Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Абловиц, К. Аренс, Д. Бьондини, С. Чакраварти, Э. Докерти, Компенсация дисперсии за счет периодической групповой задержки уменьшает индуцированные столкновениями временные сдвиги в квазилинейных системах с управлением дисперсией, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 6–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:00:50

© 2005 г.

М. Дж. Абловиц*, К. Аренс*,
Дж. Бьондини*, С. Чакраварти*, Э. Докерти*

**КОМПЕНСАЦИЯ ДИСПЕРСИИ ЗА СЧЕТ
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРУППОВОЙ ЗАДЕРЖКИ
УМЕНЬШАЕТ ИНДУЦИРОВАННЫЕ
СТОЛКНОВЕНИЯМИ ВРЕМЕННЫЕ
СДВИГИ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ
С УПРАВЛЕНИЕМ ДИСПЕРСИЕЙ**

Компенсирующие дисперсию модули с периодической групповой задержкой (ПГЗ) были недавно предложены в качестве механизмов для уменьшения индуцированных столкновениями временных сдвигов в системах с управлением дисперсией. Получены частотный и временной сдвиги в квазилинейных системах с управлением дисперсией с ПГЗ и показано, что значительное уменьшение достигается, когда даже малая доля полной дисперсии компенсируется за счет ПГЗ.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, оптико-волоконные коммуникации, нелинейная оптика, периодическая групповая задержка, временной сдвиг, управление дисперсией, квазилинейные системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Индуцированные столкновениями временные сдвиги, т.е. изменения времени прихода сигнала вследствие взаимодействия с сигналами в соседних частотных каналах, являются одной из главных проблем в осуществляющих включение–выключение (on-off-keying) системах с многоканальным разделением по длине волны (wavelength-division-multiplexed systems, WDM). Проблема оказывается сложной, если используется управление дисперсией: из-за периодического изменения знака хроматической дисперсии в зависимости от расстояния импульсы в различных частотных каналах претерпевают зигзагообразное движение по отношению друг к другу, что приводит к взаимодействиям, состоящим из последовательности “мини-столкновений.” Более того, малое значение средней дисперсии в этих системах приводит к большим длинам столкновений, озна-

*Department of Applied Mathematics, University of Colorado at Boulder, Boulder, CO 80309-0526, USA. E-mail: markjab@boulder.colorado.edu, ahrensc@colorado.edu, biondini@buffalo.edu, chuck@crestone.uccs.edu, docherty@colorado.edu

чающим, что взаимодействие разворачивается на больших расстояниях. Действительно, в то время как хорошо известно, что умеренное управление дисперсией может давать выигрыш в отношении взаимодействий между каналами, в предельных случаях процесс столкновений может привести к взаимному разрушению двух WDM-импульсов [1].

Недавно было предложено использовать модули с периодической групповой задержкой (ПГЗ) как средство уменьшения индуцированных столкновениями временных сдвигов [2]–[4]. ПГЗ-модули [5]–[7] служат для компенсации некоторой доли дисперсии, накапливаемой на каждом участке дисперсионного отображения, причем компенсация остающейся доли дисперсии по-прежнему достигается за счет компенсирующих дисперсию волокон. Преимущество такого подхода к солитонным системам с управлением дисперсией было продемонстрировано как в численных экспериментах [2], [4], так и в прямых экспериментах по передаче сигнала [3]. Цель данной статьи двояка. Во-первых, мы выведем выражения для значения индуцированных столкновениями частотных и временных сдвигов в квазилинейных системах с возвратом к нулю, использующих ПГЗ. Во-вторых, мы используем как наши аналитические результаты, так и прямое численное моделирование, для того чтобы показать, что использование ПГЗ высокоэффективно как средство уменьшения индуцированных столкновениями временных сдвигов в квазилинейных системах с возвратом к нулю. Как и в случае солитонов, основной механизм уменьшения временного сдвига состоит в радикальном уменьшении длины столкновения [2]. Мы также покажем, что сами по себе ПГЗ дают и значительный прямой эффект, который обеспечивает восстанавливающую силу для временного сдвига.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ В СИСТЕМАХ С ПГЗ

Начнем с нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), записанного в безразмерных переменных $t = t_{\text{ret}}/t_*$, $z = z_{\text{lab}}/z_*$, $u = \mathcal{E}/\sqrt{g(z)P_*}$ и $D = -k''/k''_*$, где нормировочные параметры обозначены звездочкой. Здесь $\mathcal{E}$ – медленно меняющаяся огибающая комплексного оптического поля, t_{ret} и z_{lab} – запаздывающее время и длина распространения. Типичные нормировочные значения суть $P_* = 1$ мВт, $z_* = z_{\text{NL}} = 1/(\gamma P_*) = 400$ км, $t_* = 12$ пс и $k''_* = t_*^2/z_* = 0.36$ пс²/км, где $\gamma = 2.5$ (Вт·км)^{−1} – нелинейный коэффициент волокна. Рассмотрим дисперсионное отображение для волокна, состоящего из двух участков (с коэффициентами дисперсии и длинами $D_1 > 0$, z_1 и $D_2 < 0$, z_2) и усилителя в волокне с добавками эрбия (УВДЭ), расположенного позади второго волокна. Полная длина отображения есть $z_a = z_1 + z_2$, а доля отображения, приходящаяся на аномальное волокно, равна $\theta = z_1/z_a$. Здесь $g(z)$ описывает периодическое изменение мощности из-за потерь и усиления, а $D(z)$ – дисперсия локальной групповой скорости, причем обе функции являются периодическими с периодом z_a . При наличии УВДЭ имеем $g(z) = g_0 \exp(-2\Gamma z)$ при $nz_a < z < (n+1)z_a$, где n – номер отображения, Γ – безразмерный коэффициент потерь, а $g_0 = 2\Gamma z_a/(1 - \exp(-2\Gamma z_a))$. Мера эффектов управления дисперсией выражается напряженностью отображения [8] $s = [(D_1 - \langle D \rangle)z_1 - (D_2 - \langle D \rangle)z_2]/4$, где $\langle D \rangle = (D_1 z_1 + D_2 z_2)/z_a$ – средняя дисперсия. Для одиночного импульса с нормированной частотой Ω_0 его среднее положение $\langle t \rangle$ на

расстоянии z вдоль волокна имеет вид

$$\langle t \rangle = \Omega_0 \int_0^z D(x) dx = \Omega_0 [\langle D \rangle z + C(z)],$$

где

$$C(z) = \int_0^z [D(x) - \langle D \rangle] dx$$

— периодическая функция. Предположим, что два импульса $u_{\pm}$ с частотами $\pm\Omega_0$ изначально расположены в $\mp t_0$; начальное временное смещение t_0 связано со средним положением столкновений z_0 посредством соотношения $t_0 = \Omega_0 \langle D \rangle z_0$. Мини-столкновения между импульсами при этом возникают, когда $(z - z_0)\langle D \rangle + C(z) = 0$. Длину столкновения можно оценить как $L_c = 2s/\langle D \rangle$. Полные столкновения — это те, для которых $L_c/2 \leq z_0 \leq L - L_c/2$.

В системах с ПГЗ в каждый участок дисперсионного отображения вставляется ПГЗ-модуль, что дает локальную диспергирующую силу с напряженностью $H_{\text{ПГЗ}}$ и компенсирует некоторую долю f дисперсии, обусловленной вторым волокном. Другими словами, $f = H_{\text{ПГЗ}}/(D_2 z'_2 + H_{\text{ПГЗ}})$ (здесь и далее штрих обозначает величины в системе при наличии ПГЗ). Мы будем считать, что при выполнении этой замены средняя дисперсия, отдельные дисперсии и длина отдела с первым волокном не меняются: $D'_{1,2} = D_{1,2}$, $z'_1 = z_1$ и $\langle D \rangle' = (D_1 z'_1 + D_2 z'_2 + H_{\text{ПГЗ}})/z'_a = \langle D \rangle$. Тогда можно найти новые параметры системы: $\theta' = [(D_1 - D_2)(1 - f)\theta - D_2 f]/[D_1(1 - f) - D_2]$, $z'_a = (\theta/\theta')z_a$ и $z'_2 = (1 - \theta')z'_a$. Полезно определить эффективную среднюю дисперсию формулой $\langle D \rangle_{\text{эфф}} \equiv (D_1 z_1 + D_2 z'_2)/z'_a$. Используя эквивалентное определение напряженности отображения $2s = (D_1 - \langle D \rangle)z_1$, можно далее найти новую напряженность отображения в виде $s' = [(D_1 - \langle D \rangle_{\text{эфф}})/(D_1 - \langle D \rangle)]s$. Новая длина столкновения при этом равна $L'_c = 2s'/\langle D \rangle_{\text{эфф}}$. Распространение оптических импульсов в такой системе управляется возмущенным НУШ:

$$iu_z + \frac{1}{2}D(z)u_{tt} + g(z)|u|^2u = iP[u], \quad (1a)$$

$$\hat{P}[u] = (e^{iH(\omega)} - 1) \sum_{m=1}^{N_a} \delta(z - mz'_a) \hat{u}(\omega, z) \quad (16)$$

(ср. с [9]), где $P[u]$ выражает действие ПГЗ во временной области, $\hat{P}[u]$ — преобразование Фурье от $P[u]$, а $\hat{u}(\omega, z)$ — преобразование Фурье от $u(t, z)$ и где N_a — полное число дисперсионных отображений в передающей линии. Функция $H(\omega)$ представляет собой ПГЗ-отклик, который локально аппроксимирует квадратичный дисперсионный профиль, но является периодическим с периодом, равным расстоянию между каналами, в нашем случае $2\Omega_0$. Наконец, $\delta(z)$ — дираковская дельта-функция, которая кодирует изменение импульса на концах ПГЗ-модуля: $\hat{u}(\omega, mz'_a{}^+) = e^{iH(\omega)} \hat{u}(\omega, mz'_a{}^-)$.

3. ИНДУЦИРОВАННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯМИ ЧАСТОТНЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ СДВИГИ ПРИ НАЛИЧИИ ПГЗ

Подставляя $u = u_+ + u_-$ в уравнения (1) и пренебрегая четырехволновым смешиванием, находим эволюцию $u_{\pm}$ согласно уравнению (1) с дополнительным слагаемым

$2g(z)|u_{\mp}|^2 u_{\pm}$ в левой части (1а). Среднее время и частота импульса определяются обычными формулами

$$\langle t \rangle = \int \frac{t|u_{\pm}|^2 dt}{E}, \quad \langle \Omega \rangle = -i \int \frac{u_{\pm}^* (\partial u_{\pm} / \partial t) dt}{E},$$

где $E = \int |u_{\pm}|^2 dt$ – энергия импульса. (Все интегралы берутся от $-\infty$ до ∞ , если специально не указано иное.) Используя уравнения (1) и тейлоровское приближение второго порядка для $\hat{P}[u]$ вблизи $\omega = \Omega_0$ при $H(\Omega_0) = H'(\Omega_0) = 0$, найдем эволюционные уравнения для средних частоты и времени. Для u_+ имеем

$$\frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial z} = \frac{2g(z)}{E} \int |u_+|^2 \frac{\partial |u_-|^2}{\partial t} dt, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \langle t \rangle}{\partial z} = D(z) \langle \Omega(z) \rangle + H_{\text{ПГЗ}} \sum_{m=1}^{N_a} \delta(z - mz'_a) (\langle \Omega \rangle - \Omega_0), \quad (2b)$$

где $H_{\text{ПГЗ}} = H''(\Omega_0)$. Частотный и временной сдвиги тогда равны $\Delta\Omega = \Omega(z) - \Omega_0$ (причем $\Omega(0) = \Omega_0$) и $\Delta t(z) = \langle t(z) \rangle - \tilde{D}(z)\Omega_0 + t_0$, где $\tilde{D}(z) \equiv \int_0^z D(x) dx$ было бы накопленной дисперсией в новой системе без ПГЗ. Удобно также определить дисперсию с учетом ПГЗ как

$$D_{\text{ПГЗ}}(z) = D(z) + H_{\text{ПГЗ}} \sum_{m=1}^{N_a} \delta(z - mz'_a)$$

и накапливаемую дисперсию с учетом ПГЗ – как

$$\tilde{D}_{\text{ПГЗ}}(z) = \int_0^z D_{\text{ПГЗ}}(x) dx.$$

Эволюция квазилинейного импульса с исходно гауссовым профилем $u_{\pm}(t, 0) = (a/\sqrt{2\pi b}) \exp[-(t \pm t_0)^2/2b \pm i\Omega_0 t]$ в зависимости от расстояния тогда приближенно описывается выражением [10]

$$u_{\pm}(t, z) = \frac{a}{\sqrt{2\pi(b + i\tilde{D}_{\text{ПГЗ}}(z))}} \exp \left[-\frac{(t \pm t_0 \mp \Omega_0 \tilde{D}(z))^2}{2(b + i\tilde{D}_{\text{ПГЗ}}(z))} \pm i\Omega_0 t - \frac{i}{2} \Omega_0^2 \tilde{D}(z) \right]. \quad (3)$$

Используя равенство (3) в уравнениях (2), находим

$$\Delta\Omega(L) = A\Omega_0 \int_0^L \frac{g(z)\tilde{D}_0(z)}{(b^2 + \tilde{D}_{\text{ПГЗ}}^2(z))^{3/2}} \exp \left(-2b\Omega_0^2 \frac{\tilde{D}_0^2(z)}{b^2 + \tilde{D}_{\text{ПГЗ}}^2(z)} \right) dz \quad (4a)$$

и

$$\Delta t(L) = \tilde{D}_0(L)\Delta\Omega(L) - \Delta t_{\text{ост}} + H_{\text{ПГЗ}} \sum_{m=1}^{N_a} \Delta\Omega(mz'_a), \quad (4b)$$

где $\tilde{D}_0(z) = \tilde{D}(z) - \langle D \rangle_{\text{эфф}} z_0$, причем $A = 4Eb^{3/2}/\sqrt{2\pi}$, и где “остаточный” временной сдвиг $\Delta t_{\text{ост}}$ равен

$$\Delta t_{\text{ост}}(L) = A\Omega_0 \int_0^L \frac{g(z)\tilde{D}_0^2(z)}{(b^2 + \tilde{D}_{\text{ПГЗ}}^2(z))^{3/2}} \exp \left(-2b\Omega_0^2 \frac{\tilde{D}_0^2(z)}{b^2 + \tilde{D}_{\text{ПГЗ}}^2(z)} \right) dz. \quad (4b)$$

Уравнение (4б) показывает, что из-за ПГЗ имеется дополнительная восстанавливающая сила. Сумма в уравнении (4б) вычисляется с использованием уравнения (4а), в котором L заменено на mz'_a . Заметим, что изложенная выше теория позволяет вычислять частотный и временной сдвиги как для полных, так и для неполных столкновений. Заметим также, что уравнение (2б) можно записать в компактном виде как $\partial\langle t\rangle/\partial z = D_{\text{ПГЗ}}(z)\Delta\Omega(z) + D(z)\Omega_0$. Важно, что интегралы в уравнениях (4а) и (4в) можно эффективно брать численными квадратурами или с помощью асимптотического приближения, используя так называемый метод Лапласа (см. [11], [12]).

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПО МЕТОДУ ЛАПЛАСА

Интегралы в уравнениях (4а) и (4в) имеют общий вид

$$I(\lambda) = \int_0^L F(z) e^{-\lambda\Phi(z)} dz,$$

где $\lambda > 0$ — параметр. Для больших значений λ основной вклад в $I(\lambda)$ дает окрестность так называемой критической точки z_c , в которой $\Phi(z)$ имеет минимум, а другие области дают экспоненциально малые вклады. Функции $F(z)$ и $\Phi(z)$ можно тогда разложить в ряды Тейлора с центром в критической точке, причем, как правило, удерживаются только несколько первых членов.

В нашем случае $\Phi(z) = \tilde{D}_0^2/(b^2 + \tilde{D}_{\text{ПГЗ}}^2)$ и $\lambda = 2b\Omega_0^2$ как для уравнения (4а), так и для уравнения (4в). Критические точки z_c соответствуют положениям, где происходят мини-столкновения, которые случаются при $\tilde{D}_0(z_c) = 0$. Для уравнения (4а) имеем $F(z) = g\tilde{D}_0/(b^2 + \tilde{D}_{\text{ПГЗ}}^2)^{3/2}$, тогда как для уравнения (4в) — $F(z) = g\tilde{D}_0^2/(b^2 + \tilde{D}_{\text{ПГЗ}}^2)^{3/2}$. Таким образом, получаем $F(z_c) = \Phi(z_c) = 0$ и для $\Delta\Omega$, и для $\Delta t_{\text{ост}}$, но $F'(z_c) \neq 0$ для $\Delta\Omega$, тогда как $F'(z_c) = 0$ для $\Delta t_{\text{ост}}$. Тогда, если $z_1, \dots, z_N$ — положения мини-столкновений, находим

$$\Delta\Omega(L) \sim A \sum_{n=1}^N \left[\frac{F'_n J_{1,n}}{b\Omega_0 \Phi''_n} + \frac{3F''_n \Phi''_n J_{2,n} - 2F'_n \Phi'''_n J_{4,n}}{6b^{3/2}\Omega_0^2 (\Phi''_n)^{5/2}} \right], \quad (5a)$$

$$\Delta t_{\text{ост}}(L) \sim \frac{A}{b^{3/2}\Omega_0^2} \sum_{n=1}^N \frac{F''_n J_{2,n}}{2(\Phi''_n)^{3/2}}, \quad (5b)$$

где $F'_n = F'(z_n)$ и т.д., и

$$J_{k,n} = \int_{x_n^-}^{x_n^+} x^k e^{-x^2} dx,$$

причем пределы интегрирования $x_n^\pm$ зависят от положений мини-столкновений. Интегралы $J_{k,n}$ можно вычислить точно в терминах хорошо известных функций. Уравнения (5) показывают, что остаточный сдвиг частоты и остаточный временной сдвиг суть $\mathcal{O}(1/\Omega_0)$ и $\mathcal{O}(1/\Omega_0^2)$, соответственно. Точность метода Лапласа можно еще улучшить, если удерживать члены высших порядков.

Рис. 1. Полный временной сдвиг в зависимости от среднего положения столкновений z_0 при $f = 0.1$, полученный из прямого численного моделирования (ПЧМ) уравнения (1), посредством численного интегрирования (квадратура) уравнений (4) и посредством их аппроксимации (по Лапласу) с помощью уравнений (5). Врезка показывает систему без ПГЗ, $f = 0$.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Сравним результаты прямого численного моделирования НУШ (1), результаты численного интегрирования уравнений (4) (квадратуры) и их асимптотическую аппроксимацию с помощью уравнений (5) (метод Лапласа). В нашем квазилинейном анзаце неявно предполагается, что ПГЗ-отклик аппроксимирует квадратичный дисперсионный профиль. Мы, таким образом, использовали кусочно-периодическую функцию, для того чтобы моделировать ПГЗ в уравнениях (1): $H(\omega, z) = (\omega - \Omega_0)^2 H_{\text{ПГЗ}}/2$ при $2n\Omega_0 \leq \omega < 2(n+1)\Omega_0$. Поскольку предполагается, что ПГЗ действует локально в пространстве, импульс распространялся линейно через содержащие ПГЗ-модули пространственные ячейки, с условием скачка, приведенным после уравнений (1). Таким образом, ожидается, что уравнения (4) будут хорошим приближением, когда спектральная ширина импульса мала по сравнению с периодом ПГЗ, а именно $2\Omega_0$. В численных квадратурах расчет на основе уравнений (4) производился путем разбиения отрезка интегрирования $[0, L]$ на подынтервалы с постоянной дисперсией, с использованием правила трапеции на каждом подынтервале.

Мы провели численное моделирование квазилинейной системы с нормированными линейными параметрами $L = 20$, $\langle D \rangle = 0.5$, $s = 2.5$, $\theta = 0.5$, $\Gamma = 9.21$ и $z_a = 0.15$ и нормированными параметрами импульса $a = 1.6$, $b = 2$ и $\Omega_0 = 3$. Эти значения соответствуют системе с каналами, разнесенными на 80 ГГц, со средней дисперсией $0.18 \text{ пс}^2/\text{км}$, полной длиной передачи 8000 км, коэффициентом потерь $0.2 \text{ дБ}/\text{км}$, разнесением усилителей на 40 км без ПГЗ и входным импульсом с пиковой мощностью 0.6 мВт и полной шириной на половине максимума 28.26 пс .

На рис. 1 показан полный временной сдвиг $\Delta t(L)$ на выходе в зависимости от среднего положения столкновений z_0 для системы с ПГЗ ($f = 0.1$) и без ПГЗ ($f = 0$). На рис. 2

Рис. 2. Максимальные временной сдвиг и частотный сдвиг (на врезке) как функции f относительно среднего положения столкновений z_0 .

показано максимальное абсолютное значение полного временного сдвига и остаточного сдвига частоты как функций f — доли компенсации, осуществляемой ПГЗ; максимум берется по отношению к среднему положению столкновений z_0 .

Помимо прекрасного согласия между аналитической формулой и прямым численным моделированием, эти рисунки позволяют ясно видеть значительное уменьшение индуцированных столкновениями временных сдвигов, возникающих при использовании ПГЗ, даже при столь малых значениях f как 0.05. Заметим, что уменьшение временного сдвига соответствует резкому убыванию длины столкновения: на рис. 1 $L'_c = 1.24$ при $f = 0.1$, что следует сравнить с $L_c = 10$ при $f = 0$ (без ПГЗ). Заметим также, что $L'_c \ll L$, когда f не слишком мало, что означает, что при наличии ПГЗ почти все столкновения полные, в отличие от случая без ПГЗ. Наконец, рис. 1 показывает, что при наличии ПГЗ эффект полных столкновений оказывается практически пренебрежимым (в отличие от случая без ПГЗ), и единственные заметные временные сдвиги возникают из нескольких неполных столкновений, соответствующих столкновительным центрам z_0 , расположенным вблизи начала ($z_0 = 0$) или конца ($z_0 = 20$) передающей линии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство асимптотического характера соотношений (5)

Докажем, что уравнения (5) дают асимптотику интегралов (4а) и (4в). Для уравнения (5а) докажем только, что член в главном порядке дает асимптотику. Для упрощения обозначений опустим штрихи над величинами в системе с ПГЗ. Начнем с того, что запишем уравнение (5а) в виде

$$\begin{aligned} \Delta\Omega(L) &= A\Omega_0 \int_0^L F(z) e^{-\lambda\Phi(z)} dz = \\ &= A\Omega_0 \sum_{n=0}^{N_a-1} \int_{nz_a}^{(\theta+n)z_a} F(z) e^{-\lambda\Phi(z)} dz + \int_{(\theta+n)z_a}^{(n+1)z_a} F(z) e^{-\lambda\Phi(z)} dz, \quad (\text{П.1}) \end{aligned}$$

где дисперсия постоянна на каждом подынтервале $(nz_a, (\theta+n)z_a)$ и $((\theta+n)z_a, (n+1)z_a)$. Без потери общности рассмотрим интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^{\theta z_a} F(z) e^{-\lambda \Phi(z)} dz. \quad (\text{П.2})$$

Можно показать, что имеется максимум одна критическая точка c на каждом интервале. Можно также показать, что в окрестности точки c , $0 < c < \theta z_a$,

$$\begin{aligned} F &\approx F'(c)(z - c), \\ \Phi(z) &\approx \frac{\Phi''(c)}{2}(z - c)^2. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Тогда, используя лемму Уотсона (см. [13], гл. 3), находим

$$I(\lambda) \sim \frac{F'(c)}{2\Phi''(c)\lambda}, \quad (\text{П.4})$$

или, вспоминая, что $\lambda = 2b\Omega_0^2$,

$$I(\lambda) \sim \frac{AF'(c)}{b\Phi''(c)\Omega_0}. \quad (\text{П.5})$$

Поскольку конечная сумма асимптотических членов является асимптотической, получаем, что в главном порядке уравнение (5а) дает асимптотику для (4а). Подобный же анализ показывает, что уравнение (5б) дает асимптотику для (4в).

Благодарности. Мы благодарим У. Л. Кат за привлечение нашего внимания к ПГЗ и за многочисленные плодотворные обсуждения. Работа была частично поддержана со стороны NSF (гранты DMS-0101340, DMS-9810751, DMS-0101476 и DMS-0104337).

Список литературы

- [1] *M. Ablowitz, G. Biondini, E. Olson.* J. Opt. Soc. Am. B. 2001. V. 15. P. 577–583.
- [2] *X. Wei, X. Liu, C. Xie, L. F. Mollenauer.* Opt. Lett. 2003. V. 28. P. 983–985.
- [3] *L. F. Mollenauer, A. Grant, X. Liu.* Opt. Lett. 2003. V. 28. P. 2043–2045.
- [4] *X. Liu, W. Wei, L. F. Mollenauer, C. J. McKinstrie, C. Xie.* Opt. Lett. 2003. V. 28. P. 1412–1414.
- [5] *M. Shirasaki.* IEEE Photon. Technol. Lett. 1997. V. 9. P. 1598–1600.
- [6] *C. K. Madsen, G. Lenz.* IEEE Photon. Technol. Lett. 1998. V. 10. P. 994–996.
- [7] *X. Shu, K. Sugden, K. Byron.* Opt. Lett. 2003. V. 28. P. 881–883.
- [8] *M. J. Ablowitz, G. Biondini.* Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 1668–1670.
- [9] *M. J. Ablowitz, G. Biondini, S. Chakravarty, R. Horne.* Opt. Commun. 1999. V. 172. P. 211–227.
- [10] *M. J. Ablowitz, T. Hirooka, G. Biondini.* Opt. Lett. 2001. V. 26. P. 459–461.
- [11] *M. J. Ablowitz, A. Docherty, T. Hirooka.* Opt. Lett. 2003. V. 28. P. 1191–1193.
- [12] *M. J. Ablowitz, A. S. Fokas.* Complex Variables: Introduction and Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [13] *Ф. Олвер.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.