Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, Возмущение резонансов и собственных значений на непрерывном спектре оператора Шредингера для кристаллической пленки, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 3, 417–430

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1822>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:34:46

© 2005 г.

Ю. П. Чубурин*

ВОЗМУЩЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НА НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ

Для резонансов и собственных значений на непрерывном спектре получены формулы, подобные формулам обычной теории возмущений. Доказано, что хотя мнимая часть поправки первого порядка собственного значения на непрерывном спектре равна нулю, но возмущенная собственная функция, как правило, перестает быть квадратично суммируемой.

Ключевые слова: оператор Шредингера, теория возмущений, резонанс, собственное значение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим оператор Шредингера $H = H_0 + V(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, с вещественным потенциалом $V(x) \neq 0$, периодическим по переменным x_1, x_2 с периодом единица и удовлетворяющим оценке

$$|V(x)| \leq C e^{-a|x_3|}, \quad (1)$$

где $a > 0$. Оператор H разлагается в прямом интеграле пространств $\int_{\Omega^*}^{\oplus} L^2(\Omega) dk_{\parallel}$ по операторам $H(k_{\parallel}) = -\Delta + V(x)$, определенными на блоховских по переменным x_1, x_2 функциях (см. [1], [2]). Здесь $\Omega = [0, 1)^2 \times \mathbb{R}$ и $\Omega^* = [-\pi, \pi)^2$ — ячейки в прямой и обратной решетках, $k_{\parallel} \in \Omega^*$ — квазиимпульс, блоховские функции — это сужения на Ω функций ψ , определенных на $\mathbb{R}^3$ и удовлетворяющих соотношениям

$$\psi(x + (n_{\parallel}, 0)) = e^{i(k_{\parallel}, n_{\parallel})} \psi(x), \quad n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2.$$

Существенный спектр оператора $H(k_{\parallel})$ совпадает с $[k_{\parallel}^2, \infty)$, т.е. со спектром оператора $H_0(k_{\parallel})$ [3]. Обозначим через $R_0(k_{\parallel}, E) = (H_0(k_{\parallel}) - E)^{-1}$ резольвенту оператора

*Физико-технический институт УрО РАН, Ижевск, Россия. E-mail: chuburin@otf.pti.udm.ru

$H_0(k_{\parallel}) = -\Delta$, а через $R(k_{\parallel}, E) = (H(k_{\parallel}) - E)^{-1}$ – резольвенту оператора $H(k_{\parallel})$. Ядро резольвенты $R_0(k_{\parallel}, E)$ имеет вид [4]

$$G_0(x - y, k_{\parallel}, E) = - \sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2} \frac{\exp\left\{i\left((k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, \sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2}), (x_{\parallel} - y_{\parallel}, |x_3 - y_3|)\right)\right\}}{2i\sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2}}, \quad (2)$$

где под $\sqrt{z}$ для $z = \rho e^{i\phi}$ понимаем $\sqrt{\rho}e^{i\phi/2}$.

В настоящей работе строится единая теория возмущений для резонансов, а также для собственных значений, находящихся на непрерывном спектре, оператора $H(k_{\parallel})$. Полученные формулы достаточно просты и удобны для использования, а в случае собственных значений переходят в обычные формулы теории возмущений (в отличие от некоторых примеров в [5]). Отсюда вытекает, что поправка первого порядка малости к невозмущенному собственному значению, лежащему на непрерывном спектре, вещественна. Однако, данное собственное значение при возмущении превращается в общем положении в резонанс. В статье приведено условие, при выполнении которого поправка первого порядка малости к соответствующей невозмущенной собственной функции остается лежать в $L^2(\Omega)$.

Ранее в книге [6] (см. главу 3) была получена формула для возмущенного резонанса в случае центрально-симметричного потенциала. В работе [7] исследовано поведение собственных значений (превращающихся в резонансы) на границе непрерывного спектра для потенциала, экспоненциально убывающего при $|x| \rightarrow \infty$. Аналогичное исследование для периодического потенциала, возмущенного функцией, периодической по двум переменным и убывающей по третьей переменной, проведено в статье [8]. Общие результаты, относящиеся к возмущениям операторов, проблемам алгебраической и геометрической кратности резонансов и возможности их разложения в ряды Пуизё по малому параметру см. в работах [5], [9]. В статьях [10], [11] (см. также [12], Приложение В) изучаются кратности резонансов, а также их асимптотика в терминах модифицированных определителей Фредгольма операторов, естественно возникающих при определении резонансов (см. замечание 1).

Через C , c_0 и т.п. в статье обозначаются константы.

2. ПОНЯТИЕ РЕЗОНАНСА

Уравнение на собственные значения $H(k_{\parallel})\psi = E\psi$ для оператора $H(k_{\parallel})$ заменим для $E < k_{\parallel}^2$ эквивалентным уравнением $\psi = -R_0(k_{\parallel}, E)V\psi$ или, полагая $\phi = \sqrt{|V|}\psi$, уравнением

$$\phi(x) = - \int_{\Omega} \sqrt{|V(x)|} G_0(x - y, k_{\parallel}, E) \sqrt{|V(y)|} \phi(y) dy, \quad (3)$$

где $\sqrt{V} = \text{sgn } V \cdot \sqrt{|V|}$.

Предположим, что

$$k_{\parallel}^2 < \text{Re } E < (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2, \quad n_{\parallel} \neq 0. \quad (4)$$

Положим $k_3 = \sqrt{E - k_{\parallel}^2}$, тогда

$$\sqrt{|V(x)|}G_0(x - y, k_{\parallel}, E)\sqrt{V(y)} = \sqrt{|V(x)|}G_0(x - y, k)\sqrt{V(y)} \quad (5)$$

оказывается мероморфной $L^2(\Omega \times \Omega)$ -значной функцией параметра k_3 с полюсом порядка единица в нуле [4]. При этом величинам k_3 с положительной мнимой частью отвечает $E = k_{\parallel}^2 + k_3^2$ на первом листе римановой поверхности функции G_0 и, вместе с тем, экспоненциальное убывание G_0 при $|x_3 - y_3| \rightarrow \infty$, а величинам k_3 с отрицательной мнимой частью отвечает E на втором (“нефизическом”) листе и экспоненциальное возрастание G_0 при $|x_3 - y_3| \rightarrow \infty$ (см. в [4] свойства функции G_0). Убывание или возрастание G_0 приводит в силу равенства

$$\psi(x) = - \int_{\Omega} G_0(x - y, k)V(y)\psi(y) dy \quad (6)$$

к экспоненциальному убыванию или возрастанию при $|x_3| \rightarrow \infty$ (такому же, как у $e^{i(k_{\parallel}, |x_3|)}$) ненулевых решений уравнения (6) (см. [4], [13]). При этом вследствие самосопряженности оператора $H(k_{\parallel})$ убывающим решениям отвечают $E \in \mathbb{R}$. В случае возрастающих решений E называют резонансом; при этом величина $\text{Im } E \neq 0$, обратная времени жизни резонансного состояния [6], и, следовательно, величина $\text{Im } k_3$ должны быть достаточно малыми. Поэтому уравнение (3), рассматриваемое в классе $L^2(\Omega)$, в силу оценки (1) позволяет находить как собственные значения, так и резонансы. В случае $\text{Re } E > (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}^{(0)})^2$, где значение $n_{\parallel}^{(0)} \neq 0$ доставляет минимум разности $\text{Re } E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}^{(0)})^2$ среди всех таких неотрицательных разностей, полагаем $k_3 = \sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}^{(0)})^2}$ и приходим к тем же утверждениям, что и выше. В этом случае выкладки несколько более громоздкие, поэтому в дальнейшем для простоты предполагаем, что выполнено условие (4).

С учетом вышесказанного и специфики функции G_0 в “плёночном” случае следующее определение резонанса согласуется с обычными определениями, приведенными в книгах [6], [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем *резонансом* такое значение k_3 (или соответствующее значение E), для которого имеет место неравенство $\text{Im } k_3 < 0$ и существует ненулевое решение $\phi \in L^2(\Omega)$ уравнения (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *уровнем* собственное значение или резонанс.

Уравнение, сопряженное к (3), имеет вид

$$\phi^*(x) = - \int_{\Omega} \sqrt{V(x)}G_0^-(x - y, k^*)\sqrt{|V(y)|}\phi^*(y) dy, \quad (7)$$

где $k^* = (k_{\parallel}, \overline{k_3})$, и в случае $n_{\parallel} = 0$ G_0^- по сравнению с G_0 из формулы (2) имеет корни противоположного знака. Вследствие теоремы Фредгольма пространства решений

уравнений (3) и (7) имеют одну и ту же размерность $d < \infty$ – (геометрическую) кратность уровня.

В дальнейшем через $\sqrt{|V|}R_0(k)\sqrt{V}$ будем обозначать не только “окаймленную” резольвенту оператора $H_0(k_{\parallel})$, но и, в более общем смысле, компактный оператор с ядром (5), который определен как оператор в $L^2(\Omega)$, в частности, в точках k_3 , соответствующих значениям E из окрестности множества $[k_{\parallel}^2, \infty) \setminus \{(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2, n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2\}$ [4].

Вследствие резольвентного тождества

$$1 - \sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V} = (1 + \sqrt{|V|}R_0(k)\sqrt{V})^{-1} \quad (8)$$

и аналитической теоремы Фредгольма [14] операторнозначная функция $\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}$ мероморфно продолжается в окрестности точек k_3 , для которых соответствующие значения E принадлежат существенному спектру $[k_{\parallel}^2, \infty)$ оператора $H(k_{\parallel})$; значения данной функции остаются компактными операторами, которые будем обозначать тем же символом. При этом всякий уровень k_3 является полюсом мероморфной по k_3 операторнозначной функции $\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}$, причем коэффициенты при отрицательных степенях ее разложения в ряд Лорана – это операторы конечного ранга [14].

Всюду в дальнейшем, за исключением раздела 4 и теоремы 7, предполагаем, что полюс функции $\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}$ в точке резонанса $k_3 = k_3^{(0)}$ имеет порядок единица (достаточные условия этого см. в замечании 1 и в теоремах 3, 7), так что

$$\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V} = \frac{1}{k_3 - k_3^{(0)}} \sum_{n=1}^{n_0} c_n(\cdot, \phi_n^*)\phi_n + Q(k); \quad (9)$$

здесь c_n , $n = 1, \dots, n_0$ – некоторые константы; $Q(k)$ – аналитическая по k_3 в окрестности точки $k_3^{(0)}$ операторнозначная функция; как функции $\{\phi_n^*\}_{n=1}^{n_0}$, так и функции $\{\phi_n\}_{n=1}^{n_0}$ будем без ограничения общности считать линейно независимыми. Положим $k_0 = (k_{\parallel}, k_3^{(0)})$.

ЛЕММА 1. *Функции ϕ_n являются решениями уравнения (3) в точке k_0 , а функции ϕ_n^* – решениями сопряженного уравнения (7) в точке k_0^* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (8), (9)

$$(1 + \sqrt{|V|}R_0(k)\sqrt{V})^{-1} = 1 - \frac{1}{k_3 - k_3^{(0)}} \sum_{n=1}^{n_0} c_n(\cdot, \phi_n^*)\phi_n - Q(k). \quad (10)$$

Вследствие (4) резольвента $R_0(k)$ аналитична в окрестности точки $k_3^{(0)}$. Умножая обе части равенства (10) слева на $(k_3 - k_3^{(0)})(1 + \sqrt{|V|}R_0(k)\sqrt{V})$ и переходя к пределу при $k_3 \rightarrow k_3^{(0)}$, получаем соотношение

$$\sum_{n=1}^{n_0} c_n(\cdot, \phi_n^*)(1 + \sqrt{|V|}R_0(k)\sqrt{V})\phi_n = 0,$$

откуда следует требуемый результат для функций ϕ_n . Для доказательства аналогичного утверждения для функций ϕ_n^* нужно обе части равенства (10) умножить на $(k_3 - k_3^{(0)})(1 + \sqrt{|V|}R_0(k)\sqrt{V})$ справа. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо неравенство $n_0 \leq d$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Функции ψ_n , ψ_n^* , определяемые равенствами $\sqrt{|V|}\psi_n = \phi_n$, $\sqrt{V}\psi_n^* = \phi_n^*$ и уравнениями (3), (7), удовлетворяют уравнениям Шредингера $H(k_{\parallel})\psi_n = E_0\psi_n$, $H(k_{\parallel})\psi_n^* = E_0^*\psi_n^*$, где $E = k_0^2$, $E^* = k_0^{*2}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уровни определяются уравнением вида $\Delta(k) = 0$, где $\Delta(k)$ не равна тождественно нулю по k_3 , является аналитической функцией аргумента k [4], [14] и с точностью до умножения на ненулевую аналитическую функцию совпадает с (регуляризованным) определителем Фредгольма $\det_2(1 + \sqrt{|V|}R_0(k)\sqrt{V})$ (см. [15]). Согласно определению из книги [12] алгебраическая кратность κ резонанса (уровня) есть порядок нуля по k_3 определителя Фредгольма или, что то же самое, порядок нуля функции $\Delta(k)$ в точке $k_3^{(0)}$. Вследствие подготовительной теоремы Вейерштрасса [16] в окрестности $k_3^{(0)}$ имеется κ , возможно, сливающихся уровней. Наконец, из доказательства аналитической теоремы Фредгольма [14] вытекает, что порядок полюса резольвенты $R(k)$ в точке $k_3^{(0)}$ не превосходит κ (см. также [9]).

Заметим, что у уровней нет конечных точек сгущения. Это вытекает из мероморфной теоремы Фредгольма [1] и результата работы [4] о малости функции $\sqrt{|V|}G_0\sqrt{V}$ при некоторых k .

3. ВОЗМУЩЕНИЕ УРОВНЕЙ КРАТНОСТИ ЕДИНИЦА

В этом разделе полагаем $d = 1$. Тогда (см. предыдущий раздел)

$$\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V} = \frac{c_0(\cdot, \phi_0^*)\phi_0}{k_3 - k_3^{(0)}} + Q(k). \quad (11)$$

Заметим, что из этого равенства для достаточно малых $\epsilon > 0$ вытекает формула

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i \|\phi_0^*\|^2 \|\phi_0\|^2} \int_{|k_3 - k_3^{(0)}| = \epsilon} (\phi_0, \sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}\phi_0^*) dk_3. \quad (12)$$

По поводу вычисления c_0 в частном случае см. теорему 3 ниже.

Введем обозначения:

$$H_1 = \{\sqrt{V}\psi: \psi \in L^2(\Omega)\}, \quad H_{-1} = \{\psi: \sqrt{V}\psi \in L^2(\Omega)\}.$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что $W(x)$ — вещественная функция такая, что $W(x)/V(x) \in L^\infty(\Omega)$. Положим $H_\epsilon(k_{\parallel}) = H(k_{\parallel}) + \epsilon W(x)$.

ЛЕММА 2. *Пусть $\epsilon \neq 0$ вещественно. Тогда если*

$$k_3^2 \neq (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 - k_{\parallel}^2, \quad n_{\parallel} \in \mathbb{Z},$$

то всякое решение из H_{-1} уравнения

$$\psi = -\epsilon R(k)W\psi \quad (13)$$

является решением уравнения

$$\psi = -R_0(k)(V + \epsilon W)\psi. \quad (14)$$

Если k_3 к тому же не является уровнем оператора $H(k_{\parallel})$, то уравнения (13) и (14) эквивалентны в классе функций H_{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы $\sqrt{|V|}R_0(k)\sqrt{V}$, $\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}$ действуют в $L^2(\Omega)$, поэтому $R_0(k)$, $R(k)$ можно рассматривать как операторы, действующие из H_1 в H_{-1} . Следовательно, преобразуемый ниже оператор действует в H_{-1} :

$$\begin{aligned} 1 + R_0(k)(V + \epsilon W) &= (1 + R_0(k)V)(1 + \epsilon(1 + R_0(k)V)^{-1}R_0(k)W) = \\ &= (1 + R_0(k)V)(1 + \epsilon R(k)W). \end{aligned}$$

Из полученного равенства вытекает доказываемое утверждение.

Везде в дальнейшем предполагаем, что $k_3^2 \neq (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 - k_{\parallel}^2$, $n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2$, а там, где говорится о возмущенном функцией ϵW уровне, в качестве уравнения, определяющего уровни, используем уравнение (13).

Делая в (13) замену $\phi_1 = \sqrt{|W|}\psi$, получаем уравнение

$$\phi_1 = -\epsilon\sqrt{|W|}R(k)\sqrt{W}\phi_1, \quad (15)$$

которое будем рассматривать в классе $L^2(\Omega)$. Функции ψ такие, что $\sqrt{|W|}\psi \in L^2(\Omega)$, образуют, вообще говоря, более широкий класс, чем H_{-1} , но это не приводит к расширению понятия уровня, поскольку в силу (13) функция ψ , отвечающая решению ϕ_1 , принадлежит классу H_{-1} и согласно лемме 2 определяет уровень.

В следующей теореме функции ψ_0 , ψ_0^* определяются, как в следствии 2 для $n_0 = 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $k_3^{(0)}$ является уровнем геометрической кратности единица оператора $H(k_{\parallel})$. Тогда для всех достаточно малых ϵ существует уровень $k_3^{(\epsilon)} = k_3^{(\epsilon)}(k_{\parallel})$ оператора $H_{\epsilon}(k_{\parallel})$ геометрической кратности единица, аналитически зависящий от ϵ , причем*

$$k_3^{(\epsilon)} = k_3^{(0)} - \epsilon c_0(W\psi_0, \psi_0^*) + o(\epsilon) \quad (16)$$

и, соответственно, для $E_{\epsilon} = k_{\parallel}^2 + (k_3^{(\epsilon)})^2$

$$E_{\epsilon} = E_0 - 2\epsilon c_0 k_3^{(0)}(W\psi_0, \psi_0^*) + o(\epsilon), \quad (17)$$

где c_0 определяется равенством (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (15), (11) получаем, полагая $v = \sqrt{W/V}$, уравнение, определяющее уровни для $\epsilon \neq 0$,

$$\phi_1 = -\epsilon|v|\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}v\phi_1 = -\frac{\epsilon c_0(v\phi_1, \phi_0^*)|v|\phi_0}{k_3 - k_3^{(0)}} - \epsilon|v|Q(k)v\phi_1. \quad (18)$$

Отсюда находим алгебраическое уравнение, определяющее уровни,

$$k_3 = k_3^{(0)} - \epsilon c_0((1 + \epsilon|v|Q(k)v)^{-1}(|v|\phi_0), v\phi_0^*). \quad (19)$$

Операторнозначную функцию

$$(1 + \epsilon|v|Q(k)v)^{-1} \quad (20)$$

можно разложить в равномерно сходящийся ряд по степеням ϵ . Вследствие теоремы Вейерштрасса об аналитичности равномерно сходящегося ряда из аналитических функций правая часть равенства (19) представляет собой аналитическую функцию по совокупности переменных (k_3, ϵ) . Из теоремы о неявной функции [16] и соотношения (19) для достаточно малых ϵ вытекает существование решения данного уравнения $k_3 = k_3^{(\epsilon)}$, аналитически зависящего от ϵ . Формула (16) следует из (19) и упомянутого разложения выражения функции (20) в ряд. Кратность уровня $k_3^{(\epsilon)} \neq k_3^{(0)}$ равна единице в силу (18). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что геометрическая кратность уровня $k_3^{(0)}$ равна единице. Тогда общее решение ψ в классе H_{-1} уравнения (15) для всех достаточно малых $|\epsilon|$ имеет вид*

$$\psi = C(\psi_0 - \epsilon Q_0(k)(W\psi_0)) + o(\epsilon), \quad (21)$$

где $Q_0(k) = |V|^{-1/2}Q(k)V^{-1/2}$, а $Q(k)$ определяется равенством (11) (из этого равенства видно, что умножение на $|V|^{-1/2}$ и $V^{-1/2}$ имеет смысл); $o(\epsilon)$ понимается в смысле $\|\sqrt{W}o(\epsilon)\|\epsilon^{-1} \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие уравнения (18) имеем

$$\phi_1 = C(1 - \epsilon|v|Q(k)v)(|v|\phi_0) + o(\epsilon),$$

откуда после перехода к функциям ψ и ψ_0 и вытекает утверждение теоремы.

4. ВОЗМУЩЕНИЕ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ КРАТНОСТИ ЕДИНИЦА НА НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

ЛЕММА 3. *Пусть значение E вещественно и не совпадает с $(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2$, $n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2$. Блоховская по переменным x_1, x_2 функция ψ такая, что $\sqrt{V}\psi \in L^2(\Omega)$, удовлетворяет уравнению Шредингера $(-\Delta + V)\psi = E\psi$ тогда и только тогда, когда ψ удовлетворяет уравнению*

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int_{\Omega} G_0(x - y, k_{\parallel}, E)V(y) dy, \quad (22)$$

где

$$\psi_0(x) = \sum_{\substack{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 > 0 \\ j=1,2}} c_{n_{\parallel}}^{(j)} \exp\left\{i\left(\left(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, (-1)^j \sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2}\right), x\right)\right\}.$$

При этом

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \sum_{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 > 0} a_{n_{\parallel}}^{(l)} \exp\left\{i\left(\left(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, (-1)^l \sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2}\right), x\right)\right\} + \eta(x),$$

где

$$a_{n_{\parallel}}^{(l)} = \frac{1}{2i\sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2}} \times \\ \times \int_{\Omega} \exp\left\{i\left((k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, (-1)^{l+1}\sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2}, x\right)\right\} V(x)\psi(x) dx;$$

здесь $l = 0$ для $x_3 > 0$ и $l = 1$ для $x_3 < 0$, а функция $\eta(x)$ удовлетворяет оценке

$$|\eta(x)| \leq Ce^{-b|x_3|}, \quad b > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство первого утверждения леммы проводится стандартно, доказательство второго утверждения содержится в доказательстве теоремы 2 в [4].

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях леммы 3 включение $\psi \in L^2(\Omega)$, во-первых, эквивалентно тому, что $\psi_0 = 0$, и во-вторых, эквивалентно тому, что $a_{n_{\parallel}}^{(l)} = 0$ для $l = 0, 1$ и всех $n_{\parallel}$ таких, что $E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 > 0$.

ЛЕММА 4. Пусть в условиях леммы 3 $E > k_{\parallel}^2$ и $c_{n_{\parallel}}^{(1)} = 0$ для всех $n_{\parallel}$ таких, что $E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 > 0$. Тогда

$$\sum_{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 > 0} \sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2} (|a_{n_{\parallel}}^{(1)}|^2 + |c_{n_{\parallel}}^{(0)} + a_{n_{\parallel}}^{(0)}|^2 - |c_{n_{\parallel}}^{(0)}|^2) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3 и результатов работы [17] (см. теорему 2.7) вытекает, что

$$\left\| \frac{\partial \eta}{\partial x_3}(x + (0, 0, n_3)) \right\|_{L^2(0,1)^3} \rightarrow 0, \quad |n_3| \rightarrow \infty.$$

Требуемое утверждение теперь легко получить, применяя формулы Грина.

СЛЕДСТВИЕ 4. Всякий вещественный уровень является собственным значением.

ЛЕММА 5. Пусть $E > k_{\parallel}^2$, ψ – решение уравнения (22) при $\psi_0 = 0$, принадлежащее тому же классу, что и в лемме 3. Тогда имеет место оценка

$$|\psi(x)| \leq Ce^{-\delta|x_3|},$$

где $\delta = \min\{a, \sigma\}$, значение a взято из неравенства (1), а $\sigma > 0$ зависит лишь от $k_{\parallel}$ и E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем включение $\psi_0 \in L^\infty(\Omega)$ (доказательство см. в [4]). Согласно лемме 4 $a_{n_\parallel}^{(j)} = 0$ для $j = 0, 1$ и всех $n_\parallel$ таких, что $E - (k_\parallel + 2\pi n_\parallel)^2 > 0$. Далее оцениваем модуль $\psi(x)$ через правую часть уравнения (22), пользуясь равенством Парсеваля при оценке интеграла по $y_\parallel$; начиная с достаточно больших $|n_\parallel|$ сумму по $n_\parallel \in \mathbb{Z}^2$ следует заменить интегралом. Полученные в результате интегралы оцениваются элементарно (см. подобные выкладки в [4]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $E_0 > k_\parallel^2$ – собственное значение кратности единица. Предположим, что выполняются неравенства

$$C_1 e^{-b|x_3|} \leq |V(x)| \leq C_2 e^{-a|x_3|},$$

где $0 < b/2 < a \leq b < 2\sigma$ (σ взято из леммы 5). Тогда операторнозначная функция $\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}$ в окрестности точки $k_3^{(0)} = \sqrt{E_0 - k_\parallel^2}$ имеет вид

$$\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V} = -\frac{(\cdot, \phi_0^*)\phi_0}{2k_3^{(0)}(k_3 - k_3^{(0)})} + Q(k),$$

где $Q(k)$ аналитически зависит от k_3 , $\phi_0 = \sqrt{|V|}\psi_0$, $\phi_0^* = \sqrt{V}\psi_0$, а $\psi_0 \in L^2(\Omega)$ – нормированная собственная функция оператора $H(k_\parallel)$, отвечающая собственному значению E_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через P_p и P_c ортопроекторы на подпространства $\mathcal{H}_p$ и $\mathcal{H}_c$, соответственно, отвечающие точечному и непрерывному спектру оператора $H(k_\parallel)$ [18]. Для E из резольвентного множества оператора $H(k_\parallel)$ имеем

$$\begin{aligned} R(k_\parallel, E) &= R(k) = R(k)P_p + R(k)P_c = \\ &= \frac{(\cdot, \psi_0)\psi_0}{E_0 - E} + Q_p(k_\parallel, E) + R(k_\parallel, E)P_c, \end{aligned} \quad (23)$$

где $Q_p(k_\parallel, E)$ – ортопроектор на собственные векторы, отличные от ψ_0 . Поскольку уровни не имеют точек сгущения (см. раздел 2), Q_p аналитически зависит от E в окрестности E_0 . Далее, из (23) получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V} &= -\frac{(\cdot, \phi_0^*)\phi_0}{2k_3^{(0)}(k_3 - k_3^{(0)})} + \frac{(\cdot, \phi_0^*)\phi_0}{2k_3^{(0)}(k_3 + k_3^{(0)})} + \\ &+ \sqrt{|V|}Q_p(k)\sqrt{V} + \sqrt{|V|}R(k)P_c\sqrt{V}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\phi_0 = \sqrt{|V|}\psi_0$, $\phi_0^* = \sqrt{V}\psi_0$, а все слагаемые в правой части (24) суть мероморфные функции с вычетами, являющимися операторами конечного ранга. Достаточно доказать, что операторнозначная функция $\sqrt{|V|}R(k)P_c\sqrt{V}$ не может иметь полюса в точке $k_3^{(0)}$. В предположении противного

$$\sqrt{|V|}R(k)P_c\sqrt{V} = \sum_{m=1}^{m_0} \frac{P_m}{(k_3 - k_3^{(0)})^m} + Q_c(k), \quad (25)$$

где P_m , $m = 1, \dots, m_0$, суть операторы конечного ранга, а $Q_c(k)$ аналитична в окрестности $k_3^{(0)}$. В силу известной оценки для резольвенты самосопряженного оператора для любых $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Omega)$ справедливы неравенства

$$(\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}\psi_1, \psi_2) \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} E|} \leq \frac{C_1}{|\operatorname{Im} k_3|}.$$

Отсюда и из (25) получаем, что $m_0 = 1$. Далее, из (24), (25) и леммы 1 вытекает, что

$$\sqrt{|V|}R(k)P_c\sqrt{V} = C_0 \frac{(\cdot, \phi_0^*)\phi_0}{k_3 - k_3^{(0)}} + Q_c(k),$$

откуда

$$R(k)P_c = C_0 \frac{(\cdot, \psi_0)\psi_0}{k_3 - k_3^{(0)}} + \frac{1}{\sqrt{|V|}}Q_c(k)\frac{1}{\sqrt{V}}. \quad (26)$$

В силу леммы 5 и условия теоремы

$$\frac{|\psi_0(x)|}{\sqrt{|V(x)|}} \leq C e^{(b/2 - \delta)|x_3|},$$

причем $b/2 - \delta < 0$. Следовательно, $\psi_0 \in H_1$. Положив $E = E' + i\epsilon$, где $E' > k_{\parallel}^2$, $\epsilon > 0$, и переходя к пределу в (26) на элементе ψ_0 при $\epsilon \rightarrow 0$ (операторы в (26) можно рассматривать, в том числе и для $\epsilon = 0$, $E' \neq E_0$, как операторы из H_1 в H_{-1} , см. выше), получим равенство $(R(k)P_c)\psi_0 = 0$ для $k_3 > 0$. Отсюда вследствие (26) и аналитичности $Q_c(k)$ имеем равенство $C_0 = 0$, что и доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 5. В условиях теоремы 3 $c_0 = -(2k_3^{(0)})^{-1}$, так что формула (17) превращается в обычную формулу теории возмущений.

СЛЕДСТВИЕ 6. В силу (17) имеем $\operatorname{Im} E_\epsilon = o(\epsilon^2)$. Таким образом, время жизни резонансного состояния [6] есть $O(\epsilon^{-2})$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\psi_0 = \psi_0(x, k_{\parallel}) \in L^2(\Omega)$ – собственная функция оператора $H(k_{\parallel})$, отвечающая собственному значению $E_0 > k_{\parallel}^2$ кратности единица. Тогда первая по порядку малости ϵ поправка

$$\psi_1 = -\epsilon Q_0(k)(W\psi_0)$$

к ψ_0 (см. теорему 2) принадлежит $L^2(\Omega)$ в том и только в том случае, когда

$$\int_{\Omega} W(x)\psi_0(x, k_{\parallel})\overline{\psi^{\pm}(x, k)} dx = 0,$$

где $\psi^{\pm}(x, k)$ удовлетворяют уравнениям типа Липпмана–Швингера

$$\psi^{\pm}(x, k) = e^{i(k^{\pm}, x)} - \int_{\Omega} G_0(x - y, k^{\pm})V(y)\psi^{\pm}(y, k) dy, \quad k^{\pm} = (k_{\parallel}, \pm k_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь формулой (11), условие

$$\psi_1 = -\epsilon \frac{1}{\sqrt{|V|}} Q(k) \frac{1}{\sqrt{V}} (W \psi_0) = - \left(R(k) - c_0 \frac{(\cdot, \psi_0) \psi_0}{k_3 - k_3^{(0)}} \right) (W \psi_0) \in L^2(\Omega)$$

перепишем в виде

$$R(k)(W \psi_0) \in L^2(\Omega). \quad (27)$$

Имеем

$$\begin{aligned} R(k)W \psi_0 &= (R_0(k) - R_0(k)V R(k))(W \psi_0) = \\ &= R_0(k)(1 - V R(k))(W \psi_0). \end{aligned}$$

Следовательно (см. доказательство леммы 3), условие (27) имеет место тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\int_{\Omega} e^{-i(k^{\pm}, x)} (1 - V R(k))(W \psi_0) dx = 0. \quad (28)$$

Выполним преобразования

$$\begin{aligned} (1 - V R(k))(W \psi_0) &= \sqrt{V} (1 - \sqrt{|V|} R(k) \sqrt{V}) (W \psi_0 / \sqrt{V}) = \\ &= \sqrt{V} (1 + \sqrt{|V|} R_0(k) \sqrt{V})^{-1} (W \psi_0 / \sqrt{V}). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (28) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} ((1 + \sqrt{|V|} R_0(k) \sqrt{V})^{-1} (W \psi_0 / \sqrt{V}), \sqrt{V} e^{i(k^{\pm}, x)}) &= \\ = (W \psi_0 / \sqrt{V}, (1 + \sqrt{V} R_0(k^-) \sqrt{|V|})^{-1} (\sqrt{V} e^{i(k^{\pm}, x)})) &= \\ = (\psi_0, W \psi^{\pm}(x, k)) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 4 вытекает, что собственное значение на непрерывном спектре при возмущении превращается, как правило, в резонанс, поскольку возмущенная собственная функция в общем положении не принадлежит $L^2(\Omega)$.

5. УРОВНИ КРАТНОСТИ, БОЛЬШЕЙ ЕДИНИЦЫ

В данном разделе предполагаем, что выполнено (9).

Выберем функции $\psi_n, \psi_n^* \in L^2(\Omega)$, $n = 1, \dots, n_0$, которые обладают свойством $(\psi_n, \phi_m) = \delta_{nm}$, $(\psi_n^*, \phi_m^*) = \delta_{nm}$, где δ_{nm} — символ Кронекера, $n, m = 1, \dots, n_0$. Тогда из (9) получаем формулы для c_n :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|k_3 - k_3^{(0)}| = \epsilon} (\psi_n, \sqrt{|V|} R(k) \sqrt{V} \psi_n^*) dk_3,$$

где $\epsilon > 0$ достаточно мало.

В следующей теореме предполагаем, что функции $\sqrt{W/V} \phi = v \phi_n$, $n = 1, \dots, n_0$, сохраняют линейную независимость. Алгебраическая кратность уровня понимается как порядок нуля $\det_2(1 + \sqrt{|W|} R(k) \sqrt{W})$.

ТЕОРЕМА 5. Оператор $H_\epsilon(k_\parallel)$ имеет в окрестности точки $k_3^{(0)}$ ровно n_0 уровней (возможно, сливающихся для конечного набора значений ϵ), которые разлагаются в ряды Пуизё по ϵ . В точке $k_3^{(0)}$ алгебраическая и геометрическая кратности уровня совпадают и равны n_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 1, имеем уравнение в $L^2(\Omega)$ для определения уровней:

$$\phi_1 = -\frac{\epsilon}{k_3 - k_3^{(0)}} \sum_{n=1}^{n_0} c_n (v\phi_1, \phi_n^*) |v|\phi_n - \epsilon |v|Q(k)v\phi_1. \quad (29)$$

Отсюда получаем линейную систему

$$C_n = -\frac{\epsilon c_n}{k_3 - k_3^{(0)}} \sum_{n'=1}^{n_0} C_{n'} ((1 + \epsilon |v|Q(k)v)^{-1} (|v|\phi_{n'}, v\phi_n^*)), \quad n = 1, \dots, n_0, \quad (30)$$

а также условие существования уровня

$$\det [\delta_{nn'} (k_3 - k_3^{(0)}) + \epsilon c_n ((1 + \epsilon |v|Q(k)v)^{-1} (|v|\phi_{n'}, v\phi_n^*))]_{n,n'=1}^{n_0} = 0. \quad (31)$$

Последнее равенство запишем в виде

$$(k_3 - k_3^{(0)})^{n_0} + \epsilon (k_3 - k_3^{(0)})^{n_0-1} \sum_{n=1}^{n_0} c_n (\psi_{n'}, W\psi_n^*) + o(\epsilon) = 0. \quad (32)$$

Из подготовительной теоремы Вейерштрасса [16] вытекает, что существует n_0 решений этого уравнения, а значит, n_0 уровней в окрестности точки $k_3^{(0)}$. При этом уровни могут сливаться лишь в случае обращения в нуль результата, являющегося ненулевой аналитической функцией аргумента ϵ , откуда следует конечность числа точек слияния в окрестности $\epsilon = 0$. Разложимость решений уравнения (32) в ряды Пуизё вытекает из подготовительной теоремы Вейерштрасса и из утверждений, приведенных в книге [1], раздел 12.

Наконец, согласно рассуждению, приведенному в работе [15], определитель в левой части уравнения (31) с точностью до множителя, являющегося ненулевой аналитической функцией от k_3 , совпадает с $\det_2(1 + \sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V})$ и, кроме того, совпадает с определителем матрицы в доказательстве аналитической теоремы Фредгольма [14], поэтому алгебраическая кратность уровня равна n_0 . С другой стороны, геометрическая кратность d уровня есть n_0 минус ранг упомянутой матрицы [14], т.е. не превосходит n_0 . Но в силу следствия 1 $n_0 \leq d$. Теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $n_0 = 2$, тогда имеет место следующая формула для уровней:

$$k_3^{(1,2)} = k_3^{(0)} + \left(\frac{\epsilon}{2}\right) (-c_1 a_{11} - c_2 a_{22} \pm \sqrt{(c_1 a_{11} - c_2 a_{22})^2 + 4c_1 c_2 |a_{12}|^2}) + o(\epsilon), \quad (33)$$

где $a_{ij} = (\psi_i, W\psi_j)$, $|o(\epsilon)| \leq C\epsilon^2$ равномерно по k_3 из окрестности $k_3^{(0)}$.

ТЕОРЕМА 6. В условиях теоремы 5 общее решение ψ уравнения (15) для всех достаточно малых $|\epsilon|$ имеет вид

$$\psi = \sum_{n=1}^{n_0} C_n \psi_n - \epsilon Q_0(k) \sum_{n=1}^{n_0} C_n W \psi_n + o(\epsilon),$$

где C_n удовлетворяют системе (30), а $o(\epsilon)$ понимается так же, как и в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формул (18) и (29) (см. доказательство теоремы 2).

ТЕОРЕМА 7. Предположим, что собственное значение $E_0 > k_{\parallel}^2$ имеет кратность d . Пусть выполнены условия

$$C_1 e^{-b|x_3|} \leq |V(x)| \leq C_2 e^{-a|x_3|},$$

где $0 < b/2 < a \leq b < 2\sigma$ (σ взято из леммы 5). Тогда операторнозначная функция $\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}$ в окрестности точки $k_3^{(0)} = \sqrt{E_0 - k_{\parallel}^2}$ имеет вид

$$\sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V} = -\frac{\sum_{n=1}^{n_0} (\cdot, \phi_n^*) \phi_n}{2k_3^{(0)}(k_3 - k_3^{(0)})} + Q(k),$$

функция $Q(k)$ аналитически зависит от k_3 , $\phi_n = \sqrt{|V|}\psi_n$, $\phi_n^* = \sqrt{V}\psi_n$, где $\psi_n \in L^2(\Omega)$, $n = 1, \dots, n_0$, — ортонормированный набор собственных функций оператора $H(k_{\parallel})$, отвечающих собственному значению E_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3 с очевидными изменениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Таким образом, в случае $n_0 = 2$ формула (33) дает в условиях теоремы 7 обычную формулу теории возмущений. Поправка первого порядка к собственному значению на непрерывном спектре кратности два вещественна.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Подобно тому, как это сделано в теоремах 1, 2 для поправок первого порядка, из соотношений (19), (21) и (22) легко получить для невырожденного уровня и соответствующего решения уравнения (15) (а также, чуть более сложно, и в случае вырождения) формулы для поправок любого порядка в терминах оператора $Q(k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Результаты разделов 2, 3, 5 (кроме теоремы 7) без существенных изменений переносятся на случай оператора $\Delta + V(x)$, действующего в $L^2(\mathbb{R}^3)$, где $V(x)$ — вещественный потенциал, удовлетворяющий оценке $|V(x)| \leq C e^{-a|x|}$, $a > 0$, возмущение $\epsilon W(x)$ берется такое, что $W/V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, а k_3 заменяется на $k = \sqrt{E}$.

Список литературы

- [1] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [2] *E. B. Davies.* Proc. Cambr. Philos. Soc. 1977. V. 82. P. 327.
- [3] *Ю. П. Чубурин.* ТМФ. 1997. Т. 110. С. 443.
- [4] *Ю. П. Чубурин.* ТМФ. 1987. Т. 72. С. 120.
- [5] *J. S. Howland.* Pacific J. of Math. 1974. V. 55. № 1. P. 157.
- [6] *А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1966.
- [7] *J. Rauch.* J. Funct. Anal. 1980. V. 35. P. 304.
- [8] *Ю. П. Чубурин.* ТМФ. 2001. Т. 126. С. 196.
- [9] *J. S. Howland.* J. of Math. Anal. and Appl. 1971. V. 36. P. 12.
- [10] *S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, W. Kirsch.* J. Operator Theory. 1984. V. 12. P. 101.
- [11] *F. Gesztesy.* Perturbation theory for resonances in terms of Fredholm determinants. In: Resonances – Models and Phenomena. Proc. of the Workshop (Bielefeld, 1984). Lect. Notes in Phys., Eds. S. Albeverio, L. S. Ferreira, L. Streit. Berlin: Springer, 1984. V. 211. P. 78.
- [12] *С. Альбеверлио, Ф. Гестези, Р. Хогг-Крон, Х. Хольден.* Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [13] *М. С. Сметанина, Ю. П. Чубурин.* Вестн. Удм. ун-та. Математика. 2003. С. 19.
- [14] *М. Рид, Б. Саймон.* Современные методы математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [15] *Ю. П. Чубурин.* ТМФ. 1998. Т. 116. С. 134.
- [16] *Р. Ганнинг, Х. Росси.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
- [17] *Х. Цикон, Р. Фрёзе, В. Киш, Б. Саймон.* Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [18] *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию 8.IX.2004 г.,
после доработки 24.I.2005 г.