Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. О. Казинский, А. А. Шарапов, Реакция излучения и перенормировка в классической теории поля с сингулярными источниками, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 3, 375–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:01:21

РЕАКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ И ПЕРЕНОРМИРОВКА В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Предложен общий ковариантный метод регуляризации реакции излучения в линейных и нелинейных моделях теории поля с сингулярными источниками. Типичными примерами последних являются токи, создаваемые протяженными релятивистскими объектами (бранами). В качестве иллюстрации рассмотрены модели минимального и неминимального взаимодействия бран с калибровочными полями n -форм, скалярным полем и эйнштейновской гравитацией. Установлена структура расходящихся и конечных вкладов в силу реакции излучения и получены соотношения для параметров теории, обеспечивающие взаимное сокращение расходимостей. Доказано утверждение о лагранжовости расходимостей в случае, когда метрика, индуцированная на поверхности браны, невырождена. Найдены специальные типы (неминимального) взаимодействия, приводящие к локальным и лагранжевым эффективным уравнениям движения браны. Показано, что требование классической перенормируемости накладывает сильные ограничения на вершины самодействия поля, аналогичные условиям квантовой перенормируемости. В частности, установлена неперенормируемость гравитационного самодействия браны коразмерности $k > 2$, в то время как при $k \leq 2$ теория оказывается не только перенормируемой, но и конечной.

Ключевые слова: реакция излучения, струны и браны в фоновых полях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание эффективной динамики излучающих систем с учетом радиационной отдачи является одной из традиционных задач классической теории поля. Помимо чисто теоретического значения, многие результаты, получаемые в этой области, находят приложения в физике ускорителей, теории дислокаций, астрофизике и космологии.

Для нерелятивистской заряженной частицы проблема реакции излучения впервые была исследована Лоренцем [1]. Релятивистское обобщение уравнения Лоренца было получено Дираком [2]. В настоящее время известны эффективные уравнения движения для точечного заряда на фоне искривленного пространства-времени [3], спиновой частицы [4], массивной частицы в высших измерениях [5], [6], безмассовой заряженной частицы в $d = 4$ [7], а также массивной частицы, взаимодействующей с фоном линеаризо-

*Томский государственный университет, Томск, Россия.
E-mail: kpo@phys.tsu.ru; sharapov@phys.tsu.ru

ванной гравитации [8]. Успехи теории струн стимулировали изучение вопроса о реакции излучения в моделях протяженных релятивистских объектов (бран) [9]–[12].

Несмотря на разнообразие моделей, все эти работы объединяет то, что рассматриваемые в них поля удовлетворяют *линейным* уравнениям движения с сингулярным источником (током) в правой части.

Настоящая работа преследует две цели: развитие общей процедуры регуляризации самодействия сингулярных токов и использование этой процедуры для исследования реакции излучения в ряде линейных, а также *нелинейных* моделей теории поля. В частности, будет дано определение классически перенормируемой теории и рассмотрены примеры перенормируемых и неперенормируемых моделей¹⁾. До сих пор, насколько нам известно, задача о реакции излучения с учетом самодействия полей в литературе не обсуждалась. Не был получен и полный набор соотношений для параметров взаимодействия бран, обеспечивающий взаимное сокращение расходимостей. Предыдущее рассмотрение [10], [13] ограничивалось анализом ведущих расходимостей, отвечающих за перенормировку параметра натяжения браны. Полное решение задачи о сокращении расходимостей будет дано в этой работе.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 обсуждается общая постановка задачи о реакции излучения в линейных моделях теории поля, а также структура запаздывающих функций Грина и сингулярных токов, ассоциированных с бранами. Здесь же устанавливается критерий лагранжеевности самодействия. В разделе 3 формулируется ковариантная процедура регуляризации самодействия. Основным результатом этого раздела является вывод асимптотического разложения для силы реакции излучения по параметру регуляризации. Подробности этих вычислений собраны в приложениях А и Б. Следующий раздел посвящен исследованию реакции излучения в ряде конкретных моделей взаимодействия бран с фоновыми полями. Так, в п. 4.1 рассматривается эффективная динамика $(n - 1)$ -браны, минимально связанной с калибровочным полем n -формы. В п. 4.2 изучаются специальные типы неминимального взаимодействия бран, приводящие к локальным и лагранжеевым эффективным уравнениям движения. В п. 4.3 выводятся условия сокращения расходимостей для браны, взаимодействующей с динамическим фоном n -форм, скалярным полем, а также полем линеаризованной гравитации. Наконец, раздел 5 посвящен анализу реакции излучения в нелинейных моделях теории поля. В качестве базового примера рассматривается модель скалярного поля с m -точечной вершиной самодействия. Устанавливается общая структура ряда теории возмущений по числу источников, а также условие классической перенормируемости теории. Эта же техника затем используется для анализа гравитационного самодействия бран.

2. САМОДЕЙСТВИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЯХ

В самом общем виде проблему учета самодействия сингулярных источников в классической теории поля можно сформулировать как задачу о самосогласованном решении уравнений движения для двух взаимодействующих полевых систем, определенных на

¹⁾Заметим, что на линейном уровне все локальные классические теории заведомо перенормируемы.

пространствах (многообразиях) различной размерности. В случае, когда одна из полевых систем является линейной, соответствующие ей уравнения движения могут быть явно решены методом функций Грина. Подстановка этого решения в остающиеся уравнения дает эффективные уравнения движения для второй подсистемы. Проблема, однако, состоит в том, что, поскольку все функции Грина в локальной теории поля имеют сингулярность в пределе совпадения аргументов, соответствующие эффективные уравнения движения оказываются плохо определенными (содержат бесконечности). Для “изгнания” этих бесконечностей и получения физически осмысленных результатов приходится прибегать к той или иной схеме регуляризации и перенормировки.

Введем два набора полей: $\phi = \{\phi^\alpha\}$ и $x = \{x^i\}$, принадлежащих линейным функциональным пространствам V и W , соответственно. Предположим, что на V задано симметричное невырожденное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда линейной теорией общего вида будем называть модель с действием

$$S[\phi, x] = \langle \phi, A\phi \rangle + \langle j(x), \phi \rangle + S_0[x]. \quad (1)$$

Здесь A – линейный дифференциальный оператор, действующий на пространстве V и являющийся симметричным относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $j(x)$ – некоторое (нелинейное) отображение из W в V , а $S_0[x]$ – функционал действия поля x .

Варируя действие (1), получаем следующие уравнения движения:

$$A\phi = -\frac{1}{2}j(x), \quad \frac{\delta S_0[x]}{\delta x^i} = -\left\langle \frac{\delta j(x)}{\delta x^i}, \phi \right\rangle. \quad (2)$$

Например, в электродинамике Максвелла поля ϕ^α суть электромагнитные потенциалы, а $j(x)$ – плотность тока, создаваемого заряженной частицей. Скалярное произведение задается обычной L^2 -нормой относительно стандартной меры интегрирования в $\mathbb{R}^{3,1}$.

Общее решение первого из уравнений (2) дается суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Выбирая в качестве последнего решение, построенное по запаздывающей функции Грина G оператора A , можем написать²⁾

$$\phi = -\frac{1}{2}Gj(x) + \phi_0, \quad (3)$$

где ϕ_0 – общее решение однородного уравнения. Физическая интерпретация такого разбиения состоит в том, что результирующее поле ϕ является суммой поля, создаваемого током $j(x)$, и свободного поля ϕ_0 . Подставляя выражение (3) во второе из уравнений (2), получим эффективные уравнения движения для x :

$$\frac{\delta S_0[x]}{\delta x^i} = -\left\langle \frac{\delta j(x)}{\delta x^i}, \phi_0 \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \frac{\delta j(x)}{\delta x^i}, Gj(x) \right\rangle. \quad (4)$$

Как видно, в правой части уравнения (4) помимо обычной силы появилось дополнительное слагаемое, квадратичное по току $j(x)$. В зависимости от интерпретации это слагаемое называют *силой самодействия*, *силой радиационного трения* или *реакцией излучения*.

²⁾Общее определение запаздывающей функции Грина и условия ее существования можно найти в монографии [14].

Следует заметить, что во многих интересных случаях выражение, определяющее эту дополнительную силу, является чисто формальным и в строгом математическом смысле не существует. Дело в том, что обычно источник $j(x)$ принимает значение не в V , а в дуальном пространстве обобщенных функций V^* , и выражение для силы самодействия оказывается плохо определенным. Общая процедура регуляризации эффективных уравнений движения (4) будет рассмотрена в следующем разделе, здесь же мы обсудим существование для этих уравнений функционала действия $S_{\text{eff}}[x]$.

Воспользовавшись известным критерием Гельмгольца (коммутативность вторых вариационных производных), приходим к следующему условию существования $S_{\text{eff}}[x]$:

$$\left\langle \frac{\delta j(x)}{\delta x^i}, \tilde{G} \frac{\delta j(x)}{\delta x^j} \right\rangle = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{G} = (G - G^*)/2$ – антисимметричная часть оператора G и звездочка означает сопряжение оператора относительно введенного скалярного произведения³⁾. При выполнении последнего условия для силы реакции излучения имеем представление

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta j(x)}{\delta x^i}, G j(x) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta x^i} \left[\int_0^1 x^j \left\langle \frac{\delta j(tx)}{\delta x^j}, \tilde{G} j(tx) \right\rangle dt + \frac{1}{2} \langle j(x), \overline{G} j(x) \rangle \right], \quad (6)$$

где $\overline{G} = (G + G^*)/2$ – симметричная часть оператора G . В частности, если вклад от $\tilde{G}$ равен нулю, то эффективные уравнения движения для поля x получаются варьированием

$$S_{\text{eff}}[x] = S_0[x] + \langle j(x), \phi_0 \rangle - \frac{1}{4} \langle j(x), \overline{G} j(x) \rangle. \quad (7)$$

Дальнейшее рассмотрение задачи о реакции излучения в линейных теориях требует задания явного выражения для тока $j(x)$. Для упрощения выкладок ограничимся здесь случаем плоского пространства-времени, хотя многие результаты без труда обобщаются на произвольный метрический фон.

Пусть V есть линейное пространство тензорных полей на пространстве Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$ с координатами $\{x^\mu\}$ и метрикой $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Таким образом, $\phi(x) = \{\phi^\alpha(x)\}$ и $j = \{j^\alpha(x)\}$, где α отвечает лоренцевым индексам. Далее начальные буквы греческого алфавита $\alpha, \beta, \dots$ будут нумеровать компоненты полей, а буквы из середины алфавита $\mu, \nu, \dots$ – координаты пространства Минковского.

Если n -мерная брана N вложена в пространство Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$ при помощи отображения $x(\tau)$, где $\{\tau^i, i = 0, \dots, n-1\}$ – координаты на бране, то сингулярный ток запишется как

$$j^\alpha(x) = B_\beta^\alpha \int_N \delta^d(x - x(\tau)) J^\beta(\tau). \quad (8)$$

Здесь B_β^α – линейный дифференциальный оператор, действующий на переменную x , а $J^\alpha(\tau)$ – некоторая n -форма на многообразии N .

³⁾Как известно [14], [15], G^* соответствует опережающей функции Грина симметричного оператора A .

Условие релятивистской инвариантности функционала (1) предполагает, что операторы A и B являются линейными дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами. Тогда запаздывающую функцию Грина G для оператора A можно представить в виде

$$G_{\beta}^{\alpha}(x) = P_{\beta}^{\alpha} \theta(x^0) g(\xi), \quad \xi = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}, \quad (9)$$

где P_{β}^{α} – некоторый симметричный матричнозначный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $g(\xi)$ – обобщенная функция своего аргумента. Из общей формулы (4) для эффективных уравнений движения поля x несложно видеть, что рассмотрение задачи о самодействии в линейной модели с сингулярным источником (8) сводится к аналогичной задаче для тока

$$j_0^{\alpha} = \int_N \delta^d(x - x(\tau)) J^{\alpha}(\tau) \quad (10)$$

и эффективной запаздывающей функции Грина

$$G' = B^* G B. \quad (11)$$

Интегральное ядро оператора G' дается выражением

$$G'_{\beta}{}^{\alpha}(x) = (B^*)_{\gamma}^{\alpha} P_{\delta}^{\gamma} B_{\beta}^{\delta} \theta(x^0) g(\xi) \quad (12)$$

и имеет ту же структуру, что и $G(x)$.

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

В этом разделе формулируется общая процедура регуляризации самодействия для произвольной локальной линейной теории (1) с сингулярным током (8). Будут получены явные выражения для расходимостей силы самодействия и доказана их лагранжевость в случае, когда метрика, индуцированная на поверхности браны, невырождена. При этом регуляризации будет подвергаться не сам ток, а запаздывающая функция Грина теории. Такой подход эквивалентен регуляризации тока, поскольку если G_{ε} – регуляризованная функция Грина оператора A , то, положив $j_{\varepsilon}(x) = A G_{\varepsilon} j(x)$, мы получим некоторую регуляризацию тока $j(x)$.

Рассмотрим модельную функцию Грина

$$G_{\text{mod}}(x) = \theta(x^0) g(\xi) \quad (13)$$

и отвечающее ей поле

$$\phi_{\text{mod}}^{\alpha}(x) = \int \theta(x^0 - y^0) g((x - y)^2) j^{\alpha}(y) d^d y. \quad (14)$$

Сила радиационного трения представляет собой взятое на поверхности браны действие некоторого локального оператора $D[x(\tau)]$ на поле $\phi_{\text{mod}}(x)$ ⁴⁾, т.е.

$$F^{\text{rr}}(\tau) = D[x(\tau)] \phi_{\text{mod}}(x) \big|_{x=x(\tau)}. \quad (15)$$

⁴⁾ Для упрощения обозначений мы не выписываем индексы, нумерующие компоненты поля.

Последняя формула отражает два очевидных факта: во-первых, поле любой линейной модели получается из поля $\phi_{\text{mod}}(x)$ действием дифференциального оператора, как можно видеть из выражения для функции Грина (9), а во-вторых, обобщенная сила Лоренца, входящая в правую часть второго из уравнений (2), линейна по полю $\phi(x)$ и локальна, если плотность $J^\alpha(\tau)$ является функцией поля $x(\tau)$ и его производных конечного порядка.

Совершив замену⁵⁾ $y^0 = x^0 - \sqrt{\xi + (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}$, сведем задачу к регуляризации однократного интеграла по новой переменной ξ . Имеем

$$\phi_{\text{mod}}(x) = \int d\xi g(\xi) I_{\text{mod}}(x, \xi), \quad (16)$$

где

$$I_{\text{mod}}(x, \xi) = \int_N \theta(x^0 - x^0(\tau)) \delta((x - x(\tau))^2 - \xi) J(\tau). \quad (17)$$

Основная идея нашего метода регуляризации состоит в обрезании расходящегося интеграла (16) в окрестности особой точки обобщенной функции $g(\xi)$. Имеется одна такая особая точка $\xi = 0$, отвечающая пределу совпадения аргументов функции Грина $G_{\text{mod}}(x - y)$. Возникающий после обрезания сходящийся интеграл назовем регуляризованным значением интеграла (16).

Разлагая выражение (17) в асимптотический ряд по ξ в окрестности $\xi = 0$, получим все возможные структуры, которые могут появиться в качестве расходимостей поля ϕ_{mod} . Иначе говоря, функция (17) играет роль *производящей функции расходимостей*. Подчеркнем, что сама структура расходимостей определяется только мерой интегрирования $J(\tau)$ в выражении (8) и не зависит от вида функции Грина (13). Последняя определяет лишь, какие из потенциальных расходимостей действительно появляются в данной модели. Так, например, в случае браны, взаимодействующей со скалярным полем, в качестве $J(\tau)$ имеем

$$J(\tau) = \sqrt{|h(\tau)|} d\tau^0 \wedge \dots \wedge d\tau^{n-1}, \quad (18)$$

где $h = \det h_{ij}$, $h_{ij} = \eta_{\mu\nu} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu$ — индуцированная метрика на бране.

Далее мы будем искать лишь расходящуюся часть интеграла (16), поскольку вид конечной части по ней уже однозначно восстанавливается. При этом необходимо различать два случая: точка наблюдения x лежит вне поверхности браны, и точка x лежит на поверхности браны, т.е. существует такое τ' , что $x = x(\tau')$. Рассмотрим эти возможности по отдельности.

В первом случае структуры возможных расходимостей легко получаются простым разложением подынтегральной δ -функции в ряд Тейлора по ξ . Меняя затем порядок суммирования и интегрирования, получим

$$I_{\text{mod}}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{k!} \int_N \theta(x^0 - x^0(\tau)) \delta^{(k)}((x - x(\tau))^2) J(\tau). \quad (19)$$

⁵⁾Здесь и далее жирным шрифтом обозначается пространственная часть координат.

Интегралы, стоящие под знаком суммы, пропорциональны четномерным потенциалам Льенара–Вихерта (точнее, их обобщениям на случай браны). Эти потенциалы хорошо определены вне поверхности браны, что, собственно, и позволяет менять порядок суммирования и интегрирования. Из требований лоренц-инвариантности, причинности, а также конечности поля $\phi_{\text{mod}}(x)$ вне поверхности браны следует, что функция Грина (13) всегда представима в виде

$$G_{\text{mod}}(x) = \sum_i \theta(x^0) \partial_\xi^{k_i} (\theta(\xi) f_i(\xi)), \quad (20)$$

где $\partial_\xi^{k_i} \equiv (\partial/\partial\xi)^{k_i}$, k_i – некоторые целые неотрицательные числа, а $\theta(\xi) f_i(\xi)$ – хорошо определенные обобщенные функции своего аргумента. С учетом этого выражение для поля (16) перепишется так:

$$\phi_{\text{mod}}(x) = \sum_i (-1)^{k_i} \int_0^\infty d\xi f_i(\xi) \partial_\xi^{k_i} I_{\text{mod}}(x, \xi). \quad (21)$$

Видно, что поле $\phi_{\text{mod}}(x)$, а вместе с ним и поле произвольной линейной теории действительно регулярны вне поверхности браны. Кроме того, из формулы (21) следует, что коэффициенты разложения производящей функции (17) при целых неотрицательных степенях ξ не вносят вклада в расходимости. Последний факт будет часто использоваться в дальнейшем при рассмотрении поля на поверхности браны.

Когда точка наблюдения поля лежит на поверхности браны, соответствующий анализ оказывается более сложным и существенно зависит от способа вложения браны в объемлющее пространство. Вычисление асимптотического разложения производящей функции (17) по параметру ξ сводится к рассмотрению интеграла вида

$$I = \int \theta(-X^0(\tau)) \delta(X^2(\tau) - \xi) \varphi(\tau) d^n \tau, \quad X^2(\tau) = \eta_{\mu\nu} X^\mu(\tau) X^\nu(\tau), \quad (22)$$

где $X^\mu(\tau) = x^\mu(\tau' + \tau) - x^\mu(\tau')$, а $\varphi(\tau) = \mathcal{J}(\tau' + \tau)$ – гладкая функция на мировой поверхности браны, построенная по $J(\tau) = \mathcal{J}(\tau) d\tau^0 \wedge \dots \wedge d\tau^{n-1}$.

Если поверхность N вложена в $\mathbb{R}^{d-1,1}$ так, что индуцированная метрика h_{ij} невырождена, то $\tau = 0$ является невырожденной критической точкой функции $X^2(\tau)$. Согласно лемме Морса (см. приложение А) в окрестности $\tau = 0$ можно ввести такие координаты t , что $X^2(\tau)$ примет в них вид $X^2(\tau(t)) = \eta_{ij} t^i t^j$, $\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. В этих координатах интеграл (22) перепишется как

$$I = \int \theta(-t^0) \delta(t^2 - \xi) f(t) d^n t, \quad f(t) = \varphi(\tau(t)) \left| \det \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right) \right|^{-1}. \quad (23)$$

Опуская несущественные для анализа расходимостей члены с целыми неотрицательными степенями ξ , можно найти следующие формулы асимптотического разложения (см. приложение Б):

$$I = (-1)^{(n-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{\text{odd} \square k} f(0) \xi^{(n-2)/2+k} + \dots, \quad \lambda_k^{\text{odd}} = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{2^{2k} k! \Gamma(k + n/2)}, \quad (24)$$

для нечетномерной браны и

$$I = (-1)^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{\text{even}} \square^k f(0) \xi^{(n-2)/2+k} \ln \xi + \dots, \quad \lambda_k^{\text{even}} = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{2^{2k} k! \Gamma(k + n/2)}, \quad (25)$$

для четномерной. Здесь мы ввели обозначение

$$\square = \eta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^i \partial t^j}. \quad (26)$$

Проведя вычисления в специальной системе координат, можно ковариантизовать полученный результат, т.е. переписать все выражения через ковариантные производные, построенные по индуцированной метрике $h_{ij}(\tau)$. Для этого сначала удобно перейти от координат Морса $\{t^i\}$ к хорошо известным нормальным координатам $\{\bar{t}^i\}$, в которых проблема ковариантизации решается без особого труда (см., например, монографию [16]). Переход к нормальным координатам в формулах (24) и (25) требует знания лишь нескольких первых производных матрицы Якоби $\partial t^i / \partial \bar{t}^j$ в нуле. Можно показать, что эти производные выражаются через производные в нуле от функции $X^2(\bar{t})$, более того, в приложении А дана рекуррентная процедура их нахождения. Имеем

$$\begin{aligned} t_{i,j} &= \eta_{ij}, \quad t_{ij,k} = 0, \quad t_{ijk,l} = \frac{1}{8} \bar{\partial}_{ijkl} X^2(0), \quad t_{ijkl,m} = \frac{1}{10} \bar{\partial}_{ijklm} X^2(0), \\ t_{ijklm,n} &= \frac{1}{12} \bar{\partial}_{ijklmn} X^2(0) - \frac{\eta^{ps}}{384} \left\{ [\bar{\partial}_{ijkp} X^2(0) \bar{\partial}_{lmns} X^2(0) + \text{cycle}(i, j, k, l, m, n)] + \right. \\ &\quad \left. + [\bar{\partial}_{ilm p} X^2(0) \bar{\partial}_{jkn s} X^2(0) + \bar{\partial}_{ilnp} X^2(0) \bar{\partial}_{jkm s} X^2(0) + \text{cycle}(i, j, k)] \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $t_{i_1 \dots i_{k-1}, i_k} \equiv \eta_{i_k j_k} \bar{\partial}_{i_1 \dots i_{k-1}} t^{j_k}(0)$, $\bar{\partial}_i = \partial / \partial \bar{t}^i$. Далее уже несложно получить, что в нормальной системе координат

$$\begin{aligned} f(0) &= \varphi(0), \quad \square f(0) = \bar{\square} \varphi(0) - \frac{1}{8} \bar{\square}^2 X^2(0) \varphi(0), \\ \square^2 f(0) &= \bar{\square}^2 \varphi(0) - \left[\bar{\partial}^{ij} \bar{\square} X^2(0) - \frac{1}{4} \eta^{ij} \bar{\square}^2 X^2(0) \right] \bar{\partial}_{ij} \varphi(0) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \bar{\partial}^i \bar{\square}^2 X^2(0) \bar{\partial}_i \varphi(0) + \\ &\quad + \frac{1}{8} \left[\bar{\partial}_{ij} \bar{\square} X^2(0) \bar{\partial}^{ij} \bar{\square} X^2(0) + \frac{1}{3} \bar{\partial}_{ijk l} X^2(0) \bar{\partial}^{ij k l} X^2(0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \bar{\square}^2 X^2(0) \bar{\square}^2 X^2(0) - \frac{2}{3} \bar{\square}^3 X^2(0) \right] \varphi(0), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\bar{\square} \equiv \eta^{ij} \bar{\partial}_i \bar{\partial}_j$. Аналогичные формулы имеют место и для более высоких степеней оператора $\square$.

Исследовав полностью модельный пример, покажем, что все остальные случаи к нему легко сводятся. Действительно, вследствие очевидного тождества

$$\partial_\mu \delta((x - x(\tau))^2 - \xi) = -2 \partial_\xi \delta((x - x(\tau))^2 - \xi) (x_\mu - x_\mu(\tau)) \quad (29)$$

действие любого дифференциального оператора на $I_{\text{mod}}(x, \xi)$ представляется линейной комбинацией производных по ξ от интеграла (17) с различными $J(\tau)$. Учитывая вид запаздывающей функции Грина (9), условие (20), а также то, что сила радиационного трения представима в виде (15), можем написать

$$\begin{aligned}\phi(x) &= -\frac{1}{2} \sum_i (-1)^{k_i} \int_0^\infty d\xi f_i(\xi) \partial_\xi^{k_i} PBI_{\text{mod}}(x, \xi) + \phi_0(x), \\ F^{\text{rr}}(\tau) &= \sum_i (-1)^{k_i} \int_0^\infty d\xi f_i(\xi) \partial_\xi^{k_i} D[x(\tau)] I_{\text{mod}}(x, \xi) \Big|_{x=x(\tau)},\end{aligned}\quad (30)$$

где $\phi(x)$ – поле рассматриваемой линейной модели. Зная асимптотическое разложение $I_{\text{mod}}(x, \xi)$ по переменной ξ для произвольного $J(\tau)$, нетрудно найти выражения для расходимостей поля и силы радиационного трения. Воспользовавшись тождеством (29), можно, например, получить следующее выражение для дифференциала модельного поля:

$$d\phi_{\text{mod}}(x) = \sum_i (-1)^{k_i} \int_0^\infty d\xi f_i(\xi) \partial_\xi^{k_i} I_{\text{str}}(x, \xi), \quad (31)$$

где

$$I_{\text{str}}(x, \xi) = -2\partial_\xi \int_N \theta(x^0 - x^0(\tau)) \delta((x - x(\tau))^2 - \xi) [(x - x(\tau)) \wedge J(\tau)]. \quad (32)$$

В случае электродинамики Максвелла величина I_{str} играет роль производящей функции для напряженности поля самодействия (см. ниже соотношения (44), (45)). Видно, что задача нахождения расходимостей поля $d\phi_{\text{mod}}$ сводится к уже изученной задаче для ϕ_{mod} , если за новое $J(\tau)$ принять выражение, стоящее в квадратных скобках (32).

Рассмотрим вопрос о лагранжевости возникающих расходимостей. Вклады от симметричных и антисимметричных частей запаздывающей функции Грина в интеграл (23) имеют вид

$$\int \frac{\theta(-t^0) \pm \theta(t^0)}{2} \delta(t^2 - \xi) f(t) d^n t = \int \theta(-t^0) \delta(t^2 - \xi) \frac{f(t^0, \mathbf{t}) \pm f(-t^0, \mathbf{t})}{2} d^n t. \quad (33)$$

Имея явные формулы (24), (25) асимптотического разложения для такого рода интегралов, можно видеть, что антисимметричная часть функции Грина не вносит вклада в расходимости. Все расходящиеся вклады оказываются лагранжевыми и могут быть получены варьированием эффективного действия (7).

Вывод: исследование структуры расходимостей для силы самодействия в любой локальной линейной теории можно проводить на уровне эффективного действия

$$S^{\text{rr}}[x(\tau)] = -\frac{1}{4} \sum_i (-1)^{k_i} \int_0^\infty d\xi f_i(\xi) \partial_\xi^{k_i} \langle j_0(x), B^* PBI_{\text{mod}}(x, \xi) \rangle \quad (34)$$

при условии, что во всех точках мировой поверхности браны $\det h_{ij} \neq 0$. В противном случае могут возникать дополнительные нелагранжевы расходимости, как, например, в модели безмассовой заряженной частицы [7].

В заключение обсудим условие применимости полученных в этом разделе асимптотических рядов к описанию эффективной динамики макроскопических объектов в ситуации, когда они могут быть приближенно описаны сингулярными токами⁶⁾. В этом случае параметр регуляризации ε имеет смысл характерного размера макроскопического тела. Для поля ϕ были получены два асимптотических разложения в зависимости от того, лежит точка наблюдения на поверхности браны или нет. Для каждой из этих двух физических ситуаций имеется свой естественный масштабный фактор l . В случае, когда точка наблюдения лежит вне носителя сингулярного тока, характерным масштабом является расстояние от точки наблюдения до поверхности браны. В противном случае за l следует принять характерный масштаб изменений самого поля $x(\tau)$. Параметр ε можно считать малым, если $\varepsilon \ll l$. Для достаточно малого ε можно оборвать асимптотический ряд теории возмущений и получить приближенное выражение для силы реакции излучения.

4. ПРИМЕРЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЯХ

В этом разделе мы рассмотрим несколько конкретных моделей взаимодействия бран с антисимметричным тензорным полем, скалярным полем и полем линеаризованной гравитации. На основе развитой техники регуляризации будут найдены явные выражения для конечных и расходящихся частей силы реакции излучения, установлен феномен локализации самодействия (приводящий к локальным и лагранжевым эффективным уравнениям движения браны), а также описан класс теорий, свободных от расходимостей.

В дальнейшем через $\Omega^n \mathbb{R}^{d-1,1}$ будем обозначать линейное пространство n -форм на $\mathbb{R}^{d-1,1}$, оснащенное стандартным скалярным произведением

$$\langle X, Y \rangle = n! \int_{\mathbb{R}^{d-1,1}} X \wedge *Y = \int_{\mathbb{R}^{d-1,1}} X_{\mu_1 \dots \mu_n} Y^{\mu_1 \dots \mu_n} d^d x. \quad (35)$$

Здесь $*$ – оператор Ходжа, переводящий n -формы в $(d - n)$ -формы, а $\wedge$ – значок внешнего произведения форм. Все индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского на $\mathbb{R}^{d-1,1}$. В соответствии с выбранной сигнатурой метрики $*^2 = (-1)^{(n+1)(d+1)}$. Как обычно, d и δ суть внешний дифференциал и кодифференциал,

$$\delta = *d* = \frac{(-1)^{d(n+1)}}{n+1} d^*,$$

а $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ – оператор Д'Аламбера в плоском пространстве-времени.

Для тензорных полей с произвольной симметрией индексов (в частности, для поля линеаризованной гравитации) скалярное произведение дается вторым выражением в формуле (35).

4.1. Брана с минимальным взаимодействием. Рассмотрим $(n - 1)$ -брану в $\mathbb{R}^{d-1,1}$, минимально связанную с калибровочным полем n -формы H . Эта модель является непосредственным обобщением классической электродинамики точечных частиц на случай протяженных релятивистских объектов.

⁶⁾ Для нерелятивистской заряженной частицы такие асимптотические ряды были известны давно (см., например, работу [17] и цитируемую там литературу).

Пусть мировая поверхность $(n-1)$ -браны N гладко вложена в $\mathbb{R}^{d-1,1}$ при помощи отображения $x(\tau) = \{x^\mu(\tau^i)\}$, где $\{\tau^i\}$ – локальные координаты на N . С каждым таким отображением связан ток

$$j(x) = \int_N \delta^d(x - x(\tau)) J(\tau), \quad (36)$$

$$J(\tau) = \frac{1}{n!} \frac{\partial x_{\mu_1}}{\partial \tau^0} \dots \frac{\partial x_{\mu_n}}{\partial \tau^{n-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} d\tau^0 \wedge \dots \wedge d\tau^{n-1},$$

являющийся сингулярной n -формой на $\mathbb{R}^{d-1,1}$. Динамика полной системы поле+брана описывается функционалом действия

$$S[H, x] = \frac{(-1)^{d(n+1)}}{n+1} \langle dH, dH \rangle + e \langle j, H \rangle + S_0[x], \quad (37)$$

где $S_0[x]$ – действие свободной браны, e – константа связи. Варьируя это действие, получим систему уравнений вида (2):

$$\delta F = -\frac{e}{2} j, \quad \frac{\delta S_0}{\delta x} = e(-1)^d n! [*(J \wedge *F)], \quad (38)$$

где $F = dH$ – тензор напряженности поля H . Действие (37) инвариантно относительно калибровочных преобразований $H \rightarrow H + dA$ для всех $A \in \Omega^{n-1} \mathbb{R}^{d-1,1}$. В калибровке Лоренца $\delta H = 0$ уравнения движения (38) принимают вид

$$\square H_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{e}{2} (-1)^{nd+1} j_{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad \frac{\delta S_0}{\delta x^\mu} = e(-1)^{d+n(d+1)} F_{\mu \mu_1 \dots \mu_n} J^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (39)$$

В соответствии с общей формулой (4) сила реакции излучения браны дается выражением

$$F_\mu^{\text{rr}} = \frac{e^2}{2} (-1)^{d+n+1} [d(Gj)]_{\mu \mu_1 \dots \mu_n} J^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (40)$$

Здесь G – линейный оператор, интегральным ядром которого является запаздывающая функция Грина [14]

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi^{(2-d)/2} \theta(x_0) \partial_\xi^{(d-2)/2} \theta(\xi) & \text{при четном } d \geq 4, \\ \frac{1}{2} \pi^{(1-d)/2} \theta(x_0) \partial_\xi^{(d-3)/2} \frac{\theta(\xi)}{\sqrt{\xi}} & \text{при нечетном } d \geq 3, \end{cases} \quad \xi = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (41)$$

В зависимости от четности d лагранжиан для эффективного действия (34) дается одним из двух выражений:

$$L_{\text{even}}^{\text{rr}}(\tau) = e^2 \frac{(-1)^{d/2-1}}{8\pi^{d/2-1}} J_{\mu_1 \dots \mu_n}(\tau) [\partial_\xi^{(d-4)/2} I_{\text{mod}}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x(\tau), \xi)]_{\xi \rightarrow 0},$$

$$L_{\text{odd}}^{\text{rr}}(\tau) = e^2 \frac{(-1)^{nd+(d-1)/2}}{8\pi^{(d-1)/2}} J_{\mu_1 \dots \mu_n}(\tau) \int_0^\infty d\xi \xi^{-1/2} \partial_\xi^{(d-3)/2} I_{\text{mod}}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x(\tau), \xi). \quad (42)$$

Для анализа имеющихся здесь расходимостей в формулах (23)–(25) необходимо положить $\varphi(\tau) = \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_n}(\tau + \tau') J^{\mu_1 \dots \mu_n}(\tau)$. Сопоставляя результат подстановки с выражением (42), заключаем, что наличие самодействия приводит к $[(d-n)/2]$ расходящимся

структурам. Используя (28), можно найти, что первые две расходимости даются выражениями

$$f(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sqrt{|h|}, \quad \square f(0) = \frac{3}{4} \frac{(-1)^n}{n!} \sqrt{|h|} \nabla^2 x_\mu \nabla^2 x^\mu, \quad (43)$$

где ∇_i – ковариантные производные, построенные по индуцированной метрике h_{ij} .

Как видно, наиболее сингулярное слагаемое отвечает за перенормировку параметра натяжения браны (при $n = 1$ – массы частицы). Параметр при втором сингулярном члене обычно называется жесткостью, поэтому сокращение этой расходимости осуществляется за счет перенормировки жесткости. Формула (43) исчерпывает все контрчлены, необходимые для перенормировки классической модели (37), в случае, когда мировая поверхность браны имеет коразмерность 5.

Для нахождения силы реакции излучения необходимо также иметь выражение для напряженности поля браны. С учетом (31) и (32) находим

$$F(x) = \frac{e}{4} (-1)^{d/2-1} \pi^{1-d/2} [\partial_\xi^{(d-4)/2} I_{\text{str}}(x, \xi)]_{\xi \rightarrow 0} \quad (44)$$

в четномерном случае и

$$F(x) = \frac{e}{4} (-1)^{nd+(d-1)/2} \pi^{(1-d)/2} \int_0^\infty d\xi \xi^{-1/2} \partial_\xi^{(d-3)/2} I_{\text{str}}(x, \xi) \quad (45)$$

в нечетномерном. Асимптотический ряд для эффективных уравнений движения браны получается подстановкой этих напряженностей в уравнения движения браны (39). Для массивной заряженной частицы первые члены асимптотического ряда были вычислены в работе [6], а для безмассовой – в работе [7].

4.2. Модели с неминимальным взаимодействием. В этом пункте мы найдем выражение для силы реакции излучения $(n-1)$ -браны, распространяющейся в $(2n+1)$ -мерном пространстве Минковского и взаимодействующей с полями n -форм.

Налагая условия линейности, калибровочной инвариантности, а также отсутствия в теории высших производных, легко видеть, что самая общая модель взаимодействия $(n-1)$ -браны с калибровочным полем n -формы H описывается функционалом действия

$$S[H, x] = \langle H, (\alpha_1 R^2 + \alpha_2 R) H \rangle + \langle j(x), (\beta_1 + \beta_2 R) H \rangle + S_0[x], \quad (46)$$

где $R = *d$ – линейный оператор на $\Omega^n \mathbb{R}^{2n,1}$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – некоторые константы, причем $\alpha_1 \neq 0$, и, наконец, сингулярный ток $j(x)$ имеет вид (36). Поскольку $R^* = (-1)^{n+1} R$, второе слагаемое в свободном действии формы H (член Черна–Саймонса) равно нулю, если n четно.

Налагая лоренцеву калибровку, можно получить следующее формальное выражение для функции Грина:

$$G(x) = \left(\alpha_1 R^2 - \alpha_2 \frac{(-1)^{n+1} + 1}{2} R \right) \left[\left(\alpha_1^2 (-1)^{dn} \square - \alpha_2^2 \frac{(-1)^{n+1} + 1}{2} \right) (-1)^{dn} \square \right]^{-1} \delta^d(x), \quad (47)$$

где $d = 2n + 1$. Далее случаи четного и нечетного n удобно рассматривать по отдельности.

Для четномерной браны “эффе́ктивная” функция Грина (11) имеет вид

$$G'_{\text{even}}(x) = \frac{1}{\alpha_1}(\beta_1^2 - \beta_2^2 \square) \square^{-1} \delta^d(x). \quad (48)$$

Сравнивая это выражение с (12), заключаем, что

$$\begin{aligned} \square^{-1} \delta^d(x) &= \theta(x^0) g_{\text{even}}(\xi), \quad B^* P B = \frac{1}{\alpha_1}(\beta_1^2 - \beta_2^2 \square), \\ B^* P B I_{\text{mod}}(x, \xi) &= \frac{1}{\alpha_1}[\beta_1^2 - 2\beta_2^2(2\partial_\xi^2 \xi - (2n+1)\partial_\xi)] I_{\text{mod}}(x, \xi), \end{aligned} \quad (49)$$

где форма $J(\tau)$ для $I_{\text{mod}}(x, \xi)$ определена выражением (36). Лагранжиан, отвечающий эффе́ктивному действию (34) (производящему действию для расходямостей), запишется как

$$L_{\text{even}}^{\text{rr}} = \frac{1}{8\pi^n \alpha_1} J_{\mu_1 \dots \mu_n}(\tau) \int_0^\infty d\xi \xi^{-1/2} [\beta_1^2 \partial_\xi^{n-1} - 2\beta_2^2 (2\xi \partial_\xi^{n+1} + \partial_\xi^n)] I_{\text{mod}}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x(\tau), \xi). \quad (50)$$

Сопоставляя последнее выражение с (42), заключаем, что в данном случае возникают те же расходящиеся структуры, что и для браны (37) на фоне $(2n+3)$ -мерного пространства Минковского, но, быть может, с другими общими коэффициентами. Если при этом “отключить” минимальное взаимодействие, т.е. положить $\beta_1 = 0$, то, как видно из формулы (48), сила реакции излучения окажется локальной, а антисимметричная часть запаздывающей функции Грина (41) вообще не будет вносить вклада в самодействие. Последнее замечание означает лагранжевость самодействия. Формула для лагранжиана (50) переписывается так:

$$L_{\text{even}}^{\text{rr}} = \frac{\beta_2^2}{2\pi^n \alpha_1} J_{\mu_1 \dots \mu_n}(\tau) [\sqrt{\xi} \partial_\xi^n I_{\text{mod}}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x(\tau), \xi)]_{\xi \rightarrow 0}. \quad (51)$$

Подставляя сюда асимптотическое разложение (25), можно видеть, что конечная часть силы реакции излучения равна нулю, а расходящаяся часть дается первыми $(n+2)/2$ членами асимптотического ряда.

Обратимся к случаю нечетномерной браны. Для уменьшения объема выкладок будем считать, что коэффициенты α_1 , α_2 , β_1 и β_2 связаны соотношением $\alpha_1 \beta_1 = \alpha_2 \beta_2$. При выполнении последнего условия обобщенная сила Лоренца обращается в нуль на решениях свободных уравнений движения для поля H , что приводит к локализации поля, создаваемого каждой точкой браны, в инфинитезимальной окрестности этой точки и, как следствие, к локализации силы самодействия. Эффе́ктивная функция Грина принимает вид

$$G'_{\text{odd}}(x) = -\frac{1}{\alpha_1}(\beta_1 \beta_2 R - \beta_2^2 \square) \square^{-1} \delta^d(x), \quad (52)$$

где

$$\square^{-1} \delta^d(x) = \theta(x^0) g_{\text{odd}}(\xi), \quad -\frac{1}{\alpha_1}(\beta_1 \beta_2 R - \beta_2^2 \square) = B^* P B, \quad (53)$$

откуда

$$B^* P B I_{\text{mod}}(x, \xi) = -\frac{1}{\alpha_1} \{ \beta_1 \beta_2 [*I_{\text{str}}(x, \xi)] - 2\beta_2^2 (2\partial_\xi^2 \xi - (2n+1)\partial_\xi) I_{\text{mod}}(x, \xi) \}. \quad (54)$$

Подставив это выражение в формулу (34), получим следующий лагранжиан:

$$L_{\text{odd}}^{\text{rr}} = \frac{1}{8\pi^n \alpha_1} \left\{ \frac{\beta_1 \beta_2}{(n+1)!} J^{\mu_1 \dots \mu_n}(\tau) \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n \mu_{n+1} \dots \mu_d} \times \right. \\ \times \int_0^\infty d\xi \xi^{-1/2} \partial_\xi^{n-1} I_{\text{str}}^{\mu_{n+1} \dots \mu_d}(x(\tau), \xi) + \\ \left. + 4\beta_2^2 J_{\mu_1 \dots \mu_n}(\tau) [\sqrt{\xi} \partial_\xi^n I_{\text{mod}}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x(\tau), \xi)]_{\xi \rightarrow 0} \right\}. \quad (55)$$

Второе слагаемое дает те же расходящиеся структуры, что имелись в случае четномерной браны с $\beta_1 = 0$, а расходимости от первого слагаемого могут быть легко найдены, если известны расходимости для напряженности поля (45) в модели (37) при $d = 2n + 1$.

В рассматриваемом случае сила самодействия оказывается лагранжевой и имеет не исчезающую при $\xi \rightarrow 0$ конечную часть. Более того, несмотря на то что выражение для лагранжиана (55) нелокально, сила самодействия *локальна* и имеет вид

$$(F_{\text{odd}}^{\text{rr}})_{\mu_1}(\tau) = \frac{1}{\pi^n \alpha_1} J^{\mu_2 \dots \mu_{n+1}}(\tau) \times \\ \times \left\{ \frac{\beta_1 \beta_2}{n!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n+1} \mu_{n+2} \dots \mu_d} [\sqrt{\xi} \partial_\xi^n I_{\text{mod}}^{\mu_{n+2} \dots \mu_d}(x(\tau), \xi)]_{\xi \rightarrow 0} + \right. \\ \left. + \beta_2^2 [\sqrt{\xi} \partial_\xi^n I_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n+1}}^{\text{str}}(x(\tau), \xi)]_{\xi \rightarrow 0} \right\}. \quad (56)$$

Подставив сюда асимптотическое разложение (24), можно видеть, что оба слагаемых в фигурных скобках вносят ненулевой вклад в конечную часть. При этом первый член (56) дает $(n+1)/2$ не исчезающих при $\xi \rightarrow 0$ слагаемых, $(n-1)/2$ из которых расходятся, а второй — $(n+3)/2$, включая наиболее расходящийся вклад, пропорциональный свободным уравнениям движения браны.

В качестве примера, иллюстрирующего описанную выше ситуацию с появлением конечных лагранжевых вкладов, рассмотрим массивную частицу в $\mathbb{R}^{2,1}$. Выпишем несколько полезных соотношений, аналогичных формулам (28):

$$f(0) = \varphi(0), \quad f'(0) = \dot{\varphi}(0), \quad f''(0) = \ddot{\varphi}(0) + \frac{\dot{x}^2}{4} \varphi(0), \\ f'''(0) = \ddot{\varphi}(0) + \ddot{x}^2 \dot{\varphi}(0) + \ddot{x} \dot{x} \varphi(0), \quad (57) \\ f^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(0) + \frac{5}{2} \ddot{x}^2 \ddot{\varphi}(0) + 5 \ddot{x} \dot{x} \dot{\varphi}(0) + \left(\frac{3}{2} \ddot{x} \dot{x}^{(4)} + \frac{4}{3} \dot{x}^2 + \frac{35}{48} (\ddot{x}^2)^2 \right) \varphi(0),$$

где производные слева берутся по t , а справа — по натуральному параметру на мировой линии частицы $x(\tau)$. Полагая $\varphi(\tau) = \dot{x}(\tau + \tau')$ и используя асимптотическое разложение (101) (см. приложение Б), несложно получить, что не исчезающие при $\xi \rightarrow 0$ члены асимптотического ряда для силы реакции излучения (56) имеют вид

$$F_\mu^{\text{rr}} = \frac{1}{8\pi \alpha_1} \left[\beta_1 \beta_2 \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \dot{x}^\nu \ddot{x}^\lambda + \frac{3}{4} \beta_2^2 \left(\overset{(4)}{x}_\mu + \frac{3}{2} \ddot{x}^2 \ddot{x}_\mu + 3 \ddot{x}_\lambda \dot{x}^\lambda \dot{x}_\mu \right) \right] - \frac{\beta_2^2}{8\pi \alpha_1 \xi} \ddot{x}_\mu, \quad (58)$$

где, напомним, $\alpha_1 \beta_1 = \alpha_2 \beta_2$, $\alpha_1 \neq 0$. Единственная возникающая здесь расходимость поглощается перенормировкой массы частицы.

4.3. Сокращение расходимостей. Известно, что знак (направление) силы взаимодействия источника существенно зависит от тензорной природы поля, которое он порождает⁷⁾. Это простое наблюдение указывает на принципиальную возможность сокращения расходимостей в моделях с достаточно разнообразным спектром полей. В случае $d = 4$ такой анализ был проведен в работе [13] для массивной частицы, взаимодействующей с мультиплетом скалярных и векторных полей, а в работе [10] – для струны на фоне антисимметричного тензорного поля, скалярного поля и поля линеаризованной гравитации. В этих работах были установлены необходимые соотношения между параметрами теории, обеспечивающие сокращение расходимостей. Здесь мы обобщим результаты работ [10], [13] на случай браны в произвольной размерности пространства-времени.

Итак, рассмотрим $(n - 1)$ -брану, взаимодействующую с динамическим фоном антисимметричного тензорного поля $H \in \Omega^n \mathbb{R}^{d-1,1}$, скалярного поля ϕ и поля линеаризованной гравитации $\lambda_{\mu\nu}$:

$$S[H, \phi, \lambda, x] = \alpha \langle H, \delta dH \rangle + \beta \langle \phi, \delta d\phi \rangle + \gamma \langle \lambda, D\lambda \rangle + \alpha_1 \langle j^H, H \rangle + \beta_1 \langle j^\phi, \phi \rangle + \frac{\gamma_1}{2} \langle T, \lambda \rangle + S_0[x]. \quad (59)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – некоторые константы, сингулярные токи j^ϕ и j^H имеют вид (10), где $J(\tau)$ задается формулами (18) и (36), соответственно. Тензор энергии-импульса браны дается выражением

$$T_{\mu\nu} = \int_N \delta^d(x - x(\tau)) \pi_{\mu\nu}(\tau) \sqrt{|h|} d^n \tau, \quad (60)$$

где введены обозначения

$$\pi_{\mu\nu}(\tau) = h^{ij} \partial_i x_\mu(\tau) \partial_j x_\nu(\tau), \quad h = \det h_{ij}, \quad h_{ij} = \eta_{\mu\nu} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu, \quad h_{ik} h^{kj} = \delta_i^j. \quad (61)$$

Свободное действие браны $S_0[x]$ имеет вид

$$S_0[x] = \gamma_1 \int_N d^n \tau \sqrt{|h|}. \quad (62)$$

Волновой оператор D , отвечающий линеаризованной гравитации, дается выражением

$$D_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} [(\delta_{(\alpha}^{\mu} \delta_{\beta)}^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) \square + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta - \delta_{(\alpha}^{\nu} \partial_{\beta)} \partial^\mu - \delta_{(\alpha}^{\mu} \partial_{\beta)} \partial^\nu], \quad (63)$$

где круглые скобки означают симметризацию индексов. После наложения калибровочных условий

$$\partial^{\mu_1} H_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = 0, \quad \partial_\nu \lambda_\mu^\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu \lambda_\nu^\nu = 0 \quad (64)$$

⁷⁾ Для неприводимого тензорного поля спина s в $d = 4$ этот знак равен $(-1)^s$. Например, два одинаковых электрических заряда всегда отталкиваются, а две гравитирующие массы всегда притягиваются.

запаздывающие функции Грина полей H и γ примут вид

$$G^H = (-1)^{dn} G, \quad (G^\gamma)_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = -4 \left(\delta_{(\alpha}^{\mu} \delta_{\beta)}^{\nu} - \frac{1}{d-2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right) G, \quad (65)$$

где G – запаздывающая функция Грина оператора Д’Аламбера.

В результате эффективное действие (34) для самодействия браны запишется как

$$S^{\text{eff}}[x] = -\frac{1}{4} \left((-1)^{dn} \frac{\alpha_1^2}{\alpha} \langle j^H, G j^H \rangle + \left(\frac{\beta_1^2}{\beta} + \frac{n^2}{d-2} \frac{\gamma_1^2}{\gamma} \right) \langle j^\phi, G j^\phi \rangle - \frac{\gamma_1^2}{\gamma} \langle T, GT \rangle \right). \quad (66)$$

Как было показано в разделе 3, это действие несет всю информацию о расходимостях теории. Обозначим через a , b и c коэффициенты при первом, втором и третьем слагаемых в выражении (66). Каждому из этих трех слагаемых отвечает своя производящая функция расходимостей (17), (23); обозначим их f^H , f^ϕ и f^γ . Расходящиеся структуры даются начальными членами соответствующих асимптотических рядов (24), (25), причем число сингулярных членов линейно растет с увеличением коразмерности браны. Ясно, что мы не сможем сократить все возникающие в общем случае расходимости, имея в распоряжении всего три произвольные константы. Попытаемся сократить хотя бы часть из них, начиная с наиболее сингулярных. Это приводит к цепочке линейных уравнений

$$\square^k (a f^H + b f^\phi + c f^\gamma)(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (67)$$

Воспользовавшись формулами (28), перепишем (67) в терминах соответствующей функции $\varphi \equiv a\varphi^H + b\varphi^\phi + c\varphi^\gamma$. Имеем

$$\varphi(0) = 0, \quad \bar{\square}\varphi(0) = 0, \quad \bar{\square}^2\varphi(0) - \bar{\partial}^{ij}\bar{\square}X^2(0)\bar{\partial}_{ij}\varphi(0) - \frac{1}{2}\bar{\partial}^i\bar{\square}^2X^2(0)\bar{\partial}_i\varphi(0) = 0, \quad \dots \quad (68)$$

Решать эти уравнения необходимо последовательно – сначала первое, затем второе и т. д. до тех пор, пока следующее уравнение не войдет в противоречие с предыдущими.

Легко получить, что

$$\varphi^H(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}, \quad \varphi^\phi(0) = 1, \quad \varphi^\gamma(0) = n, \quad (69)$$

а также

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{ij}\varphi^H(0) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \bar{\partial}^k x^\mu \bar{\partial}_{ijk} x_\mu, & \bar{\partial}_{ij}\varphi^\phi(0) &= \frac{1}{2} \eta^{kl} \bar{\partial}_{ij} h_{kl}, \\ \bar{\partial}_{ij}\varphi^\gamma(0) &= 2 \bar{\partial}^k x^\mu \bar{\partial}_{ijk} x_\mu + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \eta^{kl} \bar{\partial}_{ij} h_{kl}, \end{aligned} \quad (70)$$

откуда немедленно вытекает, что для сокращения первых двух потенциально расходящихся слагаемых необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения для коэффициентов⁸⁾:

$$a = 2n!(-1)^n c, \quad b = -(n-2)c, \quad (71)$$

⁸⁾Заметим, что первые два из уравнений (68) эквивалентны $\bar{\partial}_{ij}\varphi(0) = 0$, после чего третье уравнение сводится к $\bar{\square}^2\varphi(0) = 0$.

или, в терминах исходных параметров теории,

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha} = 2n!(-1)^{(d+1)n} \frac{\gamma_1^2}{\gamma}, \quad \frac{\beta_1^2}{\beta} = -\left(\frac{n^2}{d-2} - n + 2\right) \frac{\gamma_1^2}{\gamma}. \quad (72)$$

Можно проверить, что третье из уравнений (68) уже несовместно с условиями (71).

В п. 4.1 мы установили, что общее число расхождений в моделях такого типа равно $[(d-n)/2]$. Условие (72) сокращает это число до $[(d-n-4)/2]$. Тем самым доказано, что полное сокращение расхождений за счет выбора свободных параметров в модели (59) возможно тогда и только тогда, когда $\text{codim } N \leq 5$.

5. САМОДЕЙСТВИЕ В НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЯХ

В предыдущих разделах мы установили, что вне зависимости от типа поля, размерности пространства-времени, а также конкретной структуры сингулярного источника все локальные линейные модели являются перенормируемыми теориями в том смысле, что учет самодействия источника приводит лишь к *конечному* числу расходящихся структур. Цель данного раздела – распространить предыдущий анализ на нелинейные модели теории поля, в частности, установить критерии перенормируемости нелинейных теорий.

Изложение общей схемы регуляризации и перенормировок проведем на примере скалярного поля, линейно связанного с током $(n-1)$ -браны и обладающего единственной вершиной самодействия ϕ^m . Более интересная и сложная модель – брана на фоне эйнштейновской гравитации – будет рассмотрена в заключительной части этого раздела.

Действие модели ϕ^m имеет вид

$$S[\phi, x] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \phi \square \phi - \frac{\lambda}{m!} \phi^m - \alpha \phi j[x] \right) + S_0[x]. \quad (73)$$

Здесь α и λ – константы связи, сингулярный источник $j[x]$ имеет вид (8) с $J(\tau)$, заданным выражением (18), $S_0[x]$ – свободное действие браны. Уравнение движения поля ϕ имеет вид

$$\square \phi = \frac{\lambda}{(m-1)!} \phi^{m-1} + \alpha j[x]. \quad (74)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда по константе связи α :

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \phi^{(k)}, \quad \phi^{(0)} = 0, \quad (75)$$

что эквивалентно разложению по степеням источника $j[x]$. Первые две поправки к нулевому решению имеют вид

$$\phi^{(1)} = G j[x], \quad \phi^{(m-1)} = \frac{\lambda}{(m-1)!} G (G j[x])^{m-1}, \quad (76)$$

где G – оператор, отвечающий запаздывающей функции Грина (41). Высшие вклады теории возмущений удобно представлять диаграммами Фейнмана. Все рассматриваемые диаграммы являются древесными. В каждой вершине диаграммы сходится m линий. Каждой линии отвечает запаздывающая функция Грина. Все внешние линии диаграмм, кроме одной, сворачиваются с источником j , остающаяся линия отвечает аргументу поля ϕ в выражении (75). По каждой вершине проводится интегрирование.

Как и в линейном случае, регуляризацию диаграмм будем проводить за счет регуляризации источника: $j \rightarrow j_\varepsilon = \square G_\varepsilon j$, что по существу эквивалентно регуляризации функций Грина, отвечающих внешним линиям диаграмм. Такой способ регуляризации имеет, с одной стороны, простой физический смысл, а с другой – позволяет использовать полученные результаты для описания эффективной динамики макроскопических источников поля, допускающих аппроксимацию сингулярными токами. В качестве регуляризованного выражения для запаздывающей функции Грина возьмем⁹⁾

$$G_\varepsilon(x) = \theta(x_0)g(x^2, \varepsilon) = \theta(x_0)\partial_\xi^k (\theta(\xi - \varepsilon^2)f(\xi))|_{\xi=x^2}. \quad (77)$$

Пределу снятия регуляризации отвечает $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим сначала регуляризацию диаграммы с одной вершиной, т.е. вклад $\phi^{(m-1)}$. Так же, как и в линейном случае, вводя дополнительное интегрирование по вспомогательным переменным ξ_r , получим

$$\phi^{(m-1)}(x(\tau_1)) = \frac{\lambda}{(m-1)!} \int d\xi_1 g(\xi_1) \int \prod_{r=2}^m d\xi_r g(\xi_r, \varepsilon) I_{\xi_1 \dots \xi_m}(\tau_1), \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned} I_{\xi_1 \dots \xi_m}(\tau_1) &= \int_N \prod_{l=2}^m \mathcal{J}(\tau_1 + t_l) d^n t_l \int d^d y \theta(-y^0) \delta(y^2 - \xi_1) \times \\ &\times \prod_{k=2}^m \theta(y^0 - X_k^0) \delta((X_k - y)^2 - \xi_k). \end{aligned} \quad (79)$$

Здесь $X_l = X(t_l) \equiv x(\tau_1 + t_l) - x(\tau_1)$ и $\mathcal{J}(\tau) = \sqrt{|h(\tau)|}$.

Для нахождения асимптотического разложения по параметру регуляризации произведем следующие замены: $\xi_r \rightarrow \varepsilon^2 \xi_r$, $y \rightarrow \varepsilon y$ и $X_k \rightarrow \varepsilon X_k$, т.е. обезразмерим величины, входящие в интеграл по y . Тогда произведение θ - и δ -функций, отвечающее k -й линии диаграммы, входящей в вершину, перепишется как

$$\theta(y^0 - X_k^0) \delta((X_k - y)^2 - \xi_k) \rightarrow \varepsilon^{-2} \theta(y^0 - X_k^0) \delta((X_k - y)^2 - \xi_k). \quad (80)$$

Остающееся подынтегральное выражение является регулярной неоднородной функцией t_k . Сделав еще одну замену $t_k \rightarrow \varepsilon t_k$, можно видеть, что интеграл (78) представляется рядом Лорана по ε с конечной главной частью.

⁹⁾С геометрической точки зрения это соответствует аппроксимации светового конуса будущего (который, в зависимости от размерности, либо ограничивает, либо задает носитель запаздывающей функции Грина $G(x)$) семейством гладких гиперboloидов $x^2 = \varepsilon^2$, $x_0 > 0$. Очевидно, что при $\varepsilon > 0$ функция $G_\varepsilon(x)$ является регулярной обобщенной функцией на $\mathbb{R}^{d-1,1}$.

Аналогичное утверждение имеет место и в случае диаграммы с произвольным числом вершин. Для того чтобы понять общую структуру ряда теории возмущений, достаточно рассмотреть диаграмму с двумя вершинами в модели ϕ^3 , изображенную на рисунке. Для этой диаграммы

$$\int d\xi_1 d\xi_3 g(\xi_1)g(\xi_3) \int d\xi_2 d\xi_4 d\xi_5 g(\xi_2, \varepsilon)g(\xi_4, \varepsilon)g(\xi_5, \varepsilon)I_{\xi_1 \dots \xi_5}(\tau_1), \quad (81)$$

где

$$\begin{aligned} I_{\xi_1 \dots \xi_5}(\tau_1) = & \int d^d y_1 d^d y_3 \theta(x^0(\tau_1) - y_1^0) \delta((x(\tau_1) - y_1)^2 - \xi_1) \times \\ & \times \theta(y_1^0 - y_3^0) \delta((y_1 - y_3)^2 - \xi_3) \theta(y_1^0 - x^0(\tau_2)) \delta((y_1 - x(\tau_2))^2 - \xi_2) \times \\ & \times \theta(y_3^0 - x^0(\tau_4)) \delta((y_3 - x(\tau_4))^2 - \xi_4) \theta(y_3^0 - x^0(\tau_5)) \delta((y_3 - x(\tau_5))^2 - \xi_5). \end{aligned}$$

Выполнив последовательные замены переменных $y_1 \rightarrow y_1 + x(\tau_1)$, $y_3 \rightarrow y_3 + y_1 + x(\tau_1)$, получим

$$\begin{aligned} I_{\xi_1 \dots \xi_5}(\tau_1) = & \int d^d y_1 d^d y_3 \theta(-y_1^0) \delta(y_1^2 - \xi_1) \theta(-y_3^0) \delta(y_3^2 - \xi_3) \theta(y_1^0 - X_2^0) \times \\ & \times \delta((y_1 - X_2)^2 - \xi_2) \theta(y_3^0 + y_1^0 - X_4^0) \delta((y_3 + y_1 - X_4)^2 - \xi_4) \times \\ & \times \theta(y_3^0 + y_1^0 - X_5^0) \delta((y_3 + y_1 - X_5)^2 - \xi_5). \end{aligned} \quad (82)$$

После перехода к безразмерным переменным $\xi_k \rightarrow \varepsilon^2 \xi_k$, $y_k \rightarrow \varepsilon y_k$, $X_k \rightarrow \varepsilon X_k$, $t_k \rightarrow \varepsilon t_k$ можно видеть, что, как и в предыдущем случае, каждая линия диаграммы вносит общий множитель ε^{2-d} , каждый источник $-\varepsilon^n$, а каждая вершина $-\varepsilon^d$. Оставшееся подынтегральное выражение разлагается в ряд по положительным степеням ε , начиная с нулевой. В итоге полное аналитическое выражение для произвольной диаграммы представляется рядом Лорана по степеням параметра регуляризации ε с конечным числом полюсов. Это и есть искомое асимптотическое разложение.

Учитывая, что число вершин V равно $(S-1)/(m-2)$, где S — число источников, а число линий $E = ((m-1)S-1)/(m-2)$, видим, что наиболее существенный вклад от диаграммы с S источниками (ведущий член разложения Лорана) имеет порядок

$$\alpha^S \lambda^{(S-1)/(m-2)} \varepsilon^{S(2(m-1)/(m-2)+n-d)-2/(m-2)}. \quad (83)$$

Так же, как и в линейном случае, можно ввести размерный параметр l , характеризующий масштаб длин рассматриваемой задачи. Переопределив затем $x(\tau)$ и τ : $x(\tau) \rightarrow lx(\tau)$, $\tau \rightarrow l\tau$, перейдем от ряда по ε к асимптотическому разложению по степеням безразмерной величины ε/l . Как уже говорилось выше, физический смысл рассматриваемой регуляризации состоит в том, что мы “размазываем” носитель сингулярного тока

по его ε -окрестности. Как и в линейном случае, такая операция может быть физически оправданной, если только $\varepsilon \ll l$. Это дает верхнее ограничение на параметр ε , при котором асимптотический ряд теории возмущений имеет смысл. В частности, это условие позволяет обрывать регулярную часть разложения Лорана по ε/l и получать приближенные эффективные уравнения движения для макроскопических объектов.

Существование асимптотического ряда теории возмущений по числу источников S налагает дополнительное ограничение на параметр ε и константы связи теории. А именно, потребовав, чтобы отношение двух последовательных вкладов (83) от диаграмм с S и $S + 1$ внешним источником было много меньше единицы, получим

$$|\alpha||\lambda|^{1/(m-2)} \ll \varepsilon^{d-n-2(m-1)/(m-2)}. \quad (84)$$

В частности, если показатель степени ε не положителен, т.е. $(m-1)/(m-2) \geq (d-n)/2$, величина ε может быть выбрана сколь угодно малой. Для частицы на фоне четырехмерного пространства Минковского формула (84) имеет вид

$$|\alpha||\lambda|^{1/(m-2)} \ll \varepsilon^{(m-4)/(m-2)}, \quad \varepsilon \ll l. \quad (85)$$

Условие, при котором можно переходить к пределу снятия регуляризации: $m \leq 4$. Заметим, что последнее ограничение в точности совпадает с условием квантовой перенормируемости модели ϕ^m . При $m = 3$ все нелинейные поправки исчезают в пределе снятия регуляризации, и эффективная теория оказывается линейной. Единственная расходимость отвечает диаграмме с одним источником и сокращается за счет перенормировки массы частицы¹⁰⁾. В случае $m = 4$ все диаграммы расходятся как ε^{-1} . Как видно из (83), от этих расходимостей можно избавиться, перенормировав константы связи: $\alpha \rightarrow \varepsilon\alpha$, $\lambda \rightarrow \varepsilon^{-2}\lambda$. Заметим, что такое преобразование оставляет инвариантным условие применимости теории возмущений (85).

Для моделей с произвольными значениями d , n и m также можно применять теорию возмущений, но при условии, что константы связи и параметр регуляризации (имеющий теперь смысл характерного размера тела) удовлетворяют неравенствам (84) и $\varepsilon \ll l$.

Изложенная выше процедура регуляризации диаграмм прямо обобщается на случай многокомпонентных полей. При этом, если в теории имеется несколько различных источников, то с каждым из них может быть связан свой параметр регуляризации, и необходимо дополнительно указывать, как эти параметры между собой соотносятся.

Теория является *классически перенормируемой*, если общая степень расходимости диаграмм ограничена сверху. Это условие обеспечивает конечность главной части разложения Лорана по параметру регуляризации, а значит, и возможность сокращения расходимостей за счет введения конечного числа контрчленов.

Сформулируем теперь явные критерии классической перенормируемости на языке размерностей констант связи теории подобно критерию перенормируемости в квантовой теории поля. Пусть действие теории имеет структуру

$$S[\phi, x] = \int d^d x (\phi D \phi + \lambda \partial^{m_1} \phi^{m_2}) + \alpha \int d^n \tau \partial^{k_1} \phi^{k_2}(x(\tau)) \mathcal{J}(\tau) + S_0[x], \quad (86)$$

¹⁰⁾ Квантово-полевой аналог этого свойства – суперперенормируемость модели ϕ^3 в размерности 4.

где D – некоторый волновой оператор, а ∂^k обозначает k производных в вершине. Тогда теория является классически перенормируемой, если выполняется хотя бы один из трех наборов условий:

$$\begin{aligned} 1) \quad & [\alpha] + \frac{[\lambda]}{m-2} \leq 0, \quad [\lambda] \geq 0; \\ 2) \quad & [\alpha] + \frac{[\lambda]}{m-2} \leq 0, \quad k = 1; \\ 3) \quad & [\alpha] \leq 0, \quad [\lambda] < 0, \quad k \neq 1. \end{aligned} \quad (87)$$

Здесь квадратными скобками обозначена размерность констант связи в единицах длины. Например, полагая $[\phi] = 0$, будем иметь

$$[\alpha] = d - n - r + k_1, \quad [\lambda] = m_1 - r, \quad (88)$$

где r – порядок дифференциального оператора D .

Для модели ϕ^m имеем $[\alpha] = d - n - 2$, $[\lambda] = -2$ и $k = 1$. Применяя соотношение из второй строки (87), приходим к полученному выше условию классической перенормируемости (84). Не останавливаясь на подробном доказательстве соотношений (87), проиллюстрируем их справедливость (а заодно и методику получения) на примере гравитирующей $(n-1)$ -браны на фоне d -мерного пространства-времени.

Динамика гравитационного поля описывается уравнениями Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = \frac{\mu}{2\sqrt{|g|}} \int \delta^d(x - x(\tau)) \pi_{\mu\nu} \sqrt{|h|} d^n \tau, \quad (89)$$

где G – гравитационная постоянная, μ – параметр натяжения браны (в случае $n = 1$ – масса частицы), а $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса браны в обозначениях (61), где необходимо заменить $\eta_{\mu\nu}$ на $g_{\mu\nu}$.

Решение уравнений Эйнштейна будем искать в виде ряда теории возмущения по единственной размерной константе $G\mu$ над фоном плоского пространства-времени:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} (G\mu)^k g_{\mu\nu}^{(k)}. \quad (90)$$

В низшем порядке теории возмущений получим

$$Dg_{\mu\nu}^{(1)} = \pi\mu \int \delta^d(x - x(\tau)) h^{ij} \partial_i x_\mu \partial_j x_\nu \sqrt{|h|} d^n \tau, \quad (91)$$

где D – волновой оператор линеаризованной гравитации (63), функция Грина которого в гармонической калибровке $\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0$ принимает вид (65). Индуцированная метрика h_{ij} в формуле (91) построена по плоской фоновой метрике $\eta_{\mu\nu}$.

Обсуждение высших вкладов теории возмущений удобно проводить на языке диаграмм. Как и в предыдущей модели скалярного поля ϕ^m , все рассматриваемые диаграммы являются древесными, однако имеется два типа вершин: первые отвечают самодействию гравитационного поля, вторые – явной зависимости источника $T_{\mu\nu}$ от метрики. При этом в каждую из вершин двух типов может входить сколь угодно большое

число линий. Каждой линии диаграммы соответствует запаздывающая функция Грина; внешние линии сворачиваются со “свободными” источниками (правая часть уравнения (91)).

Найдем порядок наиболее существенного вклада диаграммы с фиксированным числом источников. Легко видеть, что с каждой вершиной первого типа связан множитель ε^{d-2} , с каждой вершиной второго типа и источником – множитель $\varepsilon^n G\mu$; наконец, каждая линия вносит множитель ε^{2-d} . Пусть E – число линий диаграммы, S – число источников, а V_1 и V_2 – число вершин первого и второго типа. Тогда ведущий вклад диаграммы будет иметь порядок $\varepsilon^{n(S+V_2)+(d-2)(V_1-E)} (G\mu)^{S+V_2}$. С учетом $E = S + V_1 + V_2$ это равно $(G\mu/\varepsilon^{d-n-2})^{S+V_2}$. Условие применимости теории возмущений принимает таким образом вид

$$G\mu \ll \varepsilon^{d-n-2}, \quad \varepsilon \ll l. \quad (92)$$

К этому же условию можно прийти, воспользовавшись общими критериями перенормируемости (87). Действительно, в рассматриваемом случае $r = 2$, $k_1 = 0$, $m_1 = 2$. В соответствии с (88) $[\lambda] = 0$. Воспользовавшись первым из условий (87), заключаем, что модель гравитирующей $(n-1)$ -браны в d измерениях классически перенормируема, если и только если

$$d - n - 2 \leq 0. \quad (93)$$

При $d - n > 2$ параметр регуляризации ε не может быть выбран сколь угодно малым; в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ каждая диаграмма расходится, причем степень расходимости нарастает с увеличением числа источников.

Для частицы на фоне четырехмерного пространства-времени отмеченный выше факт означает, что не только квантовая, но и классическая теория гравитации оказывается пертурбативно неперенормируемой. Тем не менее разложение (90) можно применять для описания эффективной динамики макроскопических тел, если выполнено неравенство (92), т.е. если характерный размер тела больше его радиуса Шварцшильда, но меньше характерного масштаба изменения его траектории. Условие применимости линейного приближения к точечным гравитирующим объектам налагает более сильное ограничение на параметры теории, а именно

$$\frac{G\mu}{l} \ll \left(\frac{\varepsilon}{l}\right)^2. \quad (94)$$

В противном случае нелинейные поправки будут перекрывать линейный вклад. Несмотря на большое количество работ, связанных с выводом и исследованием эффективных уравнений движения гравитирующих точечных масс в рамках линеаризованной гравитации (см., например, обзор [8]), данное условие до сих пор не было отмечено.

При $d = n - 2$ расходиться может лишь вклад от диаграммы с одним источником. Однако из выражений (66) и (69) можно видеть, что общий коэффициент перед этой расходимостью равен нулю. В приближении линеаризованной гравитации последний факт был установлен в работе [12]. Таким образом, гравитационное самодействие браны ко-размерности 2 (а также и гипербраны) оказывается не только перенормируемым, но и конечным во всех порядках теории возмущений.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Координаты Морса

ЛЕММА МОРСА. Пусть $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая вещественная функция, имеющая $0 \in \mathbb{R}^d$ своей невырожденной критической точкой. Тогда в некоторой окрестности U точки $0 \in \mathbb{R}^d$ можно выбрать такие координаты $\{t^i\}$, что функция $f|_U$ принимает в них вид

$$f(t) = f(0) + \eta_{ij} t^i t^j, \quad (95)$$

где $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$.

Число отрицательных элементов матрицы η_{ij} называется индексом Морса критической точки функции f , а координаты $\{t^i\}$ — координатами Морса.

Нашей целью является нахождение начального отрезка ряда Тейлора

$$t^i(\tau) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} t_{j_1 \dots j_n}^i \tau^{j_1} \dots \tau^{j_n} + R_N, \quad (96)$$

связывающего произвольные координаты τ в окрестности критической точки 0 функции f с координатами Морса t . Выполнив при необходимости линейную замену координат, можно считать, что гессиан функции $f(\tau)$ в критической точке имеет вид $\partial_{ij} f(0) = 2\eta_{ij}$.

Подставив разложение (96) в формулу (95) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ^i , получим цепочку рекуррентных соотношений для определения коэффициентов $t_{j_1 \dots j_k}^i$. В частности, в первом порядке по τ получим $\eta_{ij} = t_i^k \eta_{kl} t_j^l$, и потому можно положить $t_j^i = \delta_j^i$. С учетом сделанного выбора для (псевдо)ортогональной матрицы t_i^j уравнения для высших порядков по τ примут вид

$$t_{(i_1 \dots i_{n-1}, i_n)} = \frac{1}{2n} \partial_{i_1 \dots i_n} f(0) - \frac{1}{2n} \sum_{s=2}^{n-2} C_n^s \eta_{kl} t_{(i_1 \dots i_s}^k t_{i_{s+1} \dots i_n)}^l, \quad n \leq N, \quad (97)$$

где $t_{i_1 \dots i_n, k} = t_{i_1 \dots i_n}^l \eta_{lk}$ и круглые скобки означают симметризацию индексов.

Поскольку координаты Морса определены неоднозначно, полученная цепочка уравнений имеет множество решений. Наложив, например, дополнительное условие

$$t_{i_1 \dots i_{n-1}, k} = t_{(i_1 \dots i_{n-1}, k)}, \quad (98)$$

приходим к решению, у которого коэффициенты $t_{i_1 \dots i_n}^k$ получаются поднятием индекса у полностью симметричного тензора, стоящего в правой части уравнения (97). Например, три первых коэффициента ряда (96) даются выражениями:

$$\begin{aligned} t_{i,j} &= \eta_{ij}, & t_{ij,k} &= \frac{1}{6} \partial_{ijk} f(0), \\ t_{ijk,l} &= \frac{1}{8} \partial_{ijkl} f(0) - \frac{1}{144} [\partial_{lis} f(0) \partial_{jk} \partial^s f(0) + \text{cycle}(i, j, k)]. \end{aligned} \quad (99)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Асимптотическое разложение основного интеграла

В этом приложении мы получим асимптотическое разложение по ξ для интеграла вида

$$\int \theta(-t^0) \delta(t^2 - \xi) f(t) d^n t, \quad t^2 = \eta_{ij} t^i t^j, \quad (100)$$

путем непосредственного интегрирования. Более изящный вывод, опирающийся на понятие вычета обобщенной функции, можно найти в книге [18].

Совершенно элементарно это разложение получается при $n = 1$ (случай массивной частицы). Используя стандартные правила интегрирования δ -функции, находим

$$\int \theta(-t^0) \delta(t^2 - \xi) f(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k f(0)}{dt^k} \xi^{(k-1)/2}. \quad (101)$$

При $n \geq 2$ анализ интеграла (100) не столь элементарен. Переходя в сферическую систему координат по пространственным переменным, т.е. от переменных интегрирования $(t^0, \mathbf{t})$ к переменным (t_0, r, ω) , получим

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{\xi}} dt_0 \int dr d\omega r^{n-2} \frac{\delta(r - \sqrt{t_0^2 - \xi})}{2\sqrt{t_0^2 - \xi}} f(t_0, r, \omega). \quad (102)$$

Поскольку нас интересует поведение интеграла лишь в малой окрестности особой точки, нижний предел интегрирования можно заменить некоторой конечной отрицательной константой $(-a)$. Интегрирование по углам ω можно провести, воспользовавшись так называемой формулой Пишетти [14]. А именно, можно показать, что для произвольной гладкой функции ψ на $\mathbb{R}^m$

$$\int \psi(r, \omega) d\omega = \Omega_m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k \psi(0)}{2^{2k} k! \Gamma(k + m/2)} r^{2k}, \quad \Omega_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}. \quad (103)$$

В нашем случае $m = n - 1$. Обозначая коэффициент при r^{2k} через α_k^m , преобразуем интеграл (102) к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{n-1} \int_{-a}^{-\sqrt{\xi}} dt_0 \Delta^k f(t_0, 0) (t_0^2 - \xi)^{(n-3)/2+k}. \quad (104)$$

Разлагая далее подынтегральное выражение в ряд по t_0 , после замены переменной $t_0 \rightarrow -(t_0/\sqrt{\xi})$ получим

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \alpha_k^{n-1}}{s!} \partial_0^s \Delta^k f(0) \xi^{(n-2+s)/2+k} \int_1^{a/\sqrt{\xi}} dt_0 t_0^{n-3+s+2k} (1 - t_0^{-2})^{(n-3)/2+k} \quad (105)$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned} & \sum_{k,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \alpha_k^{n-1}}{s!} \partial_0^s \Delta^k f(0) \xi^{(n-2+s)/2+k} \times \\ & \times \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \mu_l^{(n-3)/2+k}}{n-2+s+2k-2l} \left[\left(\frac{a}{\sqrt{\xi}} \right)^{n-2+s+2k-2l} - 1 \right] + \right. \\ & \left. + \operatorname{Re}(-1)^{(n-2+s)/2+k} \mu_{(n-2+s)/2+k}^{(n-3)/2+k} \ln \left(\frac{a}{\sqrt{\xi}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (106)$$

где штрих означает, что суммирование ведется по всем l , для которых знаменатель отличен от нуля. Последнее слагаемое в фигурных скобках присутствует, только если $n+s$ четно. Кроме того, было введено обозначение

$$\mu_l^\gamma = \frac{\gamma(\gamma-1) \dots (\gamma-(l-1))}{l!}. \quad (107)$$

Заметим, что первое слагаемое в квадратных скобках, а также слагаемое с $\ln a$ не вносят вклада в расходимости, поскольку стоят при целых неотрицательных степенях ξ . В дальнейшем мы их рассматривать не будем. Остаточное выражение преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & - \sum_{k,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \alpha_k^{n-1}}{s!} \partial_0^s \Delta^k f(0) \xi^{(n-2+s)/2+k} \times \\ & \times \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \mu_l^{(n-3)/2+k}}{n-2+s+2k-2l} + \operatorname{Re} \frac{(-1)^{(n-2+s)/2+k}}{2} \mu_{(n+s)/2+k-1}^{(n-3)/2+k} \ln \xi \right\}. \end{aligned} \quad (108)$$

Сумма по l выражается через значение гипергеометрической функции в единице [19]:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \mu_l^{(n-3)/2+k}}{n-2+s+2k-2l} = \frac{F\left(-\frac{n-3}{2}-k, -\frac{n+s}{2}-k+1; -\frac{n+s}{2}-k+2; 1\right)}{n-2+s+2k}. \quad (109)$$

Известно, что при четном n и нечетном s это значение равно нулю. Согласно определению (107) последнее слагаемое в фигурных скобках в выражении (108) отлично от нуля, только если числа n и s одновременно четные. Что же касается первого слагаемого, то при нечетном n вклад в расходимости дают лишь члены с четным числом производных по t_0 от функции $f(t)$.

Таким образом, при четном n расходимости появляются за счет последнего слагаемого в фигурных скобках, а при нечетном n – за счет первого. При этом в обоих случаях отсутствуют вклады с нечетным числом производных по t_0 . С учетом последнего замечания громоздкая и нековариантная формула (108) может быть приведена к явно ковариантному виду (24), (25).

Благодарности. Авторы благодарны И. В. Горбунову и С. Л. Ляховичу за проявленный интерес к работе и критические замечания. Работа поддержана грантом РФФИ № 03-02-17657, грантом Министерства образования РФ № 02-3.1-250 и грантом Президента РФ НШ-1743.2003.2. Мы также признательны за финансовую поддержку фонду некоммерческих программ “Династия” и Международному центру фундаментальной физики в Москве.

Список литературы

- [1] Г. А. Лоренц. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. М.: Гостехтеориздат, 1956.
- [2] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London A. 1938. V. 167. P. 148.
- [3] B. S. DeWitt, R. W. Brehme. Ann. Phys. 1960. V. 9. P. 220.
- [4] A. O. Barut, N. Unal. Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 5404; P. E. G. Rowe, G. T. Rowe. Phys. Rep. 1987. V. 149. P. 287.
- [5] Б. П. Косяков. ТМФ. 1999. Т. 119. С. 119.
- [6] P. O. Kazinski, S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov. Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 025017.
- [7] P. O. Kazinski, A. A. Sharapov. Class. Q. Grav. 2003. V. 20. P. 2715.
- [8] E. Poisson. Living Rev. Relativity. 2004. V. 7. P. Irr-2004-6; gr-qc/0306052.
- [9] J. M. Quashnock, D. N. Spergel. Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 2505; A. Dabholkar, J. M. Quashnock. Nucl. Phys. B. 1990. V. 333. P. 815; A. O. Barut, P. A. Pavšič. Phys. Lett. B. 1994. V. 331. P. 45; R. A. Battye, E. P. S. Shellard. Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4354; Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 1811.
- [10] A. Buonanno, T. Damour. Phys. Lett. B. 1998. V. 432. P. 51.
- [11] B. Carter, R. A. Battye, J.-P. Uzan. Commun. Math. Phys. 2003. V. 235. P. 289.
- [12] R. A. Battye, B. Carter, A. Mennim. Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 201305.
- [13] J. W. van Holten. Nucl. Phys. B. 1998. V. 529. P. 525.
- [14] Р. Курант. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
- [15] Б. С. ДеВитт. Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987.
- [16] А. З. Петров. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961.
- [17] Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 211.
- [18] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев. Обобщенные функции и действия над ними. Т. 1. М.: Физматлит, 1959.
- [19] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962.

Поступила в редакцию 3.XI.2004 г.