} \\ 0 \\ -q^{\frac{u}{2}-1} \end{pmatrix}, & \varphi_1^2(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ q^{1-\frac{u}{2}} \\ 0 \\ -q^{\frac{u}{2}-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi_1^1(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q^{-u} \\ 0 \\ q - q^{-1} \\ 0 \\ -q^{-u} \\ 0 \end{pmatrix}, & \varphi_2(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q^{1-u} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ q^{u-1} \\ 0 \end{pmatrix}, & \varphi_2^2(u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q^{-2-u} \\ 0 \\ q + q^{-1} \\ 0 \\ q^{u+2} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Опять для R -матрицы можно использовать такой же блочный вид, как и в недеформированном случае, что следует из вида ее собственных векторов. Рекуррентное соотношение дает

$$R_1(u) = [u-2]_q [u+1]_q \frac{R_0(u)}{[u+1]_q [u+2]_q}, \quad R_2(u) = [u-2]_q [u-1]_q \frac{R_0(u)}{[u+1]_q [u+2]_q}.$$

Из условия $R(u)\varphi_0(u) = R_0(u)\bar{\varphi}_0(-u)$ получим $g = R_0(u)$, с тем же результатом для φ_0^4 . Следующее собственное значение $\varphi_1(u)$ приводит к системе уравнений

$$q^{1-\frac{u}{2}}e - q^{\frac{u}{2}-1}f = q^{-1-\frac{u}{2}}R_1(u), \quad q^{1-\frac{u}{2}}f - q^{\frac{u}{2}-1}e = -q^{1+\frac{u}{2}}R_1(u),$$

и аналогично для $\varphi_1^2(u)$. Имеем

$$e = [u]_q [u+1]_q \frac{R_0(u)}{[u+1]_q [u+2]_q}, \quad f = [2]_q [u+1]_q \frac{R_0(u)}{[u+1]_q [u+2]_q}.$$

Те же самые значения для e и f получаются из уравнений для $\varphi_0^1(u)$ и $\varphi_0^3(u)$, тогда как уравнения для $\varphi_2(u)$, $\varphi_1^1(u)$ и $\varphi_0^2(u)$ приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} bq^{1-u} - d + cq^{u-1} &= q^{-u-1} R_2(u), \\ dq^{1-u} - a + dq^{u-1} &= -R_2(u), \\ cq^{1-u} - d + bq^{u-1} &= q^{u+1} R_2(u); \\ bq^{-u} + d(q - q^{-1}) - cq^u &= q^{-u} R_1(u), \\ dq^{-u} + a(q - q^{-1}) - dq^u &= -(q - q^{-1}) R_1(u), \\ cq^{-u} + d(q - q^{-1}) - bq^u &= -q^u R_1(u); \\ bq^{-u-2} + d(q + q^{-1}) + cq^u &= q^{2-u} R_0(u), \\ dq^{-u-2} + a(q + q^{-1}) + dq^u &= (q + q^{-1}) R_0(u), \\ cq^{-u-2} + d(q + q^{-1}) + bq^u &= q^{u-2} R_0(u). \end{aligned}$$

Эта система совместна и имеет решение:

$$\begin{aligned} d &= [u]_q [2]_q \frac{R_0(u)}{[u+1]_q [u+2]_q}, & c &= [2]_q \frac{R_0(u)}{[u+1]_q [u+2]_q}, \\ b &= [u]_q [u-1]_q \frac{R_0(u)}{[u+1]_q [u+2]_q}, & a &= ([u]_q [u+1]_q + [2]_q) \frac{R_0(u)}{[u+1]_q [u+2]_q}. \end{aligned}$$

Окончательный результат имеет вид

$$R(u) = \begin{pmatrix} u_1 u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 u_1 & 0 & [2]_q u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 u_{-1} & 0 & [2]_q u_0 & 0 & [2]_q & 0 & 0 \\ 0 & [2]_q u_1 & 0 & u_0 u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [2]_q u_0 & 0 & u_0 u_1 + [2]_q & 0 & [2]_q u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_0 u_1 & 0 & [2]_q u_1 & 0 \\ 0 & 0 & [2]_q & 0 & [2]_q u_0 & 0 & u_0 u_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [2]_q u_1 & 0 & u_0 u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 u_2 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

где $u_{-1} = [u-1]_q$, $u_0 = [u]_q$, $u_1 = [u+1]_q$, $u_2 = [u+2]_q$.

Благодарности. Работа частично финансируется министерством BMBF правительства Германии, а также фондами Volkswagen Schiftung и SCOPE Swiss Foundation.

Список литературы

- [1] Л. Д. Фаддеев, Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 178–206; Препринт ЛОМИ № Е-14-87. Л.: ЛОМИ, 1987.
- [2] S. Derkachov, D. Karakhanian, R. Kirschner. Nucl. Phys. B. 2000. V. 583. P. 691–720; 2001. V. 618. P. 589–616; D. Karakhanian, R. Kirschner, M. Mirumyan. Nucl. Phys. B. 2002. V. 636. P. 529–548.
- [3] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. ТМФ. 1979. Т. 40. С. 194–220.
- [4] В. Г. Дринфельд. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 18–49.
- [5] Е. К. Склянин. Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. С. 34–48.
- [6] L. Alvarez-Gaume, C. Gomes, G. Sierra. Nucl. Phys. B. 1990. V. 330. P. 347–398.
- [7] D. J. Korteweg, G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. Phil. Mag. 1895. V. 39. № 5. P. 422–443.
- [8] P. D. Lax. Commun. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467–490; Periodic solutions of the KdV equations. In: Nonlinear Wave Motion. Proc. Summer Seminar (Potsdam, New York, 1972). Lect. Appl. Math. V. 15. Ed. A. C. Newell. Providence, RI: AMS, 1974. P. 85–96.
- [9] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin. Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 393–403.
- [10] D. Karakhanian, R. Kirschner. The universal R -operator with nonstandard deformation of conformal symmetry (in preparation).
- [11] Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [12] V. Bazhanov, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov. Commun. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 247–278; J. Stat. Phys. 2001. V. 102. P. 567–576.
- [13] L. D. Faddeev. How algebraic Bethe ansatz works for integrable model. In: Quantum Symmetries. Proc. of the Les Houches Summer School. Session LXIV (Les Houches, France, August 1–September 8, 1995). Amsterdam: North-Holland, 1998. P. 149; hep-th/9605187.
- [14] P. Roche, D. Arnaudon. Lett. Math. Phys. 1989. V. 17. P. 295–300; C. De Concini, V. G. Kac. Representations of quantum groups at roots of 1. In: Operator Algebras, Unitary Representations Enveloping Algebras, and Invariant Theory. Proc. Colloq. in Honour of J. Dixmier (Paris, France, 22–26 May, 1989). Progr. Math. V. 92. Eds. A. Connes, M. Duflo, A. Joseph, R. Rentschles. Boston: Birkhäuser, 1990. P. 471–506.
- [15] Д. Мамфорд. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
- [16] V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov. J. Stat. Phys. 1990. V. 59. P. 799–817.

Поступила в редакцию 13.V.2002 г.