Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Дюваль, П. А. Хорвати, Некоммутативные координаты, экзотические частицы и аномальные анионы в эффекте Холла, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 26–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1828>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 09:20:07

© 2005 г.

С. Дюваль*, П. А. Хорвати†

НЕКОММУТАТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ, ЭКЗОТИЧЕСКИЕ ЧАСТИЦЫ И АНОМАЛЬНЫЕ АНИОНЫ В ЭФФЕКТЕ ХОЛЛА

Дан обзор предложенной ранее модели “экзотической частицы” и более новой модели аномального аниона, которая обладает произвольным гиромагнитным отношением g . Нерелятивистский предел модели аниона обобщает модель экзотической частицы, которая имеет гиромагнитное отношение $g = 0$, до модели с произвольным g . В плоском электромагнитном поле эффект Холла становится обязательным для всех $g \neq 2$, когда поле принимает некоторое критическое значение.

Ключевые слова: экзотическая галилеева симметрия, некоммутативные координаты, эффект Холла.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классические заряженные частицы в задаче Ландау движутся вдоль спиральных траекторий вокруг направляющего центра, который, в свою очередь, подчиняется закону Холла. В квантово-механическом случае ограничение на движение направляющего центра означает проецирование на нижний уровень Ландау (НУЛ). Координаты направляющего центра являются некоммутирующими [1]–[3],

$$[Q_1, Q_2] = \frac{i}{eB}. \quad (1.1)$$

По Лафлину, дробный квантовый эффект Холла (ДКЭХ), наблюдаемый в тонких пленках полупроводниковых гетероструктур, должен объясняться в пределах НУЛ [4]. При более точном описании заряды становятся квазичастицами, а именно заряженными

*Centre de Physique Théorique, CNRS, Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France; UMR 6207 du CNRS associée aux Universités d'Aix-Marseille I et II et Université du Sud Toulon-Var; laboratoire affilié à la FRUMAM-FR2291

†Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique, Université de Tours, Parc de Grandmont, F-37200 Tours, France. E-mail: horvathy@univ-tours.fr

плоскими вихрями [3], [4], динамика которых может быть описана простой гамильтоновой моделью¹⁾ [5], [6]. Координаты снова являются некоммутирующими. Фактически, эта модель может быть получена посредством редукции модели “экзотической частицы” [7]. Последняя связана с двукратным центральным расширением плоской группы Галилея [8] и с самого начала обладает некоммутирующими координатами. Для критического значения магнитного поля (см. далее (2.11)) единственными разрешенными движениями являются движения, подчиняющиеся закону Холла [7]. Квантование позволило вывести те волновые функции, с которых начинал Лафлин, и снова получить коммутационное соотношение (1.1) [7].

Мы полагаем, что наши экзотические частицы должны описывать эффективное движение квазичастиц Лафлина, хотя до сих пор мы не имеем убедительного доказательства, а лишь косвенные свидетельства этого факта.

Математически “экзотическая модель” возникает благодаря особым свойствам плоскости, а именно коммутативности вращений [8]. Но в чем физическая природа этой модели? Джакив и Наир [9] получили свободную экзотическую модель как нерелятивистский предел анионов²⁾, тогда как второй параметр расширения группы Галилея возникает как “нерелятивистская тень” релятивистского спина [10].

Взаимодействие анионов с электромагнитным полем рассматривалось в работах [11], [12]; в работе [9] было заявлено, что наша экзотическая система с взаимодействием на самом деле будет пределом Джакива–Наира (ДН-предел) системы Чоу и др. [11]. То, что это не может быть справедливо, видно из сравнения гиромагнитных отношений. Модель в работе [11] обладает гиромагнитным отношением $g = 2$; по сути, некоторые теоретики в области физики высоких энергий [11], [12] утверждали, что гиромагнитное отношение анионов непременно равно 2. Это противоречит экспериментальным данным: для ДКЭХ $g \sim 0$ [3], [13].

В новой работе [14] предложена обобщенная анионная модель, которая допускает любое значение гиромагнитного отношения. Установлено, что в случае $g \neq 2$ все движения подчиняются закону Холла, если поле и спин удовлетворяют некоторому соотношению, которое обобщает (2.11). Нерелятивистские аналоги могут быть получены переходом к ДН-пределу. В частном случае $g = 0$ мы возвращаемся к экзотической модели работ [7].

2. ЭКЗОТИЧЕСКИЕ ЧАСТИЦЫ

Экзотическая модель работ [7], связанная с двукратным центральным расширением группы Галилея [8], была построена в работах [7], [15] с помощью теоретико-группового метода Сурьё [16]. Будем использовать более традиционный язык. Рассмотрим четы-

¹⁾Эта модель имеет длинную историю, отраженную в [6]: относительное движение точечных вихрей описывается этой моделью в работе Миттага, Стефена, Йорггау (1968 г.); ранее она использовалась Онзагером для описания вихрей в пленках сверхтекучего гелия (1949 г.); Онзагер фактически ссылается на Лэмба (1932 г.), который, в свою очередь, упоминает, что эта модель в действительности открыта в работе Кирхгофа (1883 г.); подробности можно найти в работах П. Хорвати.

²⁾Под “анионом” мы понимаем просто частицу в плоскости, обладающую (произвольным) спином.

рехмерное фазовое пространство, снабженное “экзотической симплектической структурой” Ω_0 , с заданным свободным гамильтонианом H_0 :

$$\Omega_0 = d\vec{p} \wedge d\vec{x} + \frac{\theta}{2} \epsilon_{ij} dp_i \wedge dp_j, \quad H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \quad (2.1)$$

Отметим, что второй (“экзотический”) член симплектической структуры существует только на плоскости. По построению система (2.1) реализует двукратное центральное расширение галилеевой симметрии [8], [7]. Энергия и импульс имеют обычный вид; экзотическая структура проявляется только в моменте импульса и галилеевых бустах:

$$j = \vec{x} \times \vec{p} + \frac{1}{2} \theta \vec{p}^2, \quad (2.2)$$

$$K_i = mx_i - p_i t + m\theta \epsilon_{ij} p_j.$$

Коммутационные соотношения имеют обычный вид, за исключением соотношения для бустов:

$$\{K_1, K_2\} = -m^2 \theta, \quad (2.3)$$

которое является признаком “экзотической галилеевой симметрии” [8]. Минимальное взаимодействие достигается путем добавления электромагнитной 2-формы eF [16]. Это приводит к фундаментальным скобкам Пуассона

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \frac{m}{m^*} \theta, \\ \{x_i, p_j\} &= \frac{m}{m^*} \delta_{ij}, \\ \{p_1, p_2\} &= \frac{m}{m^*} eB, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$m^* = m(1 - \theta eB). \quad (2.5)$$

Наши коммутационные соотношения (2.4) похожи, но все же отличаются от соотношений, постулированных позднее Наиром и Полихронакосом [17]

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \theta, \\ \{x_i, p_j\} &= \delta_{ij}, \\ \{p_1, p_2\} &= eB. \end{aligned} \quad (2.6)$$

На самом деле две системы эквивалентны только в случае свободных частиц, $F = 0$.

Внешне соотношения (2.6) выглядят более естественно. Однако они состоятельны только в случае однородного магнитного поля $\vec{\nabla} B = 0$; в противном случае нарушается тождество Якоби [7]:

$$\{x_i, \{p_1, p_2\}\}_{\text{cyclic}} = \theta \epsilon_{ij} \partial_j B. \quad (2.7)$$

С другой стороны, странного вида “экзотические соотношения” (2.4) требуют только выполнения естественного условия $dF = 0$ и имеют поэтому более широкую область

применения. Различие между моделями происходит из-за взаимодействия: в то время как мы используем рецепт Сурьё (добавляя 2-форму), авторы работы [17] постулируют скобки Пуассона (2.6). Модели могут быть преобразованы одна в другую путем следующего переопределения времени:

$$t \rightarrow \frac{m}{m^*} t, \quad (2.8)$$

что исправляет недостаток соотношений (2.6) для любого B такого, что $m^* \neq 0$. Однако при $m^* = 0$ такое преобразование невозможно, что приводит к неэквивалентному поведению моделей.

Далее мы будем рассматривать только более удовлетворительную экзотическую модель.

В рамках лагранжева подхода наша минимально взаимодействующая система описывается выражением первого порядка [7]

$$L = (\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \dot{\vec{x}} - \frac{\vec{p}^2}{2m} - eV + \frac{\theta}{2} \vec{p} \times \dot{\vec{x}}. \quad (2.9)$$

В соответствующих уравнениях Эйлера–Лагранжа (или, эквивалентно, в уравнениях Гамильтона)

$$\begin{aligned} m^* \dot{x}_i &= p_i - e m \theta \epsilon_{ij} E_j, \\ \dot{p}_i &= e E_i + e B \epsilon_{ij} \dot{x}_j \end{aligned} \quad (2.10)$$

параметры расширения объединяются с магнитным полем в *эффективную массу* m^* в выражении (2.5). В случае ненулевой эффективной массы ($m^* \neq 0$) движения похожи на движения обычной частицы в плоском электромагнитном поле. Однако когда эффективная масса обращается в нуль ($m^* = 0$), т.е. в случае

$$B = \frac{1}{e\theta}, \quad (2.11)$$

система становится сингулярной, и совместимость уравнений движения (2.10) может быть сохранена, только если *координаты направляющего центра*

$$Q_i = x_i - \frac{m E_i}{e B^2} \quad (2.12)$$

подчиняются закону Холла,

$$\dot{Q}_i = \epsilon_{ij} \frac{E_j}{B}, \quad (2.13)$$

где $E_i = -\partial_i V$. Доказательство можно провести следующим образом. Положим

$$\tilde{Q}_i = x_i + \epsilon_{ij} \frac{p_j}{e B} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\tilde{Q}}_i = \dot{x}_i + \epsilon_{ij} \frac{\dot{p}_j}{e B}.$$

Подставим сюда скорость, полученную из выражения для силы Лоренца,

$$\dot{x}_i = \epsilon_{ij} \frac{E_j}{B} - \epsilon_{ij} \frac{\dot{p}_j}{e B};$$

при этом содержащие $\dot{p}_j$ члены сокращаются, и остается выражение³⁾ (2.13) для $\tilde{Q}$. Характерная особенность здесь заключается в том, что при $m^* = 0$ первое уравнение в (2.10) влечет

$$p_i = m\epsilon_{ij} \frac{E_j}{B}. \quad (2.14)$$

Импульс, таким образом, не является более динамической переменной, поскольку он определяется положением. Единственные динамические степени свободы суть величины $\tilde{Q}_i$ (в действительности $\tilde{Q}_i = Q_i$ в силу (2.14)), движение которых (подчиняющееся закону Холла) определяет движение физических координат x_i . Тем самым реализуется идея Лафлина, который утверждал, что ДКЭХ должен означать “конденсацию в коллективное основное состояние” [4].

В случае постоянного электрического поля, в частности, дополнительный член в (2.12) просто является константой и сама частица подчиняется закону Холла.

Условие (2.11) согласуется с (1.1), так как оно фиксирует значение магнитного поля как функции некоммутативного параметра θ , рассматриваемого как физический параметр частицы на том же основании, что и масса. Для этого значения проецирование на НУЛ обязательно.

Наглядная картина такова. При $m^* \neq 0$ частица движется вдоль спиральных траекторий вокруг направляющего центра. Движение последнего может на самом деле представлять собой реальное движение при специальных начальных условиях, когда начальная скорость такова, что сила Лоренца в точности компенсируется электрической силой. Тогда движение происходит вдоль эквипотенциальных поверхностей. Однако когда $m^* \rightarrow 0$, у нас остается только движение направляющего центра, поскольку начальные условия, отвечающие возможному спиральному движению, оказываются запрещенными. Результатом несовместимости начальных условий является мгновенное распространение [7], что делает квантовый пропагатор конечным для бесконечно малого времени [2].

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ АНИОНЫ

“Экзотическое расширение” играет, следовательно, малую роль в случае свободной частицы, но становится важным при рассмотрении взаимодействий. Это напоминает то, что происходит в случае частицы со спином. Такое сходство не случайно: как было отмечено Наиром и Джакивом [9], свободная экзотическая модель действительно может быть получена как хитрый нерелятивистский предел свободного релятивистского аниона. Последний описывается симплектической формой и гамильтонианом⁴⁾ [10],

$$\Omega_0 = dp_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{s}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{p_\alpha dp_\beta \wedge dp_\gamma}{(p^2)^{3/2}}, \quad H_0 = \frac{1}{2m} (p^2 - m^2 c^2). \quad (3.1)$$

³⁾ Это имеет место также и в коммутативном случае.

⁴⁾ Индексы, обозначенные греческими буквами α, β и т.д., отвечают $(1+2)$ -мерным координатам, а латинскими $i, j, \dots$ – пространственным координатам. Метрический тензор имеет вид $\text{diag}(c^2, -1, -1)$.

Тогда, используя разложение $p_0 \simeq mc^2 + \vec{p}^2/2m$, полагая

$$s/c^2 = m^2 \theta \quad (3.2)$$

и удерживая только главные члены по c^{-2} , получаем в точности свободную экзотическую структуру.

Рассмотрим сначала теорию Чоу и др. [11]. Эти авторы без дополнительной мотивировки *постулировали*, что анионы в *постоянном и слабом* электромагнитном поле движутся, подчиняясь обычным (плоским) уравнениям Лоренца

$$m \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = p^\alpha, \quad \frac{dp^\alpha}{d\lambda} = \frac{e}{m} F^{\alpha\beta} p_\beta, \quad (3.3)$$

где $F_{\alpha\beta}$ – электромагнитное поле, e – заряд и m – масса; λ обозначает собственное время. Эти уравнения связаны с симплектической структурой и гамильтонианом в 6-мерном фазовом пространстве:

$$\Omega = dp_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{s}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{p_\alpha dp_\beta \wedge dp_\gamma}{(p^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} e F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad (3.4)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p^2 - m^2 c^2 + \frac{es}{\sqrt{p^2}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F^{\alpha\beta} p^\gamma \right). \quad (3.5)$$

Любопытно, что для каждого значения s мы получаем одинаковые уравнения движения, а именно (3.3). Отметим, что, в то время как симплектическая форма $\Omega = \Omega_0 + eF$ получена по знакомому рецепту минимального взаимодействия [16], гамильтониан модифицирован посредством дополнительного неминимального члена, $H = H_0 + H_s$, где H_s *выбирается* так, чтобы нейтрализовать воздействие спинового члена в симплектической форме. Таким образом, его роль заключается в том, чтобы обеспечить выполнение постулированного соотношения (3.3) между p_α и $\dot{x}_\alpha$.

В плоскости спин сводится, по существу, к вещественной константе. Если потребовать, как обычно, чтобы тензор спина $S_{\alpha\beta}$ удовлетворял условию

$$S_{\alpha\beta} p^\beta = 0, \quad (3.6)$$

то отсюда будет следовать, что спин и импульс пропорциональны:

$$S_{\alpha\beta} = \frac{s}{\sqrt{p^2}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p^\gamma. \quad (3.7)$$

Заметим, что, вводя краткую запись $F \cdot S = -F_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}$, которую мы также будем использовать в дальнейшем, можно представить выбранный Чоу и др. дополнительный член в виде $H_s = -(e/2m) F \cdot S$. Поэтому их гамильтониан (3.5) есть

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 - M^2 c^2), \quad \text{где } M^2 = m^2 + \frac{e}{c^2} F \cdot S. \quad (3.8)$$

Здесь M может рассматриваться как *зависящая от поля масса*, которая также включает энергию намагничивания [18]. Тогда решение ассоциированных с Ω и H уравнений Гамильтона есть, в действительности, не что иное, как нахождение ядра формы Ω , суженной на 5-мерную поверхность, которая определяется условием $H = 0$, т.е. $p^2 = M^2 c^2$.

4. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ

Более общая модель была недавно предложена в [14]. Основная мысль заключается в том, чтобы обобщить “зависящую от поля массу” M в (3.8), включив в нее множитель $g/2$: мы по-прежнему выбираем $H = p^2 - M^2 c^2$, но теперь

$$M^2 = m^2 + \frac{g}{2} \cdot \frac{e}{c^2} F \cdot S. \quad (4.1)$$

Это приводит к обобщенным уравнениям

$$D \frac{dx^\alpha}{d\tau} = G \frac{p^\alpha}{M} + (g-2) \frac{es}{4M^2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}, \quad (4.2)$$

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = e F^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau}, \quad (4.3)$$

где

$$D = 1 + \frac{eF \cdot S}{2M^2 c^2}, \quad G = 1 + \frac{g}{2} \cdot \frac{eF \cdot S}{2M^2 c^2}. \quad (4.4)$$

Замечательное свойство состоит в том, что при $g \neq 2$ скорость и импульс *не* параллельны. Такая возможность отстаивалась много лет назад в работе [19]. В случае $g \neq 2$ наша обобщенная модель обладает поразительным свойством: когда один из коэффициентов D или G обращается в нуль, *единственно разрешенные движения* подчиняются закону Холла [14]. Если, напротив, $g = 2$, то $D = G$ и эффект Холла исчезает.

Поэтому мы полагаем, что эффект Холла – это физическое проявление аномальных анионов.

Наше новое взаимодействие, определенное посредством зависящей от поля массы в (4.1), в общем случае является неминимальным: минимальное взаимодействие соответствует *аномальному гиромагнитному отношению* $g = 0$, а не $g = 2$.

Дальнейшее понимание может быть достигнуто при вычислении ДН-предела релятивистского аниона. Простое вычисление [14] показывает, что уравнения (4.2), (4.3) переходят в уравнения

$$(1 - (g+1)\theta eB) \dot{x}^i = \left(1 - \frac{3g}{2}\theta eB\right) \frac{p^i}{M_g} - \left(1 - \frac{g}{2}\right) e\theta \epsilon^{ij} E_j, \quad (4.5)$$

$$\dot{p}^i = eE^i + eB\epsilon^{ij}\dot{x}_j, \quad (4.6)$$

где точка означает производную по нерелятивистскому времени и $M_g = m\sqrt{1 - g\theta eB}$ – нерелятивистский предел зависящей от поля массы M . Теперь легко видеть, что если

$$B' = \frac{1}{1+g} \cdot \frac{1}{e\theta} \quad \text{или} \quad B'' = \frac{2}{3g} \cdot \frac{1}{e\theta}, \quad (4.7)$$

то частица должна подчиняться закону Холла. Первое из этих критических значений обобщает соотношение (2.11) на случай произвольного g , тогда как второе является соотношением нового типа.

В частном случае $g = 0$ мы снова получаем экзотическую модель [7]. Следовательно, последняя не может быть нерелятивистским пределом системы Чоу и др., для которой $g = 2$.

При $g = 2$ наши уравнения (4.2), (4.3) могут быть преобразованы в уравнения, предложенные Чоу и др. в работе [11], с помощью следующей репараметризации

$$\tau \rightarrow \frac{m}{M} \tau, \quad (4.8)$$

где τ – собственное время и M – наша (релятивистская) зависящая от поля масса (4.1). Следует упомянуть, что наша формула для массы (4.1) *не является* обязательной: *любая* функция $M(\phi)$, $\phi = F \cdot S$, взаимодействия спина и поля приводит к непротиворечивой теории [18], [14]. Отличные от нашего способы выбора массы также уже рассматривались [18], [20]. В работе [20], например, Кюнзл выбирал

$$\widetilde{M} = m + \frac{ge}{4mc^2} F \cdot S. \quad (4.9)$$

Общая массовая функция $M(F \cdot S)$ снова даст уравнения (4.2), (4.3) с гиромагнитным отношением

$$\frac{g}{2} = \frac{c^2}{e} \frac{d(M^2)}{d\phi}. \quad (4.10)$$

Снова, когда система становится сингулярной ($D = 0$) либо когда импульс расщепляется ($G = 0$), все движения подчиняются закону Холла при условии $g \neq 2$.

Выбор массовой функции в виде (4.1) и (4.9) приводит к одинаковым уравнениям в пределе слабого поля. Действительно, $M = \sqrt{m^2 + egF \cdot S/2c^2} \simeq \widetilde{M}$, если $egF \cdot S/m^2c^2 \ll 1$.

Хотя в настоящей работе мы сконцентрировали внимание на поведении заряженной частицы в электромагнитном поле, следует упомянуть, что аналогичное исследование возможно в случае гравитационных взаимодействий [18], [20]. В частности, в очень сильном гравитационном поле можно обнаружить похожие вырожденные движения [20]. Сходные уравнения были получены недавно в рамках лагранжева формализма [21].

Благодарности. Мы благодарны Л. Мартине, М. Плюшаю и П. Стихелу за обсуждения. П. А. Хорвати благодарит организаторов конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. III” за гостеприимство.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Изд. 4-е. М.: Наука, 1989; R. Peierls. Z. Phys. 1933. V. 80. P. 763.
- [2] S. Girvin, T. Jach. Phys. Rev. B. 1984. V. 29. P. 5617; G. Dunne. Ann. Phys. 1992. V. 215. P. 233.
- [3] F. Ezawa. The Quantum Hall Effects. Field Theoretical Approach and Related Topics. Singapore: World Scientific, 2000.
- [4] R. B. Laughlin. Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1395; G. Morandi. Quantum Hall Effect. Topological Problems in Condensed-Matter Physics (Monographs and Textbooks in Physical Science. Lecture Notes. V. 10). Napoli: Bibliopolis, 1988; M. Stone (ed.). Quantum Hall Effect. Singapore: World Scientific, 1992.

- [5] *G. Dunne, R. Jackiw, C. A. Trugenberger.* Phys. Rev. D. 1990. V. 41. P. 661; *G. Dunne, R. Jackiw.* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 1993. V. 33C. P. 114.
- [6] *L. Mittag, M. Stephen, W. Yourgrau.* Variational principles in hydrodynamics. In: Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory. Eds. W. Yourgrau, S. Mandelstam. Philadelphia: Saunders, 1968; Republication: N. Y.: Dover, 1979. Section 13. P. 142; *L. Onsager.* Il Nuovo Cimento Suppl. 1949. V. 6. P. 279; *H. Lamb.* Hydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932; *G. Kirchhoff.* Vorlesungen über mathematischen Physik: Mechanik. 3rd ed. Leipzig: Teubner, 1876; *P. Horváthy.* Noncommuting coordinates in vortex dynamics and in the Hall effect, related to “exotic” Galilean symmetry. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment II. Proc. Int. Workshop (Gallipoli, Lecce, Italy, 2002). Eds. M. J. Ablowitz, M. Boiti, F. Pempinelli, B. Prinari. River Edge, NJ: World Scientific, 2003. P. 186; hep-th/0207075; Noncommuting coordinates in the Hall effect and in vortex dynamics. hep-th/0307175.
- [7] *C. Duval, P. A. Horváthy.* Phys. Lett. B. 2000. V. 479. P. 284; J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 10097; *P. A. Horváthy.* Ann. Phys. 2002. V. 299. P. 128.
- [8] *J.-M. Lévy-Leblond.* Galilei group and Galilean invariance. In: Group Theory and Applications. V. II. Ed. E. Loeb. N. Y.: Acad. Press, 1971. P. 221; *Y. Brihaye, C. Gónzalez, S. Giller, P. Kosiński.* Galilean invariance in 2 + 1 dimensions. hep-th/9503046; *J. Lukierski, P. C. Stichel, W. J. Zakrzewski.* Ann. Phys. 1997. V. 260. P. 224.
- [9] *R. Jackiw, V. P. Nair.* Phys. Lett. B. 2000. V. 480. P. 237; hep-th/0003130.
- [10] *B.-S. Skagerstam, A. Stern.* Int. J. Mod. Phys. A. 1990. V. 5. P. 1575; *M. S. Plyushchay.* Phys. Lett. B. 1990. V. 248. P. 107; *R. Jackiw, V. P. Nair.* Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 1933; *S. Ghosh.* Phys. Lett. B. 1994. V. 338. P. 235.
- [11] *C. Chou, V. P. Nair, A. Polychronakos.* Phys. Lett. B. 1993. V. 304. P. 105.
- [12] *J. L. Cortés, J. Gamboa, L. Velázquez.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 953; *S. Ghosh.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 5827; *J. L. Cortés, M. S. Plyushchay.* Int. J. Mod. Phys. A. 1996. V. 11. P. 3331; *R. Jackiw.* Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 2635.
- [13] *D. K. Maude, M. Potemski, J. C. Portal.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 4604; *D. R. Leadley, R. J. Nicholas, D. K. Maude et al.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 4246.
- [14] *C. Duval, P. A. Horváthy.* Phys. Lett. B. 2004. V. 594. P. 402; hep-th/0402191.
- [15] *D. R. Grigore.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 240; P. 460.
- [16] *J.-M. Souriau.* Structure des Systèmes Dynamiques. Maîtrises de Mathématique. Paris: Dunod, 1970; Structure of Dynamical Systems: a Symplectic View of Physics. Dordrecht: Birkhäuser, 1997.
- [17] *V. P. Nair, A. P. Polychronakos.* Phys. Lett. B. 2001. V. 505. P. 267; *J. Gamboa, M. Loewe, F. Méndez, J. C. Rojas.* Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 06701; *R. Banerjee.* Mod. Phys. Lett. A. 2002. V. 17. P. 631; hep-th/0106280.
- [18] *J.-M. Souriau.* C. R. Acad. Sci. Paris. Série A. 1970. V. 271. P. 1086; *Ch. Duval, H. H. Fliche, J.-M. Souriau.* C. R. Acad. Sci. Paris. Série A. 1972. V. 274. P. 1082; *Ch. Duval.* Un modèle de particule à spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel extérieur. Thèse de 3e Cycle. Doctoral Thesis. Marseille: Marseille Univ., 1972; *J.-M. Souriau.* Ann. Inst. H. Poincaré. A. 1974. V. 20. P. 315; *Ch. Duval.* Ann. Inst. H. Poincaré. A. 1976. V. 25. P. 345.
- [19] *W. G. Dixon.* Nuovo Cimento. 1965. V. 38. P. 1616.
- [20] *H. P. Künzle.* J. Math. Phys. 1972. V. 13. P. 739.
- [21] *B. S. Skagerstam, A. Stern.* Physica Scripta. 1981. V. 24. P. 493; *P. Horváthy, L. Martina, P. Stichel.* Phys. Lett. B. 2005. V. 615. P. 87; hep-th/0412090.