Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Саичев, С. Г. Уткин, Переход многомерных скачкообразных процессов от аномальной к линейной диффузии, *ТМФ*, 2005, том 143, номер 3, 455–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:47:09

ПЕРЕХОД МНОГОМЕРНЫХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ОТ АНОМАЛЬНОЙ К ЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Рассматриваются многомерные процессы “квазианомальных” случайных блужданий, имеющие линейно-диффузионную асимптотику на больших временах и подчиняющиеся аномально-диффузионным закономерностям на промежуточных (также достаточно больших относительно микроскопических масштабов) временах. Демонстрируется переход скачкообразного процесса от аномальной к линейной диффузии. С помощью численного счета подтверждается справедливость аналитических расчетов для двумерного и трехмерного случаев.

Ключевые слова: аномальная субдиффузия, аномальная супердиффузия, уравнения в частных дробных производных, промежуточная асимптотика, квазианомальные случайные блуждания.

1. ВВЕДЕНИЕ

Главным признаком аномальной диффузии служит нелинейный рост среднего квадрата случайного процесса со временем:

$$\langle X^2(t) \rangle \sim t^\gamma, \quad \gamma \neq 1,$$

характерный, например, для таких физических явлений, как турбулентная диффузия [1], хаотическая динамика гамильтоновых систем [2], [3], перенос заряда в аморфных полупроводниках [4] и др. Динамика подобных явлений адекватно моделируется скачкообразными случайными процессами с теми или иными распределениями $f(\tau)$ интервалов между скачками и распределениями $w(x)$ величины скачков.

Известно также, что аномальная диффузия возникает из-за нарушения центральной предельной теоремы (ЦПТ) или закона больших чисел (ЗБЧ) (см., например, [5]). В свою очередь, неприменимость ЗБЧ обусловлена бесконечностью первых моментов времени ожидания скачков, а нарушение ЦПТ связано с бесконечностью вторых моментов скачков. Эти обстоятельства служат объектом критики теории аномальной диффузии со стороны физиков, справедливо замечающих, что для большинства физических явлений указанные моменты ограничены.

* Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: saichev@hotmail.ru; sergei.utkin@mail.ru

Целью данной работы является демонстрация того факта, что аномальная субдиффузия может возникать и в “классическом случае”, когда ЗБЧ и ЦПТ справедливы. А именно, наряду с детально исследованными “чисто” аномальными диффузионными процессами существуют и “квазианомальные” случайные процессы, подчиняющиеся законам линейной диффузии на очень больших временах и пространственных масштабах, а на “промежуточных” временах демонстрирующие универсальные аномально-диффузионные асимптотики. Данная работа посвящена анализу именно таких квазианомальных случайных процессов в пространствах разной размерности. Обнаружено, в частности, что, в отличие от классической многомерной диффузии, случайные координаты аномально-диффузионного скачкообразного процесса статистически зависимы даже при независимых компонентах векторов случайных скачков.

2. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ

Рассмотрим типичный процесс случайных блужданий, подчиняющийся простейшему стохастическому уравнению

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \sum_k \mathbf{h}_k \delta(t - t_k).$$

Без ограничения общности предположим, что случайные интервалы ожидания скачков $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ и сами случайные скачки $\mathbf{h}_k$ взаимно независимы, а также имеют одинаковые распределения $f(\tau)$ и $w(\mathbf{x})$, соответственно. Очевидно, что

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \mathbf{h}_k,$$

где $N(t)$ — число скачков к моменту t . Это функция, обратная времени n -го скачка $T(n)$:

$$t = T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \sum_{k=1}^n \tau_k, & n \geq 1. \end{cases}$$

Используя очевидное соотношение эквивалентности для этих функций

$$N(t) \geq n \iff T(n) < t$$

и разбиение единицы

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\chi(z - n) - \chi(z - n - 1)], \quad z > 0,$$

где $\chi(z)$ — функция ступеньки, выведем уравнение для характеристической функции рассматриваемого процесса $\mathbf{X}(t)$:

$$\Theta(\mathbf{u}; t) = \langle e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{X}(t)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \exp \left(i\mathbf{u} \sum_{k=1}^n \mathbf{h}_k \right) [\chi(t - T(n)) - \chi(t - T(n+1))] \right\rangle.$$

Применим к обеим частям равенства преобразование Лапласа и просуммируем полученную геометрическую прогрессию:

$$\hat{\Theta}(\mathbf{u}; s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s[1 - \tilde{w}(\mathbf{u})\hat{f}(s)]}. \quad (2.1)$$

Найденное выражение для лаплас-образа $\hat{\Theta}(\mathbf{u}; s)$ характеристической функции представляет собой многомерный аналог уравнения Монролла–Вейсса [3]. Здесь $\hat{f}(s)$ – лаплас-образ распределения интервалов между скачками, а $\tilde{w}(\mathbf{u})$ – характеристическая функция скачков. Из последнего равенства видно, что $\hat{\Theta}(\mathbf{u}; s)$ подчиняется уравнению

$$\frac{1}{\hat{f}(s)} \hat{\Theta}(\mathbf{u}; s) - \tilde{w}(\mathbf{u})\hat{\Theta}(\mathbf{u}; s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s\hat{f}(s)}. \quad (2.2)$$

Применив к нему обратные преобразования Фурье и Лапласа, легко получить (в зависимости от вида распределений $f(\tau)$ и $w(\mathbf{x})$) как классическое уравнение Колмогорова–Феллера, так и кинетические уравнения аномальной диффузии.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БЛУЖДЕНИЙ $\mathbf{X}(t)$

Как уже было отмечено выше, вид уравнения для плотности вероятностей $W(\mathbf{x}; t)$ зависит от вида распределений $f(\tau)$ и $w(\mathbf{x})$, а точнее – от их лаплас-образа $\hat{f}(s)$ и характеристической функции $\tilde{w}(\mathbf{u})$. Далее будут получены асимптотические уравнения для $W(\mathbf{x}; t)$, справедливые на различных временных масштабах, в случае распределения $f(\tau)$ с лаплас-образом

$$\hat{f}(s) = \frac{1 + \delta^\beta}{1 + (s + \delta)^\beta}, \quad (3.1)$$

где δ – малый параметр. Все моменты $f(\tau)$ ограничены, что делает его физически более корректным, нежели родственное ему дробно-экспоненциальное распределение [6]–[8] (отвечающее значению $\delta = 0$), являющееся одним из ключевых в теории аномальной диффузии. Рассмотрим случай, когда параметр δ мал настолько, что временной интервал между 1 и $1/\delta$ достаточно велик. Тогда процесс $\mathbf{X}(t)$ проходит последовательно три стадии. Вначале, на временах $t \ll 1$, поведение процесса зависит от тонкой структуры распределений $f(\tau)$ и $w(\mathbf{x})$ и не отражает универсальных законов диффузии. Далее, на временах между 1 и $1/\delta$, за счет медленно спадающих степенных хвостов распределения $f(\tau)$ процесс подчиняется аномально-диффузионным законам. Затем, при $t \gg 1/\delta$, процесс подчиняется нормальному линейно-диффузионному закону благодаря экспоненциально убывающим при $\tau \gg 1/\delta$ хвостам распределения $f(\tau)$.

Подставим $\hat{f}(s)$ (3.1) в уравнение (2.2) и обсудим его асимптотику при $s \ll 1$, что соответствует вероятностным свойствам скачкообразного процесса на больших временах.

Применительно к лаплас-образу распределения $f(\tau)$ выделим случай $s \ll \delta \ll 1$, соответствующий поведению скачкообразного процесса $\mathbf{X}(t)$ при $t \rightarrow \infty$, а также случай $\delta \ll s \ll 1$, ответственный за “промежуточный” режим $1 \ll t \ll 1/\delta$. В первом из них

$$\hat{f}(s) \sim 1 - \frac{\beta\delta^{\beta-1}}{1 + \delta^\beta} s,$$

и (2.2) примет вид

$$s \widehat{\Theta}(\mathbf{u}; s) + \frac{1 + \delta^\beta}{\beta \delta^{\beta-1}} [1 - \widetilde{w}(\mathbf{u})] \widehat{\Theta}(\mathbf{u}; s) = 1,$$

а во втором $\widehat{f}(s) \sim 1 - (1 + \delta^\beta)^{-1} s^\beta$, и, соответственно,

$$s^\beta \widehat{\Theta}(\mathbf{u}; s) + (1 + \delta^\beta) [1 - \widehat{w}(\mathbf{u})] \widehat{\Theta}(\mathbf{u}; s) = s^{\beta-1}.$$

Применяя к полученным равенствам обратное преобразование Фурье и Лапласа, придем к уравнению Колмогорова–Феллера

$$\frac{\partial W(\mathbf{x}; t)}{\partial t} + \frac{1 + \delta^\beta}{\beta \delta^{\beta-1}} [W(\mathbf{x}; t) - W(\mathbf{x}; t) * w(\mathbf{x})] = \delta(t) \delta(\mathbf{x}), \quad t \rightarrow \infty,$$

или к обобщенному уравнению Колмогорова–Феллера

$$\frac{\partial^\beta W(\mathbf{x}; t)}{\partial t^\beta} + (1 + \delta^\beta) [W(\mathbf{x}; t) - W(\mathbf{x}; t) * w(\mathbf{x})] = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)} \chi(t) \delta(\mathbf{x}), \quad 1 \ll t \ll \frac{1}{\delta}.$$

Будем считать для определенности, что распределение величины скачков $w(\mathbf{x})$ обладает следующей асимптотикой фурье-образа:

$$\widetilde{w}(\mathbf{u}) \sim 1 - \frac{\sigma^2 \mathbf{u}^2}{2}, \quad \mathbf{u} \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

характерной, например, для многомерного нормального распределения с независимыми координатами и одинаковой дисперсией σ^2 по всем осям. Тогда из приведенных выше уравнений вытекают соответственно уравнения линейной и аномальной диффузии для разных временных асимптотик:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\mathbf{x}; t)}{\partial t} &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{1 + \delta^\beta}{\beta \delta^{\beta-1}} \Delta W(\mathbf{x}; t) + \delta(t) \delta(\mathbf{x}), \quad t \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial^\beta W(\mathbf{x}; t)}{\partial t^\beta} &= \frac{\sigma^2}{2} (1 + \delta^\beta) \Delta W(\mathbf{x}; t) + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)} \chi(t) \delta(\mathbf{x}), \quad 1 \ll t \ll \frac{1}{\delta}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решение первого из них хорошо известно:

$$W_n(\mathbf{x}; t) = \left(\frac{1 + \delta^\beta}{2\pi\beta\delta^{\beta-1}\sigma^2 t} \right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1 + \delta^\beta}{2\beta\delta^{\beta-1}\sigma^2 t} \mathbf{x}^2 \right), \quad (3.4)$$

где n – размерность пространства случайного процесса. Решение второго уравнения приведено в следующем разделе.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Для того чтобы решить уравнение (3.3), введем вспомогательный векторный процесс в n -мерном пространстве

$$\mathcal{X}(t) = \{\mathcal{X}_1(t), \mathcal{X}_2(t), \dots, \mathcal{X}_n(t)\},$$

компонентами которого являются взаимно независимые винеровские процессы случайного аргумента $\varrho(t)$ – непрерывного аналога числа скачков за время t , причем $t(\varrho)$ – β -устойчивое, безгранично делимое время:

$$\mathcal{X}_k(t) = \sqrt{\gamma} W_k(\varrho(t)), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Многомерная характеристическая функция процесса выражается через функцию Миттаг-Леффлера (детали приведены в работе [5]):

$$\Theta_n(\mathbf{u}; t) = E_\beta(-t^\beta \mathbf{u}^2).$$

Таким образом, его функция плотности вероятностей подчиняется уравнению дробной диффузии [6]

$$\frac{\partial^\beta f_n(\mathbf{x}; t)}{\partial t^\beta} = \Delta f_n(\mathbf{x}; t) + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \chi(t) \delta(\mathbf{x}).$$

Решая это уравнение при помощи модельного процесса “дробного сноса”, введенного в работе [6], обнаружим, что решение многомерного уравнения выражается через решение одномерного (см., например, [3], [6], [7]) и может быть записано в следующем виде:

$$f_n(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{(4\pi t^\beta)^{n/2}} g_n\left(\frac{|\mathbf{x}|}{t^{\beta/2}}\right), \quad (4.1)$$

где

$$g_n(y) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty Q_\beta(z) e^{-y^2/(4z)} \frac{dz}{z^{n/2}}.$$

Здесь $Q_\beta(y)$ находится обратным преобразованием Фурье от функции Миттаг-Леффлера $E_\beta(iu)$.

Заметим, что данный метод решения выгодно отличается от метода функции Грина [9] относительной легкостью и быстротой, однако может быть применим только для $0 < \beta < 2$. Также следует отметить, что получено точное аналитическое решение для функции плотности вероятностей, а не только для характеристической функции, как, например, в работе [10], где, впрочем, авторами была поставлена несколько более сложная задача нахождения совместной плотности вероятностей координаты и скорости частицы и рассмотрена иная модель. В представленной работе упор делается именно на простоту модели и на многомерное обобщение, для которых уже просматриваются некоторые новые эффекты.

Обратим внимание на качественное отличие распределения (4.1) от распределения линейной диффузии (3.4): согласно (3.4) координаты линейно-диффузионного случайного процесса $\mathbf{X}(t)$ статистически независимы. В то же время распределение (4.1) не может быть записано как произведение распределений отдельных координат. Последнее означает, что на аномально-диффузионной стадии координаты скачкообразного процесса $\mathbf{X}(t)$ статистически зависимы даже в случае независимых координат отдельных скачков.

Этот факт может свидетельствовать о наличии выделенного направления аномальной диффузии в многомерном пространстве, что является новым эффектом относительно одномерного случая, где он принципиально не может быть обнаружен.

5. ПРОВЕРКА АСИМПТОТИЧЕСКИХ СЛЕДСТВИЙ УРАВНЕНИЯ МОНТРОЛЛА–ВЕЙССА

Выше были получены асимптотические решения уравнения Монтролла–Вейсса, справедливые на больших и промежуточных временах. Полезно выяснить, насколько эти асимптотики близки к точному решению и в каких пределах ими можно пользоваться. С этой целью найдем решение уравнения (2.1) в двух- и трехмерном случаях.

Обсудим сначала трехмерный случай. Подставив в уравнение Монтролла–Вейсса (2.1) лаплас-образ (3.1), с учетом (3.2) получим

$$\hat{\Theta}(\mathbf{u}; s) = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1 + \delta^\beta}{(s + \delta)^\beta - \delta^\beta} \frac{\sigma^2 \mathbf{u}^2}{2} \right)^{-1}. \quad (5.1)$$

Найдем вначале трехмерное обратное преобразование Фурье функции $\hat{\Theta}(\mathbf{u}; s)$ по $\mathbf{u}$. Поскольку исходный фурье-образ зависит лишь от модуля вектора $\mathbf{u}$, то и сама функция зависит лишь от модуля вектора $\mathbf{x}$. Действительно, переходя к сферическим координатам в пространствах $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{u_1, u_2, u_3\}$, нетрудно получить формулу [11]

$$\widehat{W}(r; s) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \sin(kr) \hat{\Theta}(k; s) k dk, \quad (5.2)$$

где $r = |\mathbf{x}|$, а $k = |\mathbf{u}|$. Напомним, что эта функция является лаплас-образом трехмерной плотности вероятностей компонент вектора $\mathbf{X}$, удовлетворяющей условию нормировки

$$4\pi \int_0^\infty \widehat{W}(r; s) r^2 dr = \frac{1}{s}.$$

При этом лаплас-образ одномерной плотности вероятностей модуля вектора $\mathbf{X}$ равен

$$\widehat{W}_{3d}(r; s) = 4\pi r^2 \widehat{W}(r; s).$$

Вычислив интеграл (5.2), получим

$$\widehat{W}_{3d}(r; s) = \frac{2r}{\sigma^2 s} \frac{(s + \delta)^\beta - \delta^\beta}{1 + \delta^\beta} \exp \left[-\frac{\sqrt{2}r}{\sigma} \sqrt{\frac{(s + \delta)^\beta - \delta^\beta}{1 + \delta^\beta}} \right].$$

Применим обратное преобразование Лапласа к полученной функции. Возникающий при этом интеграл Меллина сводится к интегралу по действительной оси

$$W_{3d}(r; t) = \frac{2r^2}{\pi\sigma^2(1+\delta^\beta)} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^\infty \frac{(ye^{-i\pi} + \delta)^\beta - \delta^\beta}{y} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-yt - \frac{\sqrt{2}r}{\sigma\sqrt{1+\delta^\beta}} \sqrt{(ye^{-i\pi} + \delta)^\beta - \delta^\beta} \right] dy \right\}. \quad (5.3)$$

Эта формула справедлива на любых временах. Аналогичным путем, или используя интегральное представление функции Миттаг-Леффлера, удастся получить асимптотический интегральный вид функции $W_{3d}(r; t)$ на “промежуточных” временах $1 \ll t \ll 1/\delta$:

$$W_{3d}(r; t) = \frac{2r}{\pi\sigma^2(1+\delta^\beta)} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\pi\beta} \int_0^\infty \exp \left[-yt - \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{1+\delta^\beta}} r y^{\frac{\beta}{2}} e^{-i\pi\beta/2} \right] \frac{dy}{y^{1-\beta}} \right\}, \quad (5.4)$$

эквивалентный выражению (4.1) при $n = 3$.

На рис. 1 и 2 для значений параметров $\delta = 0.01$, $\beta = 0.6$, $\sigma = 1$ по указанным выше формулам построены асимптотические (3.4), (5.4) и точные (5.3) плотности вероятностей $W_{3d}(r; t)$ на “промежуточных” ($1 \ll t \ll 1/\delta$) и больших ($t \rightarrow \infty$) временах, соответственно. В первом случае (рис. 1) графики точных решений (сплошные линии) стремятся к асимптотическим аномально-диффузионным распределениям (штриховые линии) с уменьшением времени (от $t = 10$ для кривых 1 до $t = 2$ для кривых 2). На больших временах (рис. 2) с ростом времени (от $t = 500$ для кривых 1 до $t = 1000$ для кривых 2) графики точного решения приближаются к асимптотическим рэлеевским распределениям.

Рис. 1

Рис. 2

В двумерном случае имеем

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(k) e^{ikr \cos \psi} k d\psi dk = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(k) J_0(kr) k dk,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя.

Производя выкладки, аналогичные проделанным ранее, и учитывая условие нормировки, получим

$$W_{2d}(r; t) = \frac{2r}{\pi\sigma^2(1+\delta^\beta)} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^\infty \frac{(ye^{-i\pi} + \delta)^\beta - \delta^\beta}{y} \times \right. \\ \left. \times e^{-yt} \cdot K_0 \left[-\frac{\sqrt{2}r}{\sigma\sqrt{1+\delta^\beta}} \sqrt{(ye^{-i\pi} + \delta)^\beta - \delta^\beta} \right] dy \right\}, \quad (5.5)$$

где $K_0(z)$ — функция Макдональда. Соответствующее асимптотическое решение уравнения (2.1) на “промежуточных” временах ($1 \ll t \ll 1/\delta$) выглядит следующим образом:

$$W_{2d}(r; t) = \frac{2r}{\pi\sigma^2(1+\delta^\beta)} \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\pi\beta} \int_0^\infty K_0 \left[-\frac{\sqrt{2}r e^{-i\pi\beta/2}}{\sigma\sqrt{1+\delta^\beta}} y^{\beta/2} \right] \frac{e^{-yt} dy}{y^{1-\beta}} \right\}, \quad (5.6)$$

тогда как при $t \rightarrow \infty$ распределение (5.5) асимптотически стремится к рэлеевскому:

$$W_{2d}(r; t) = \frac{r}{\sigma^2(1+\delta^\beta)t} \exp \left[-\frac{r^2}{2\sigma^2(1+\delta^\beta)t} \right]. \quad (5.7)$$

Графики полученных зависимостей аналогичны уже построенным для трехмерного случая.

6. ДИСПЕРСИЯ СКАЧКООБРАЗНОГО ПРОЦЕССА

Кроме распределений скачкообразного процесса, имеющих несомненно большое значение для понимания природы аномальной диффузии, интересно проследить асимптотики поведения его среднего квадрата $\langle \mathbf{X}^2(t) \rangle$, который несет более конкретный статистический смысл. Найдем вначале асимптотики его Лаплас-образа:

$$g(s) = \int \langle \mathbf{X}^2(t) \rangle e^{-st} dt = \Delta_u \hat{\Theta}(\mathbf{u}; s) \big|_{\mathbf{u}=0}. \quad (6.1)$$

Подставив сюда $\hat{\Theta}(\mathbf{u}; s)$ из уравнения Монтролла–Вейсса (2.1) с асимптотиками функций $\tilde{w}(\mathbf{u}) \sim 1 - \sigma^2 \mathbf{u}^2/2$ и

$$\hat{f}(s) \sim 1 - \frac{\beta \delta^{\beta-1}}{1 + \delta^\beta} s, \quad s \ll \delta \ll 1,$$

либо

$$\hat{f}(s) \sim 1 - \frac{1}{1 + \delta^\beta} s^\beta, \quad \delta \ll s \ll 1,$$

для лаплас-образа $g(s)$ получим

$$g(s) \sim \frac{1}{s^2}, \quad s \ll \delta \ll 1,$$

$$g(s) \sim \frac{1}{s^{1+\beta}}, \quad \delta \ll s \ll 1.$$

Соответствующее поведение среднего квадрата на больших и промежуточных временах таково:

$$\langle \mathbf{X}^2(t) \rangle \sim t, \quad t \rightarrow \infty,$$

$$\langle \mathbf{X}^2(t) \rangle \sim t^\beta, \quad 1 \ll t \ll \frac{1}{\delta}.$$

Заметим, что в двумерном и трехмерном случаях эти асимптотики отличаются лишь постоянным множителем.

Рис. 3

Обсудим поведение $\langle \mathbf{X}^2(t) \rangle$, для чего подставим в (6.1) $\hat{\Theta}(\mathbf{u}; s)$ из (5.1):

$$g(s) = \frac{\sigma^2(1 + \delta^\beta)}{s[(s + \delta)^\beta - \delta^\beta]}.$$

При $\beta = 1/2$ удастся найти явное выражение для среднего квадрата блужданий:

$$\langle \mathbf{X}^2(t) \rangle = \frac{1 + \sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}} \left[\sqrt{\frac{\delta t}{\pi}} e^{-\delta t} + \delta t + \left(\delta t + \frac{1}{2} \right) \operatorname{erf}(\sqrt{\delta t}) \right]. \quad (6.2)$$

На рис. 3 изображены графики выражения (6.2) (сплошная линия), а также его асимптотик на промежуточных ($\sim \sqrt{t}$) и больших ($\sim t$) временах (пунктир и штриховая линия, соответственно). Видно, что графики аномально-диффузионной и линейной асимптотик близки к графику точного решения.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов НШ-838.2003.2, РФФИ 03-02-16680, а также гранта Министерства образования РФ Е02-3.5-232.

Список литературы

- [1] *M. F. Shlesinger, B. J. West, J. Klafter.* Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1100; *I. M. Sokolov, A. Blumen, J. Klafter.* Europhys. Lett. 1999. V. 47. P. 152; *G. M. Zaslavsky, S. Benkadda.* Chaos, Kinetics and Nonlinear Dynamics in Fluids and Plasmas. Berlin: Springer, 1998.
- [2] *G. M. Zaslavsky, M. Edelman, B. Niyazov.* Chaos. 1997. V. 7. P. 159.
- [3] *A. I. Saichev, G. M. Zaslavsky.* Chaos. 1997. V. 7. P. 753.
- [4] *B. B. Учайкин.* ЖТФ. 1998. Т. 68. № 1. С. 138; ТМФ. 1998. Т. 115. № 1. С. 154; *B. B. Учайкин, B. B. Саенко.* ЖТФ. 2001. Т. 71. № 2. С. 8; *P. W. M. Blom, M. C. J. M. Vissenberg.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 3819; *Q. Gu, E. A. Schiff, S. Grebner.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 3196; *M. Porto, A. Bunde, S. Havlin.* Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 1667.
- [5] *R. Metzler, J. Klafter.* Phys. Rep. 2000. V. 339. P. 1.
- [6] *А. И. Саичев, С. Г. Уткин.* Актуальные проблемы статистической радиофизики. 2002. Т. 1. № 1. С. 5.
- [7] *A. I. Saichev, W. A. Woyczyński.* Distributions in the Physical and Engineering Sciences. V. I. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [8] *А. И. Саичев, С. Г. Уткин.* Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. № 2. С. 163.
- [9] *К. В. Чукбар.* ЖЭТФ. 1995. Т. 109. № 4. С. 1335.
- [10] *A. V. Chechkin, V. Yu. Gonchar.* ЖЭТФ. 2000. Т. 118. № 3. С. 730.
- [11] *С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 13.X.2004 г.,
после доработки 12.I.2005 г.