Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Конт, М. Музетте, К. Верховен, Полнота гамильтонианов Эно–Эйлеса третьей и четвертой степеней, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 14–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:01:46

© 2005 г. Р. Конт*, М. Музетте†, К. Верховен†

ПОЛНОТА ГАМИЛЬТониАнов Эно–Эйлеса ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНЕЙ

Гамильтониан Эно–Эйлеса четвертой степени удовлетворяет тесту Пенлеве только для четырех наборов значений констант. Только для одного из этих наборов, когда данная система тождественна редукции бегущей волны системы Манакова, она была явно проинтегрирована Войцеховским, тогда как система при остальных трех наборах до сих пор не была проинтегрирована в общем случае $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Нами проинтегрирована система в этих трех случаях с помощью построения бирационального преобразования к двум уравнениям четвертого порядка первой степени в классификации Косгроува таких полиномиальных уравнений, которые обладают свойством Пенлеве. Это преобразование включает стационарную редукцию различных дифференциальных уравнений в частных производных. Результат таков же, как и для трех кубичных гамильтонианов Эно–Эйлеса, а именно, во всех четырех случаях четвертой степени общее решение является мероморфным и гиперэллиптическим рода два. Отсюда следует, что нельзя добавить никакого дополнительного автономного члена ни к кубичному гамильтониану, ни к гамильтониану четвертой степени без разрушения интегрируемости Пенлеве (свойства полноты).

Ключевые слова: гамильтониан Эно–Эйлеса, свойство Пенлеве, гиперэллиптическое разделение переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемый гамильтониан используется в небесной механике для описания движения звезды в аксиально-симметричном потенциале галактики. Если q_1 обозначает радиус, а q_2 – высоту, то этот “гамильтониан Эно–Эйлеса” (ЭЭ) [1] является суммой кинетической и потенциальной энергий, причем потенциал является кубичным членом по координатным переменным q_1, q_2 ,

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1 q_2^2 - \frac{1}{3} q_1^3, \quad (1)$$

*Service de physique de l'état condensé (URA 2464), CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France. E-mail: Conte@drecam.saclay.cea.fr

†Dienst Theoretische Natuurkunde, Vrije Universiteit Brussel, International Solvay Institutes for Physics and Chemistry, Pleinlaan 2, B-1050 Brussels, Belgium. E-mail: MMusette@vub.ac.be, CVerhoeve@vub.ac.be

не интегрируем и демонстрирует свойство странного аттрактора. Однако если изменить численные коэффициенты в потенциале, то система может стать интегрируемой, и этот вопрос (о нахождении всех интегрируемых случаев и об их интегрировании) был предметом значительной активности в течение последних трех десятилетий.

Предварительно необходимо определить слово *интегрируемость*, и в разделе 2 мы кратко напомним три его основных значения в контексте гамильтоновых систем.

В разделе 3 мы напомним все случаи (три “кубичных” и четыре “четвертой степени”), в которых наиболее общий классический не зависящий от времени гамильтониан с двумя степенями свободы может иметь однозначное общее решение.

Далее, оставляя в стороне проинтегрированные случаи (см. [2] по поводу обзора текущего состояния этой задачи), мы сконцентрируем внимание на трех случаях (все — “четвертой степени”) с целью нахождения их общего решения, которого до сих пор не было.

В разделе 4 мы построим эквивалентное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) четвертого порядка для $q_1(t)$, в надежде найти его в списке одной из классических таблиц явно интегрируемых ОДУ. Однако эта надежда призрачна, поскольку эти таблицы пока не закончены.

Поэтому в двух последних разделах мы примем иной план действий. Перед лицом сложности, связанной с разделением переменных в смысле Арнольда и Лиувилля, мы установим бирациональное преобразование между двумя гамильтоновыми уравнениями второго порядка и неким ОДУ четвертого порядка, приведенным в классической таблице, составленной Костроуовом [3], общее решение которого однозначно.

2. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Для гамильтоновой системы с конечным числом N степеней свободы известны три основных определения *интегрируемости*:

1) в смысле Лиувилля, т.е. как существование N независимых инвариантов K_j , попарные скобки Пуассона которых обращаются в нуль, $\{K_j, K_l\} = 0$,

2) в смысле Арнольда–Лиувилля ([4], гл. 9), состоящем в том, чтобы явно найти некоторые канонические переменные $s_j, r_j, j = 1, N$, которые “разделяют” уравнение Гамильтона–Якоби для действия S , для двух степеней свободы записываемое в виде

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) - E = 0, \quad p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad (2)$$

3) в смысле Пенлеве [5], т.е. как представление общего решения $q_j(t)$ в явном замкнутом виде однозначной функцией времени t .

3. СЕМЬ ГАМИЛЬТониАнов ЭНО–ЭЙЛЕСА

Для заданного наиболее общего классического не зависящего от времени гамильтониана с двумя степенями свободы

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2) = E \quad (3)$$

требование, чтобы система из двух уравнений Гамильтона удовлетворяла тесту Пенлеве [5] (по крайней мере для некоторых целых степеней $q_1^{n_1}, q_2^{n_2}$), выделяет семь и только семь потенциалов V , зависящих от конечного числа постоянных, а именно:

1) три “кубических” потенциала (случай ЭЭ3) [6]–[8],

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1 q_1^2 + \omega_2 q_2^2) + \alpha q_1 q_2^2 - \frac{1}{3}\beta q_1^3 + \frac{1}{2}c_3 q_2^{-2}, \quad \alpha \neq 0, \quad (4)$$

в которых постоянные $\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2, c_3$ могут принимать только три набора значений –

$$\beta/\alpha = -1, \quad \omega_1 = \omega_2 \quad (\text{SK}), \quad (5)$$

$$\beta/\alpha = -6 \quad (\text{KdV5}), \quad (6)$$

$$\beta/\alpha = -16, \quad \omega_1 = 16\omega_2 \quad (\text{KK}), \quad (7)$$

2) четыре потенциала “четвертой степени” (случай ЭЭ4) [9], [10],

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2 + \Omega_1 Q_1^2 + \Omega_2 Q_2^2) + C Q_1^4 + B Q_1^2 Q_2^2 + A Q_2^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{Q_1^2} + \frac{\beta}{Q_2^2}\right) - \gamma Q_1, \quad B \neq 0, \quad (8)$$

в которых постоянные $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \Omega_1, \Omega_2$ могут принимать только четыре значения (запись $A : B : C = p : q : r$ означает, что $A/p = B/q = C/r$) –

$$\begin{aligned} A : B : C &= 1 : 2 : 1, & \gamma &= 0, \\ A : B : C &= 1 : 6 : 1, & \gamma &= 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2, \\ A : B : C &= 1 : 6 : 8, & \alpha &= 0, \quad \Omega_1 = 4\Omega_2, \\ A : B : C &= 1 : 12 : 16, & \gamma &= 0, \quad \Omega_1 = 4\Omega_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Все семь случаев интегрируемы в смысле Лиувилля, причем второй интеграл движения K [11]–[15] или квадратичен, или четвертой степени по импульсам p_1, p_2 .

Разделение переменных в смысле Арнольда–Лиувилля было выполнено в [11], [16]–[20], за исключением трех случаев: 1) ЭЭ4 $1 : 6 : 1$, $\alpha \neq \beta$; 2) ЭЭ4 $1 : 6 : 8$, $\beta\gamma \neq 0$; 3) ЭЭ4 $1 : 12 : 16$, $\alpha\beta \neq 0$.

Замечательным является тот факт, что во всех случаях, когда удастся достичь разделения переменных, уравнения Гамильтона обладают свойством Пенлеве, причем общее решение дается гиперэллиптической функцией рода два. Цель данной работы – доказать свойство Пенлеве в трех оставшихся случаях, где разделение переменных до сих пор не было проведено.

4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОДУ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В кубичном случае два уравнения Гамильтона

$$q_1'' + \omega_1 q_1 - \beta q_1^2 + \alpha q_2^2 = 0, \quad (10)$$

$$q_2'' + \omega_2 q_2 + 2\alpha q_1 q_2 - c_3 q_2^{-3} = 0 \quad (11)$$

вместе с гамильтонианом (4) эквивалентны [7] одному ОДУ четвертого порядка для $q_1(t)$:

$$q_1'''' + (8\alpha - 2\beta)q_1 q_1'' - 2(\alpha + \beta)q_1'^2 - \frac{20}{3}\alpha\beta q_1^3 + \\ + (\omega_1 + 4\omega_2)q_1'' + (6\alpha\omega_1 - 4\beta\omega_2)q_1^2 + 4\omega_1\omega_2 q_1 + 4\alpha E = 0, \quad (12)$$

которое не зависит от коэффициента c_3 при неполиномиальном члене q_2^{-2} , а зависит от постоянного значения E гамильтониана H . В трех случаях ЭЭЗ (5)–(7) это ОДУ содержится в списке [3] (“классификации”) уравнений, обладающих свойством Пенлеве, общее решение которых является гиперэллиптическим рода два.

В случае четвертой степени аналогичное уравнение четвертого порядка строится путем исключения Q_2 из двух уравнений Гамильтона

$$Q_1'' + \Omega_1 Q_1 + 4C Q_1^3 + 2B Q_1 Q_2^2 - \alpha Q_1^{-3} + \gamma = 0, \quad (13)$$

$$Q_2'' + \Omega_2 Q_2 + 4A Q_2^3 + 2B Q_2 Q_1^2 - \beta Q_2^{-3} = 0 \quad (14)$$

и гамильтониана (8), что приводит к

$$-Q_1'''' + 2\frac{Q_1' Q_1'''}{Q_1} + \left(1 + 6\frac{A}{B}\right)\frac{Q_1''^2}{Q_1} - 2\frac{Q_1'^2 Q_1''}{Q_1^2} + \\ + 8\left(6\frac{AC}{B} - B - C\right)Q_1^2 Q_1'' + 4(B - 2C)Q_1 Q_1'^2 + 24C\left(4\frac{AC}{B} - B\right)Q_1^5 + \\ + \left[12\frac{A}{B}\omega_1 - 4\omega_2 + \left(1 + 12\frac{A}{B}\right)\frac{\gamma}{Q_1} - 4\left(1 + 3\frac{A}{B}\right)\frac{\alpha}{Q_1^4}\right]Q_1'' + \\ + 6\frac{A}{B}\frac{\alpha^2}{Q_1^7} + 20\frac{\alpha}{Q_1^5}Q_1'^2 - 12\frac{A}{B}\frac{\gamma\alpha}{Q_1^4} + 4\left(3\frac{A}{B}\omega_1 - \omega_2\right)\left(\gamma - \frac{\alpha}{Q_1^3}\right) - 2\gamma\frac{Q_1'^2}{Q_1^2} + \\ + 6\left(\frac{A}{B}\gamma^2 + 2B\alpha - 8\frac{AC}{B}\alpha\right)\frac{1}{Q_1} + \left(6\frac{A}{B}\omega_1^2 - 4\omega_1\omega_2 - 8BE\right)Q_1 + \\ + 48\frac{AC}{B}\gamma Q_1^2 + 4\left(12\frac{AC}{B} - B - 4C\right)\omega_1 Q_1^3 = 0. \quad (15)$$

Это ОДУ зависит от E , но не от β и, в противоположность кубичному случаю, не попадает в классификацию, потому что Q_1'''' не является многочленом по Q_1 .

В трех оставшихся случаях, поскольку невозможно ни выполнить разделение переменных, ни установить прямую связь с классифицированными ОДУ, мы построим не прямую связь с неким ОДУ, входящим в классификацию. Эта связь, включающая в себя солитонные уравнения, такова.

В каждом из семи случаев два уравнения Гамильтона эквивалентны [7], [15], [21] редукции бегущей волны солитонной системы, состоящей или из одного дифференциального уравнения в частных производных (ДУЧП) (ЭЭЗ), или из двух связанных ДУЧП (ЭЭ4), большинство из которых фигурирует в списках, построенных с помощью теории групп [22]. Среди различных солитонных уравнений, эквивалентных им посредством преобразования Беклунда, некоторые допускают редукцию бегущей волны к ОДУ, входящему в классификацию. Это свойство определяет способ действий [23], [24], состоящий в том, чтобы начать с одного из трех оставшихся случаев ЭЭ4, перейти к солитонной системе двух связанных $(1+1)$ -мерных ДУЧП, допускающих редукцию к рассматриваемому случаю, и затем перейти к другой $(1+1)$ -мерной системе ДУЧП, эквивалентной с точностью до преобразования Беклунда, и, наконец, осуществить редукцию к уже интегрируемому ОДУ или системе ОДУ.

5. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЕВ 1:6:1 И 1:6:8 ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Введем следующие обозначения для двух интегралов движения в случаях 1 : 6 : 1 и 1 : 6 : 8:

1 : 6 : 1 –

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + \frac{\Omega}{2}(Q_1^2 + Q_2^2) - \\ &\quad - \frac{1}{32}(Q_1^4 + 6Q_1^2Q_2^2 + Q_2^4) - \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_1^2}{Q_1^2} + \frac{\kappa_2^2}{Q_2^2}\right) = E, \\ K &= \left(P_1P_2 + Q_1Q_2\left(-\frac{Q_1^2 + Q_2^2}{8} + \Omega\right)\right)^2 - \\ &\quad - P_2^2\frac{\kappa_1^2}{Q_1^2} - P_1^2\frac{\kappa_2^2}{Q_2^2} + \frac{1}{4}(\kappa_1^2Q_2^2 + \kappa_2^2Q_1^2) + \frac{\kappa_1^2\kappa_2^2}{Q_1^2Q_2^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

1 : 6 : 8 –

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{\omega}{2}(4q_1^2 + q_2^2) - \\ &\quad - \frac{1}{16}(8q_1^4 + 6q_1^2q_2^2 + q_2^4) - \gamma q_1 + \frac{\beta}{2q_2^2} = E, \\ K &= \left(p_2^2 - \frac{q_2^2}{16}(2q_2^2 + 4q_1^2 + \omega) + \frac{\beta}{q_2^2}\right)^2 - \frac{1}{4}q_2^2(q_2p_1 - 2q_1p_2)^2 + \\ &\quad + \gamma\left(-2\gamma q_2^2 - 4q_2p_1p_2 + \frac{1}{2}q_1q_2^4 + q_1^3q_2^2 + 4q_1p_2^2 - 4\omega q_1q_2^2 + 4q_1\frac{\beta}{q_2^2}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Имеется каноническое преобразование [15] между случаями 1 : 6 : 1 и 1 : 6 : 8, при котором постоянные отображаются как

$$H_{1:6:8} = H_{1:6:1}, \quad K_{1:6:8} = K_{1:6:1}, \quad \omega = \Omega, \quad \gamma = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \quad \beta = -(\kappa_1 - \kappa_2)^2, \quad (18)$$

и поэтому достаточно провести интегрирование только для одного из случаев.

Путь к интегрируемому ОДУ состоит из следующих трех частей.

Координату $q_1(t)$ в случае $1 : 6 : 8$ можно отождествить [12], [15] с компонентой F редукции бегущей волны $f(x, \tau) = F(x - c\tau)$, $g(x, \tau) = G(x - c\tau)$ солитонной системы двух связанных уравнений типа КдФ (система с-KdV), обозначаемых с-KdV₁ [12], [15],

$$\begin{aligned} f_\tau + \left(f_{xx} + \frac{3}{2}ff_x - \frac{1}{2}f^3 + 3fg \right)_x &= 0, \\ -2g_\tau + g_{xxx} + 6gg_x + 3fg_{xx} + 6gf_{xx} + 9f_xg_x - 3f^2g_x + \\ + \frac{3}{2}f_{xxx} + \frac{3}{2}ff_{xx} + 9f_xf_{xx} - 3f^2f_{xx} - 3ff_x^2 &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

при отождествлении

$$\begin{aligned} q_1 &= F, \quad q_2^2 = -2(F' + F^2 + 2G - 2\omega), \\ c &= -\omega, \quad K_1 = \gamma, \quad K_2 = E, \end{aligned} \quad (20)$$

где K_1 и K_2 — две постоянные интегрирования.

Существует преобразование Беклунда между этой солитонной системой и другой системой типа с-KdV, обозначаемой как bi-SH-система [22],

$$\begin{aligned} -2u_\tau + (u_{xx} + u^2 + 6v)_x &= 0, \\ v_\tau + v_{xx} + uv_x &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Это преобразование Беклунда определяется преобразованием Миуры [23]

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{2}(2g - f_x - f^2), \\ v &= \frac{3}{4}(2f_{xxx} + 4ff_{xx} + 8gf_x + 4fg_x + 3f_x^2 - 2f^2f_x - f^4 + 4gf^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Наконец, редукцию бегущей волны $u(x, \tau) = U(x - c\tau)$, $v(x, \tau) = V(x - c\tau)$ можно отождествить [24] с автономным F-VI уравнением (а-F-VI) в классификации Косгроува [3],

$$\begin{aligned} y'''' &= 18yy'' + 9y'^2 - 24y^3 + \alpha_{VI}y^2 + \frac{\alpha_{VI}^2}{9}y + \kappa_{VI}t + \beta_{VI}, \\ \kappa_{VI} &= 0 \quad (\text{а-F-VI}), \end{aligned} \quad (23)$$

общее решение этого ОДУ является мероморфным и выражается через гиперэллиптические функции рода два ([3], уравнение (7.26)). Отождествление имеет вид

$$\begin{aligned} U &= -6 \left(y + \frac{c}{18} \right), \\ V &= y'' - 6y^2 + \frac{4}{3}cy + \frac{16}{27}c^2 - \frac{K_A}{2}, \\ \alpha_{VI} &= -4c, \quad \beta_{VI} = K_B - 2cK_A + \frac{512}{243}c^3, \end{aligned} \quad (24)$$

где K_A, K_B — две постоянные интегрирования.

Чтобы выполнить интегрирование и для случая $1 : 6 : 1$, и для случая $1 : 6 : 8$, достаточно рациональным образом выразить (F, G) через (U, V, U', V') . В результате имеем

$$\begin{aligned} F &= \frac{W'}{2W} + \frac{K_1}{24W} [-3U'^2 - 2(U - 3c)(12V + (U + 3c)^2) + 36K_B - 54K_1^2], \\ G &= \frac{U}{3} + \frac{1}{8W} [(2V + 3K_2)(2V'' + K_1U' - 3K_1^2) - \\ &\quad - 2(U - 3c)(2K_1V' + K_1^2(U + 3c))], \\ W &= \left(V + \frac{3}{2}K_2\right)^2 + \frac{3}{2}K_1^2(U - 3c), \quad K_A = K_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Составляя произведение последовательных преобразований (20), (25), (24), получим мероморфное общее решение для q_1, q_2^2 вида

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{W'}{2W} + \frac{\gamma}{W} \left[9j - 3\left(y + \frac{4}{9}\omega\right)(h + E) - \frac{9}{4}\gamma^2 \right], \\ q_2^2 &= -16\left(y - \frac{5}{9}\omega\right) + \\ &\quad + \frac{1}{W} \left[12\left(y' + \frac{\gamma}{2}\right)^2 - 48y^3 - 16\omega y^2 + \left(24E + \frac{128}{9}\omega^2\right)y + \frac{1280}{243}\omega^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{40}{3}\omega E + \frac{3}{4}\beta - 24\gamma\left(y - \frac{5}{9}\omega\right)h' - 144\gamma^2\left(y - \frac{5}{9}\omega\right)^2 \right], \\ W &= (h + E)^2 - 9\gamma^2\left(y - \frac{5}{9}\omega\right), \\ \alpha_{VI} &= 4\omega, \quad \beta_{VI} = \frac{3}{4}\gamma^2 + 2\omega E - \frac{3}{16}\beta - \frac{512}{243}\omega^3, \\ K_{1,VI} &= \frac{3}{32}K - \frac{1}{2}E^2, \quad K_{2,VI} = \frac{3}{32}EK - \frac{1}{3}E^3 + \frac{9}{64}\beta\gamma^2, \\ K_1 &= \gamma, \quad K_2 = E, \quad K_A = E, \quad K_B = -\frac{3}{16}\beta + \frac{3}{4}\gamma^2, \end{aligned} \quad (26)$$

где h и j — удобные вспомогательные переменные ([3], уравнения (7.4), (7.5)),

$$\begin{aligned} y &= \frac{Q(s_1, s_2) + \sqrt{Q(s_1)Q(s_2)}}{2(\sqrt{s_1^2 - C_{VI}} + \sqrt{s_2^2 - C_{VI}})^2} + \frac{5}{36}\alpha_{VI}, \\ h &= -\frac{3}{4}E_{VI} \frac{s_1 s_2 + C_{VI} + \sqrt{(s_1^2 - C_{VI})(s_2^2 - C_{VI})}}{s_1 + s_2} - \frac{F_{VI}}{2}, \\ j &= \frac{1}{6}(2h + F_{VI}) \left\{ y + \frac{\alpha_{VI}}{9} - \frac{E_{VI}}{4(s_1 + s_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь переменные s_1, s_2 определяются *гиперэллиптической системой* [3]

$$\begin{aligned} (s_1 - s_2)s'_1 &= \sqrt{P(s_1)}, \quad (s_2 - s_1)s'_2 = \sqrt{P(s_2)}, \\ P(s) &= (s^2 - C_{VI})Q(s), \\ Q(s, t) &= (s^2 - C_{VI})(t^2 - C_{VI}) - \frac{\alpha_{VI}}{2}(s^2 + t^2 - 2C_{VI}) + \frac{E_{VI}}{2}(s + t) + F_{VI}, \\ Q(s) &= Q(s, s). \end{aligned} \quad (28)$$

Выражения (27) нельзя записать в виде рациональных функций от s_1, s_2, s'_1, s'_2 , но они являются тем не менее мероморфными [25]–[27].

Коэффициенты $(\alpha, C, E, F)_{VI}$ гиперэллиптической кривой алгебраически зависят от параметров гамильтонианов $\beta, \gamma, \omega, E, K$ ([3], уравнения (7.9)–(7.12)),

$$\begin{aligned} A_{VI} &= 4\omega, \\ E_{VI}^2 &= -\frac{16}{3}\omega(F_{VI} - 2E) - \beta + 4\gamma^2, \\ C_{VI}E_{VI}^2 &= \frac{4}{3}(F_{VI}^2 - 4E^2) + K, \\ (F_{VI} - 2E)^2(F_{VI} + 4E) + \frac{9K}{4}(F_{VI} - 2E) - \frac{27}{4}\beta\gamma^2 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

и эта алгебраическая зависимость может объяснить трудность разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Заметим, что в частном случае, когда $\beta\gamma = 0$, т.е. $\kappa_1^2 = \kappa_2^2$, эти коэффициенты становятся рациональными, см. [28].

ЗАМЕЧАНИЕ. ОДУ F-VI можно записать в гамильтоновом виде

$$\begin{aligned} H &= P_2^2 + Q_2P_1 - \frac{Q_1^4}{6} + \frac{3}{2}Q_1Q_2^2 - \frac{13}{1296}\alpha_{VI}^3Q_1 + \frac{1}{16}\alpha_{VI}^2Q_1^2 - \frac{1}{8}\alpha_{VI}Q_2^2 - \\ &\quad - 6\beta_{VI}Q_1 - 6\kappa_{VI}tQ_1 + \frac{347}{2^9 3^3}\alpha_{VI}^4 + \frac{9}{2}\alpha_{VI}\beta_{VI}, \\ Q_1 &= -6\left(y - \frac{\alpha_{VI}}{72}\right), \quad Q_2 = -6y', \quad P_1 = 6y''' - 108yy', \quad P_2 = -6y''. \end{aligned} \quad (30)$$

В автономном случае $\kappa_{VI} = 0$ гамильтониан H является первым интегралом (равным $36K_{1,VI}$), а остальные интегралы движения кубичны по импульсам. Однако из-за нелинейной связи между $K_{1,VI}$ и двумя первыми интегралами в случае $1 : 6 : 8$ (см. (24)) не существует канонического преобразования между переменными (q_j, p_j) для $1 : 6 : 8$ и приведенными выше каноническими переменными для а-F-VI.

6. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ 1:12:16 ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Введем обозначения для двух констант в инволюции для случая 1 : 12 : 16 –

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + \frac{\Omega}{8}(4Q_1^2 + Q_2^2) - \frac{1}{32}(16Q_1^4 + 12Q_1^2Q_2^2 + Q_2^4) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_1^2}{Q_1^2} + \frac{4\kappa_2^2}{Q_2^2}\right) = E, \\ K &= \frac{1}{16}\left(8(Q_2P_1 - Q_1P_2)P_2 - Q_1Q_2^4 - 2Q_1^3Q_2^2 + 2\Omega Q_1Q_2^2 + 32Q_1\frac{\kappa_2^2}{Q_2^2}\right)^2 - \\ &\quad - \kappa_1^2\left(Q_2^4 + 10\frac{Q_2^2P_2^2}{Q_1^2}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично связи между 1 : 6 : 1 и 1 : 6 : 8 существует каноническое преобразование между гамильтонианом 1 : 12 : 16 и другим гамильтонианом [12], [15] (не являющимся, впрочем, суммой кинетической и потенциальной энергий), который мы по аналогии обозначим 5 : 9 : 4 –

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \left(p_2 - \frac{3}{2}q_1q_2\right)^2\right) - \frac{1}{8}(4q_1^4 + 9q_1^2q_2^2 + 5q_2^4) + \frac{\omega}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \kappa q_1 + \frac{\zeta}{2q_2^2} = E, \\ K &= \frac{1}{q_2^2}(2q_2^2p_1 + 2q_1^2q_2^2 - 2q_1q_2p_2 - q_2^4 - 4\kappa q_1)^2 \times \\ &\quad \times \left(2q_2^2p_1 + 2q_1^2q_2^2 + p_2^2 - 4q_1q_2p_2 - 2q_2^4 + \omega q_2^2 + 4\frac{\kappa^2}{q_2^2} + 8\kappa q_1 - 4\kappa\frac{p_2}{q_2}\right) + \\ &\quad + 4(\zeta + 4\kappa^2)\left(\left(-2q_1\frac{p_2}{q_2} + 4q_1^2 + q_2^2 + 4q_1\frac{\kappa}{q_2^2}\right)p_1 - \frac{1}{q_2^4}(q_1^2q_2^2 + q_2^4 + 2\kappa q_1)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\frac{q_1^2}{q_2^2}\left(p_2 - \frac{3}{2}q_1q_2\right)^2 + \frac{(q_1^2 + q_2^2)^2}{2} + q_1^2\frac{\zeta}{q_2^4}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$H_{5:9:4} = H_{1:12:16}, \quad K_{5:9:4} = K_{1:12:16}, \quad \omega = \Omega, \quad \kappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \quad \zeta = -(\kappa_1 - \kappa_2)^2.$$

Путь к интегрируемому ОДУ также вполне аналогичен и составлен из следующих трех частей [15], [29], [23].

Во-первых, координата $q_1(t)$ в (32) отождествляется [12], [15] с компонентой F редукции бегущей волны $f(x, \tau) = F(x - c\tau)$, $g(x, \tau) = G(x - c\tau)$ солитонной системы двух связанных уравнений типа КдФ, обозначаемых как с-KdVa(f, g) [12], [15],

$$q_1 = F, \quad q_2^2 = \frac{2}{5}(F' - 2F^2 - G + \omega). \quad (33)$$

Во-вторых, существует преобразование Беклунда между этой солитонной системой и другой системой типа с-KdV, обозначаемой как bi-SK-система (u, v) [30], причем преобразование определяется отображением Миуры

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{10}(3f_x - f^2 + 2g), \\ v &= \frac{9}{10}(f_{xxx} + g_{xx} + f_xg - fg_x - f f_{xx} + g^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Наконец, редукция бегущей волны $u(x, \tau) = U(x - c\tau)$, $v(x, \tau) = V(x - c\tau)$ с помощью соотношений

$$U = -3\left(y - \frac{\omega}{30}\right), \quad V = -6y'' + 18y^2 - \frac{9}{5}\omega y + \frac{1}{10}\omega^2 - \frac{3}{5}E \quad (35)$$

отождествляется [24] с уравнением F-IV (или, равным образом, F-III) в классификации Костроува [3]:

$$\begin{aligned} y'''' &= 30yy'' - 60y^3 + \alpha_{IV}y + \beta_{IV}, \\ y &= \frac{1}{2}(s'_1 + s'_2 + s_1^2 + s_1s_2 + s_2^2 + A), \\ (s_1 - s_2)s'_1 &= \sqrt{P(s_1)}, \quad (s_2 - s_1)s'_2 = \sqrt{P(s_2)}, \\ P(s) &= (s^2 + A)^3 - \frac{\alpha_{IV}}{3}(s^2 + A) + Bs + \frac{\beta_{IV}}{3}, \\ K_{1,IV} &= \left(\frac{3B}{4}\right)^2, \quad K_{2,IV} = -\frac{9AB^2}{64}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $(K_{1,IV}, K_{2,IV})$ обозначают два полиномиальных первых интеграла уравнения F-IV. Общее решение этого ОДУ является мероморфным и выражается через гиперэллиптические функции рода два [3].

Для интегрирования обоих гамильтонианов (31) и (32) достаточно рациональным образом выразить (F, G) через (U, V, U', V') . В результате имеем

$$\begin{aligned} F &= -\frac{W'}{2W} + K_{1,a}X_2, \\ G &= -F^2 - X_1X_2 + K_{1,a}\frac{54U'}{X_1} - 54K_{1,a}\left(U + \frac{3\omega}{20}\right)\frac{W'}{WX_1} + \frac{2}{3}\left(U + \frac{9\omega}{10}\right), \\ W &= X_1^2 + 108K_{1,a}^2\left(U + \frac{3\omega}{20}\right), \\ X_1 &= V + 2U^2 - 3\omega U + \frac{9}{50}\omega^2 - \frac{27}{5}E, \\ X_2 &= 9\left(-4U'^2 + \frac{8}{3}UV - \frac{8}{25}\omega U^2 + \frac{2}{5}\omega V + \frac{48}{5}EU - \right. \\ &\quad \left. - \frac{42}{25}\omega^2 U - \frac{9}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - \frac{9}{2}K_{1,a}^2 + \frac{36}{25}\omega E - \frac{27}{125}\omega^3\right), \\ K_{1,a} &= \kappa_1 - \kappa_2. \end{aligned} \quad (37)$$

С точки зрения разделения переменных следует сначала привести гамильтоново представление уравнения F-IV. Одной такой структурой является структура кубичного SK-случая. Но поскольку значение гамильтониана в кубичном SK-случае, выраженное только в терминах параметров $(E, K, \omega, \kappa_1, \kappa_2)$ для $1 : 12 : 16$, не является аффинной функцией от E , не существует канонического преобразования между кубичным SK-случаем и случаем $1 : 12 : 16$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Явное интегрирование всех семи случаев в смысле Пенлеве (нахождение в замкнутом виде однозначного выражения для общего решения) теперь достигнуто, и общие свойства таковы.

1. Во всех случаях общее решение является гиперэллиптическим рода два, а потому мероморфным.

2. Каждый случай бирационально эквивалентен ОДУ четвертого порядка, которое является *полным* в смысле Пенлеве, т.е. таким, которое не допускает дополнительных членов, не нарушающих свойства Пенлеве. Следовательно, для каждого из семи гамильтонианов невозможно добавить никакой член в гамильтониан без нарушения свойства Пенлеве, и семь гамильтонианов Эно–Эйлеса являются полными.

В отношении интегрирования в смысле Арнольда–Лиувилля (нахождение разделяющихся переменных в уравнении Гамильтона–Якоби) все задачи остаются открытыми.

1. В случаях $1 : 6 : 1$, $1 : 6 : 8$ гиперэллиптическая кривая $y^2 = P(s)$ уравнения F-VI (см. (28)) редуцируется в разделяющихся случаях $\beta\gamma = 0$ к гиперэллиптической кривой, соответствующей разделенным переменным. Поэтому F-VI является подходящим для рассмотрения ОДУ, и единственным недостающим звеном является нахождение гамильтоновой структуры уравнения F-VI, с необходимостью отличной от (30), допускающей каноническое преобразование к случаям $1 : 6 : 1$, $1 : 6 : 8$.

2. В случаях $1 : 12 : 16$, $5 : 9 : 4$ гиперэллиптическая кривая $y^2 = P(s)$ уравнения F-IV (см. (36)) не редуцируется в разделяющихся случаях $\kappa_1\kappa_2 = 0$ [29] к гиперэллиптической кривой, соответствующей разделенным переменным, которая имеет вид

$$P(s) = s^6 - \omega s^3 + 2Es^2 + \frac{K}{20}s + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 0 \quad (\kappa_1\kappa_2 = 0). \quad (38)$$

Поэтому уравнение F-IV (равно как и бирационально эквивалентное ОДУ F-III) не является подходящим для рассмотрения ОДУ, и в этом случае должно оказаться весьма поучительным проинтегрировать эквивалентное ОДУ четвертого порядка (15).

Благодарности. Авторы отмечают финансовую поддержку со стороны Tournesol (грант № T2003.09). К.В. является Postdoctoral fellow в FWO-Vlaanderen.

Список литературы

- [1] *M. Hénon, C. Heiles.* Astron. J. 1964. V. 69. P. 73–79.
- [2] *R. Conte, M. Musette, C. Verhoeven.* J. Nonlinear Math. Phys. Suppl. 2005. V. 12. № 1. P. 212–227.
- [3] *C. M. Cosgrove.* Stud. Appl. Math. 2000. V. 104. P. 1–65.
- [4] *В. И. Арнольд.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [5] *R. Conte.* The Painlevé approach to nonlinear ordinary differential equations. In: The Painlevé Property. One Century Later (Cargèse School, 3–22 June 1996). CRM Series in Mathematical Physics. Ed. R. Conte. N.Y.: Springer, 1999. P. 77–180; solv-int/9710020.
- [6] *Y. F. Chang, M. Tabor, J. Weiss.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 531–538.
- [7] *A. P. Fordy.* Physica D. 1991. V. 52. P. 204–210.
- [8] *R. Conte, A. P. Fordy, A. Pickering.* Physica D. 1993. V. 69. P. 33–58.

- [9] *A. Ramani, B. Dorizzi, B. Grammaticos.* Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1539–1541.
- [10] *B. Grammaticos, B. Dorizzi, A. Ramani.* J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 2289–2295.
- [11] *J. Drach.* C. R. Acad. Sci. Paris. 1919. V. 168. P. 337–340.
- [12] *S. Baker, V. Z. Enol'skii, A. P. Fordy.* Phys. Lett. A. 1995. V. 201. P. 167–174.
- [13] *J. Hietarinta.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 1833–1840.
- [14] *J. Hietarinta.* Phys. Rep. 1987. V. 147. P. 87–154.
- [15] *S. Baker.* Squared eigenfunction representations of integrable hierarchies. PhD Thesis. Leeds: Univ. of Leeds, 1995.
- [16] *S. Wojciechowski.* Physica Scripta. 1985. V. 31. P. 433–438.
- [17] *V. Ravoson, L. Gavrilov, R. Caboz.* J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 2385–2393.
- [18] *C. Verhoeven, M. Musette, R. Conte.* J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 1906–1915; nlin.SI/0112030.
- [19] *T. Bountis, H. Segur, F. Vivaldi.* Phys. Rev. A. 1982. V. 25. P. 1257–1264.
- [20] *V. Ravoson, A. Ramani, B. Grammaticos.* Phys. Lett. A. 1994. V. 191. P. 91–95.
- [21] *A. P. Fordy, P. P. Kulish.* Commun. Math. Phys. 1983. V. 89. P. 427–443.
- [22] *В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов.* ДАН СССР. 1981. Т. 258. С. 11–16.
- [23] *М. Музетте, К. Верховен.* ТМФ. 2003. Т. 137. № 2. С. 239–252.
- [24] *C. Verhoeven, M. Musette, R. Conte.* On reductions of some KdV-type systems and their link to the quartic Hénon–Heiles Hamiltonian. In: Bilinear Integrable Systems – from Classical to Quantum, Continuous to Discrete. Proc. of the NATO Advanced Research Workshop (St. Petersburg, Russia, 15–19 September 2002). NATO Sci. Ser. II: Math. Phys. Chem. V. 201. Eds. L. Faddeev, P. van Moerbeke, F. Lambert. Dordrecht: Kluwer, 2005; nlin.SI/0405034.
- [25] *S. Abenda, Yu. Fedorov.* Acta Appl. Math. 2000. V. 60. P. 137–178.
- [26] *N. Farkas, E. Kra.* Riemann surfaces. Berlin: Springer, 1980.
- [27] *Д. Мамфорд.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
- [28] *К. Верховен, М. Музетте, Р. Конт.* ТМФ. 2003. Т. 134. № 1. С. 148–159; nlin.SI/0301011.
- [29] *C. Verhoeven.* Integration of Hamiltonian systems of Hénon–Heiles type and their associated soliton equations. PhD thesis. Brussel: Vrije Univ. Brussel, 2003.
- [30] *A. Ramani.* Inverse scattering, ordinary differential equations of Painlevé-type, and Hirota's bilinear formalism. In: Collective Phenomena. Proc. of the 4th Int. Conf. (Moscow, 1981). Ann. New York Acad. Sci. V. 373. Ed. J. L. Lebowitz. N.Y.: New York Acad. Sci., 1981. P. 54–67.